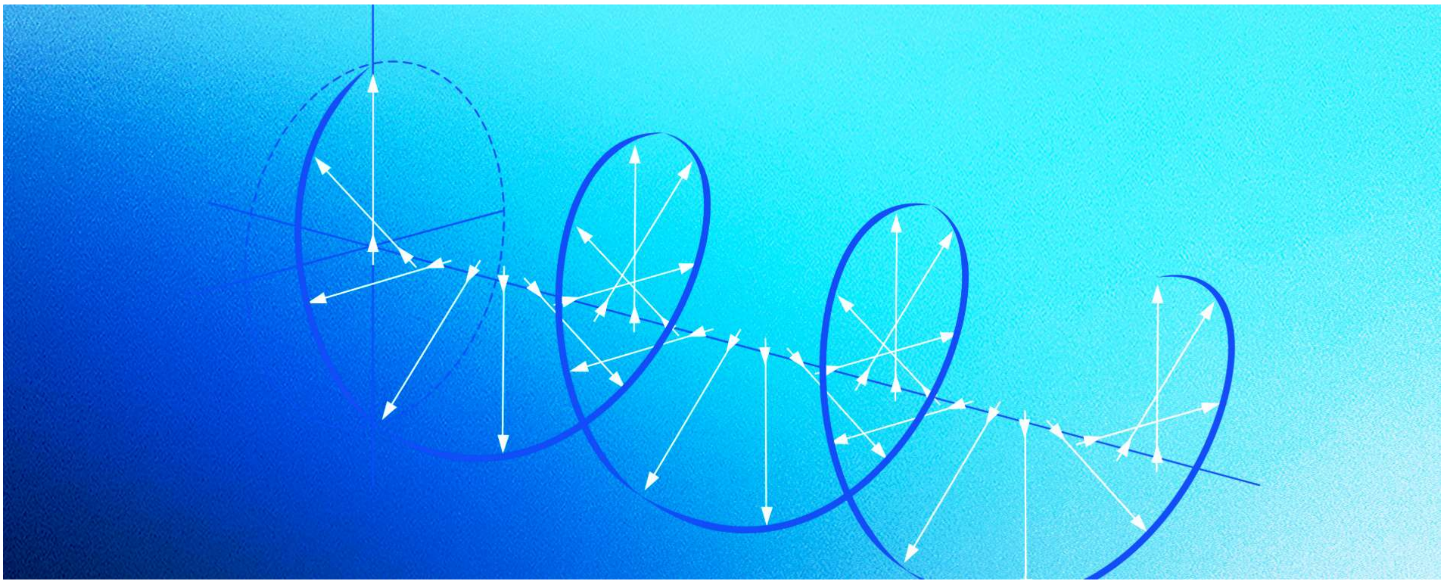
양자역학

믿기 힘든 양자 Incredible Quantum [2]: 가장 순수한 형태의 파동

2018년 3월 12일

박권



The most remarkable formula in mathematics: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

This is our jewel.

– Richard Feynman –

생텍쥐페리Saint-Exupery의 어린 왕자Le Petit Prince라는 소설이 있다. 자세한 설명이 필요 없을 정도로 유명한 소설이다. 어린이를 위한 동화책의 모습을 띄고 있지만 그 안에 담긴 단순하지만 심오한 말들로 인해 어렸을 때보다 나이가 들수록 더 좋아하게 되는 책이다. 특히 소설 속 가장 중요한 등장인물 중 하나인 여우가 어린 왕자에게 해 준 말들은 모두 주옥과 같다. 그 중에 다음과 같은 말이 있다.

"비밀을 하나 말해줄게. 아주 간단한 비밀이야. 마음으로 보아야만 가장 잘 보여. 정말 중요한 것은 눈에 안 보이거든.
Voici mon secret. Il est très simple: on ne voit bien qu'avec le cœur.
L'essentiel est invisible pour les yeux."

영화 <The Little Prince>(2015)

이전 글에서 물리학자들이 세계를 어떻게 바라보는지 알려면 그들의 언어를 이해해야 한다고 했다. 그들의 언어는 근본적으로 양자역학이고, 그 언어의 문법은 수학이다. 눈에 보이는 겉면만 본다면, 양자역학은 우리가 일상 생활에서 얻는 물리적인 직관에 반하는 불가사의함과 그것을 둘러싸고 있는 복잡하고 추상적인 수학 체계로만 보인다. 하지만 정말 중요한 것은 마음으로 보아야만 보인다.

연재글

믿기 힘든 양자 Incredible Quantum

물리학자들이 양자역학을 생각할 때 그들의 마음 속에는 무엇인가 확신이 있다. 이 글을 읽고 있는 어떤 독자들은 양자역학을 전문적으로 배우지 않고 대중 서적에서 소개된 내용으로 접했을 것이다. 많은 대중 서적에서는 이 세상 그 어느 누구도 양자역학을 제대로 이해하고 있지 못 하며, 우리는 그저 세상이 이렇게 생겼구나 받아들이는 수밖에 없다고 가르친다. 물론 완전히 맞는 말이라고 할 수는 없지만 아주 틀린 말도 아니다. 그렇다면 이렇게 완전하게 이해할 수 없음에도 불구하고 왜 물리학자들의 마음에는 확신이 있는 것일까? 이 근거 없는 확신의 정체는 무엇일까?

필자가 생각하기에 이 질문에 대한 답은 근본적으로 물리학자들이 오랜 동안 마음의 길들임(어린 왕자에서 여우의 말을 다시 한번 더 인용해서)을 통해서 복잡하고 추상적인 수학 체계 너머에 존재하는 양자역학의 정말 중요한 "그 무엇"을 보았기 때문이라고 생각한다. 정말 중요한 "그 무엇"이 무엇인지 명확하게 정의하고 시작할 수 있으면 좋을 것이다. 하지만 그렇게 하는 것은 그 자체로 불가능할 뿐만 아니라, 더 중요하게 "그 무엇"의 본질을 퇴색시키는 것이라고 생각한다. 대신 이제부터 필자는 본인의 능력이 닿는 데까지 최대한 정말 중요한 "그 무엇"이 물리학자들의 마음에 보이는 모습 그대로 독자들에게 보여주고자 할 것이다.

양자역학에서 물질의 상태는 파동 함수에 의해서 기술된다. 파동이라는 말을 들었을 때 독자들의 마음 속에는 어떠한 이미지가 떠오르는가? 많은 물리학자들의 마음 속에는 물결이 출렁거리는 영상만큼이나 강렬하고 직접적인 어떠한 이미지가 있다. 그것은 바로 다음의 수식이다.

$$e^{i(kx-wt)}$$

위 수식을 보는 순간 물리학자들의 마음에는 파동이 친다. 왜 그럴까? [위 공식에서 k는 파수wave number, 즉 파장wave length의 역수이고, w는 진동수frequency, 즉 주기period의 역수이다.]

사실 임의의 함수 $f(kx-wt)$는 $v=\frac{w}{k}$의 속도를 가지고 움직이는 파동을 기술할 수 있다. 하지만 위의 수식은 그야말로 가장 순수한 형태의 파동을 기술한다. 이러한 파동을 평면파plane wave라고 부른다. 위의 수식이 왜 가장 순수한 형태의 파동을 기술하는지 알기 위해서는 노벨 물리학상으로 빛나는 리처드 파인만Richard Feynman이 수학에서 가장 놀라운 공식이라고 부른 "오일러Euler의 공식"을 이해해야 한다.

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

그리고 오일러의 공식을 이해하기 위해서는 우선 허수imaginary number i를 이해해야 한다.

허수는 그 이름을 문자 그대로 해석하면 상상 속에만 존재하는 수이다. 허수라는 이름이 주는 선입견은 "방정식의 해는 기하학적으로 의미있어야 한다", 다시 말해서 "그래프를 그려서 그 의미를 판단할 수 있어야 한다"라는 오래된 전통에 기인한다. 예를 들어 2차 방정식 $f(x)=x^2+1=0$을 만족하는 해를 상상해보자. $f(x)$를 x의 함수로 그래프를 그려보면 0이 되는 점이 없다는 것을 곧 알 수 있다. 따라서 위의 방정식을 만족하는 "실제로 존재하는" 수, 실

수[real number]는 없다. 그럼에도 불구하고 만약 제곱을 해서 -1이 되는 수가 있다고 상상한다면 그런 수는 형식적으로 앞선 방정식의 해가 될 것이다. 우리는 현재 이 수가 $i=\sqrt{-1}$이라고 알고 있다. 허수에게 허수라는 이름을 붙여준 사람은 그 유명한 르네 데카르트[Rene Descartes]인데, 데카르트 이전과 동시대 대부분의 수학자들은 허수라는 존재를 생각해 볼 수는 있겠으나 그러한 상상 속의 수를 사용해서 제대로 된 수학적 체계를 구성할 수는 없을 것이라고 생각했다. 이해가 안 되는 것이 나타나면 우선 그냥 무시해 보는 것은 수학자를 포함한 인간의 본성인 것 같다. 하지만 항상 그렇듯이 중요한 것은 무시한다고 그냥 사라지지 않는다. 허수의 필요성은 앞선 2차 방정식의 해로서가 아니라 3차 방정식의 해를 얻는 과정에서 더 절실한 모습을 숨기고 있었다.

3차 방정식의 해를 주는 공식은 이탈리아 볼로냐 대학교의 수학자 델 페로[del Ferro]와 이탈리아 브레샤의 "말더듬이"라는 별명이 그대로 이름이 된 타르탈리아[Tartaglia]에 의해서 독립적으로 발견되었다. 재미있게도 델 페로의 제자인 피오르[Fiore]와 타르탈리아는 서로가 낸 3차 방정식을 푸는 대결을 펼쳤는데, 결과는 타르탈리아의 승리였다. 이 시기에는 3차 방정식을 푸는 것을 비롯해서 어려운 수학 문제를 누가 해결할 수 있는가에 대해서 대결이 벌어지고는 했다고 하니 참 재미있는 시대였던 것 같다. 아마 현재로 치면 체스나 바둑 대결과 같지 않았을까 상상해 본다. 이후에 델 페로와 타르탈리아의3차 방정식의 해법은 이탈리아 밀라노의 의사이자 수학자였던 카르다노[Cardano]에 의해서 출간돼 세상에 알려지게 되어, 후세에 "카르다노의 공식"이라고 불리게 된다. (여기에도 재미있는 역사가 깃들여져 있는데 자세한 내용은 HORIZON 1호에 실렸던 고차방정식 해법의 역사에서 찾아볼 수 있다.)

허수를 포함한 복소수[complex number]의 개념을 본격적으로 처음 정립한 수학자로 인정받고 있는 봄벨리[Bombelli]는 다음과 같은 3차 방정식을 생각해 보았다.

$$x^3=px+q$$

위 방정식은 카르다노의 공식에 의해서 풀렸는데 그 해의 구체적인 공식은 다음과 같다.

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

(엄밀하게 말해서 위의 공식은 3차 방정식의 3개의 해 중에서 하나만 주지만 여기서는 이 사실을 잠깐 무시하도록 하자.) 문제는 제곱근 속에 있는 수가 음의 값을 갖는 경우, 다시 말해서 $\left(\frac{q}{2}\right)^2$이 $\left(\frac{p}{3}\right)^3$보다 작아지는 경우에 발생한다. 구체적인 예로, $x^3=15x+4$의 경우에 위 공식은 다음과 같은 해를 준다.

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

위 공식에서 제곱근 속의 수가 -121이므로 이 수가 무엇을 의미할까하는 문제가 생긴다. 보통의 경우라면 허수라는 의미없는 수가 나왔으니 무시하자고 마음을 먹을 수 있겠으나, 실상은 훨씬 더 흥미롭게 전개된다. 실마리는 약간의 시행착오를 거치면 위 방정식의 해가 $x=4$인 것을 알 수 있다는 데 있다. 그렇다면 위의 복잡해 보이는 해가 결국 $x=4$이어야 한다는 의미인가? 결론부터 말하면 답은 "그렇다"이다.

봄벨리는 앞선 카르다노 공식이 $x=4$를 주기 위해서 $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$와 $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$가 각각 어떤 적절한 복소수 $a+bi, a-bi$와 같을 것이라고 추정했다. 다시 말해서, 세제곱근 속에 있는 $2+\sqrt{-121}$이 $2+11i$이므로, 세제곱하면 $2+11i$가 되는 어떤 적절한 복소수 $a+bi$가 있을 것이라고 생각했다. 답은 바로 $a+bi=2+i$였

다. 결론적으로 $x = 2 + i + 2 - i = 4$가 되어 카르다노의 공식이 여전히 정확한 답을 준다는 것이 증명되었다. 여기서 중요한 사실은 허수의 존재를 받아들이고 허수가 만족해야만 하는 연산 공식을 일관되게 사용하면 올바른 답이 도출된다는 사실이다.

우리가 물리적으로 잴 수 있는 양은 모두 실수이다. 다시 말해서, 그 자체로서 허수인 물리량은 없다. [물론 복소수의 허수 부분imaginary part이 물리량으로 나타나는 경우가 있으나 이 경우에도 그 값 자체는 실수이다.] 따라서, 허수라는 개념은 물질 세계를 기술하는 데에 필요없지 않을까 추측해 볼 수 있다. 하지만 앞서 보았듯 허수는 3차 방정식의 모든 계수가 실수이고 해까지 실수인 경우에도 3차 방정식의 해의 일반적인 구조를 통합적으로 이해하는 데에 매우 중요한 역할을 했다. 짧게 줄여서 말하면, 허수는 그 자체로서 잴 수 없지만, 일단 그 존재를 받아들이면 실제로 존재하는 다른 양들에 대해서 많은 것을 말해 주는 매우 유용한 개념이라는 것이다. 왠지 벌써 양자역학과 궁합이 잘 맞을 것 같은 느낌이 들지 않는가?

이제 오일러의 공식을 이해하기 위해서 두 번째 관문인 지수 함수exponential function에 대해서 이야기를 해 보자. 지수 함수는 흔히 “어떤 값이 지수 함수적으로 증가한다”와 같은 문장에서 쓰인다. 이때의 의미는 거칠게 말하면 어떤 값이 굉장히 빨리 증가한다는 것이고 약간 더 엄밀하게 말하면 어떤 값이 증가하는 속도가 그 값 자체에 비례한다는 의미이다. 일상 생활에서 지수 함수의 예를 들면 다음과 같다. 은행에 돈을 예금을 하면 이자가 지급되는데, 이자는 보통 예금된 돈의 액수와 예금 기간에 비례해서 붙는다. 이때 이자가 처음 원금에만 비례해서 붙는 것이 아니라, 정해진 기간 마다 그 이전에 이자가 더해진 총액에 다시 이자가 붙는 방식, 다시 말해서 복리compound interest로 이자가 붙는 방식이 바로 지수 함수이다.

실제로 현재 “오일러의 수Euler’s number”라고 불리는 $e = 2.71828\ldots$를 처음 생각한 사람은 오일러가 아니라 제이콥 베르누이Jacob Bernoulli였다. 베르누이가 생각한 문제는 다음과 같다.

“은행에 1불을 예금하고 1년을 기다리면 이자로 원금의 100%에 해당하는 1불을 받는다고 하자. 이 경우에 1년 후에는 원금을 포함하여 2불을 받을 수 있다. 질문은, 이렇게 1년을 온전히 기다리지 않고 중간에 여러번 정산을 해서 이자를 받으면 어떻게 될까?”

예를 들어 처음 6개월이 지난 후에 한번 정산을 하면 원금 1불과 이자 0.5불을 받아 총 1.5불을 받고, 이때 다시 남은 6개월을 기다려 정산을 받으면 중간 원금 1.5불과 이자 $1.5 \times 0.5 = 0.75$불을 받아 최종적으로 총 2.25불을 받게 된다. 이제 매 6개월이 아니라 매일 혹은 매초 정산을 한다고 하면 어떻게 될까? 아니 아예 더 극한으로 가서 아무런 쉼 없이 연속적으로 정산을 하면 어떻게 될까? 답은 원금에 오일러의 수만큼 곱해진 액수를 받게 된다는 것이다.

지수 함수는 수학적으로 다음과 같이 쓰여진다.

$$f(x) = e^x$$

여기서 x는 위 복리 예금의 예에서 본다면 총 예금 기간이라고 볼 수 있다. 그래프를 그려보면 알겠지만 지수 함수는 굉장히 빨리 증가하는 함수이다. 조금 더 엄밀하게 정의하면 지수 함수는 함수가 변하는 정도, 다시 말해서 함수의 미분값이 함수값 자신과 같다는 성질로 정의된다.

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)$$

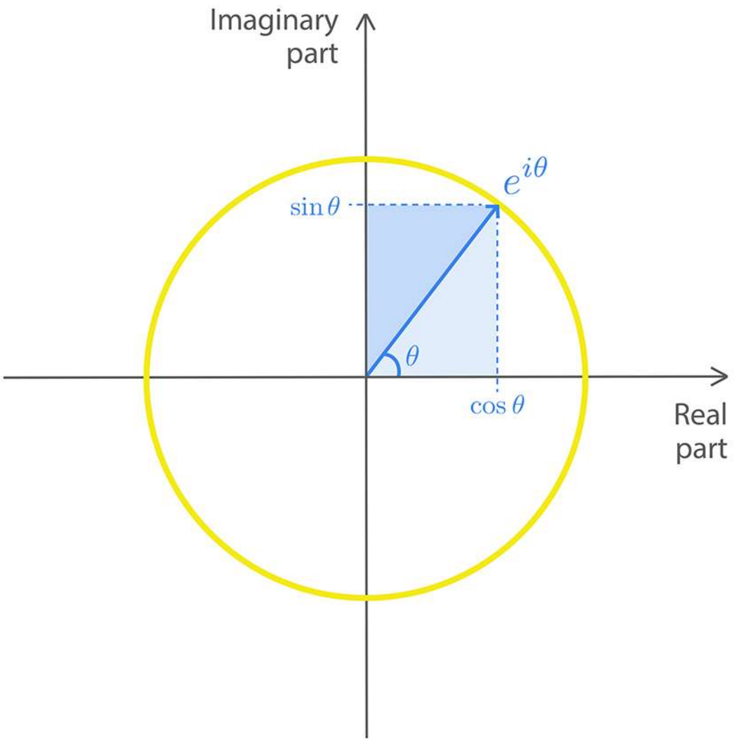
이 성질은 지수 함수를 다음과 같은 테일러 급수Taylor series로 전개할 수 있게 해 준다.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

여기서 $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$으로 정의되고, n계승 혹은 팩토리얼factorial이라고 불린다. 위의 공식이 맞는 것은 다음과 같이 증명된다. 우선 정의에 따라서 방정식 좌변에 있는 지수 함수는 미분을 했을 때 자기 자신으로 남는 함수이다. 그리고 방정식의 우변에 있는 테일러 급수는 미분을 했을 때 명백하게 항상 자기 자신과 같다. 나중에 더 자세하게 보겠지만, 앞선 지수 함수의 테일러 전개 공식은 매우 중요하며, 양자역학의 여러 문제에서 매우 자주 등장하게 된다. (심지어 x가 일반 수가 아니라 행렬이 되어도 된다!)

이제 허수와 지수 함수가 만나면 마술이 일어난다. 앞선 지수 함수의 테일러 전개 공식에서 x자리에 허수 $i\theta$를 넣으면 다음과 같이 된다.

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots)$$



[그림1] 오일러의 공식을 표현하는 그래프

J. FGI

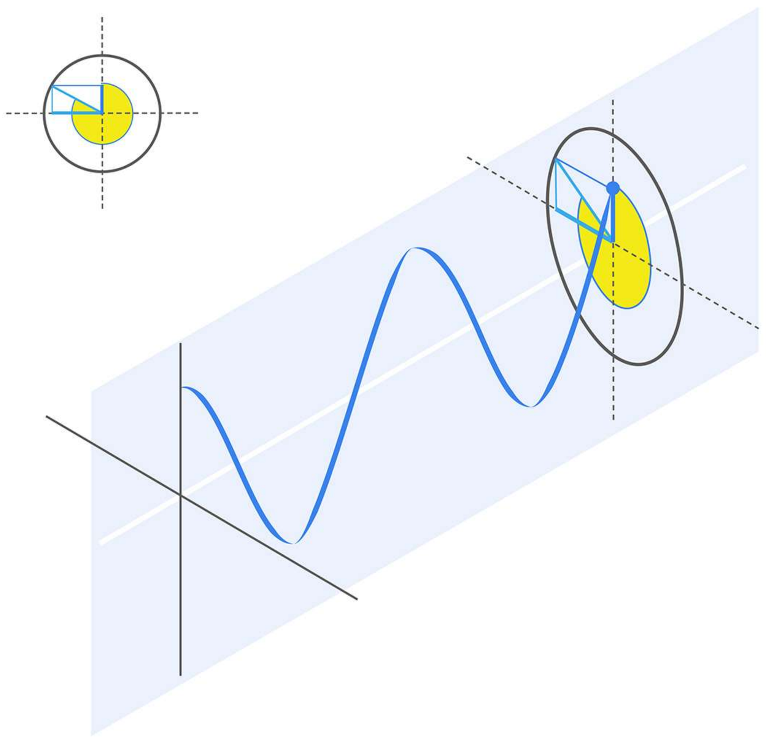
놀랍게도 우변의 실수 부분(첫번째 괄호에 묶인 부분)은 정확히 코사인cosine 함수이고 허수 부분(두번째 괄호에 묶인 부분)은 사인sine 함수이다. 이렇게 해서 결국 필자가 약속한 오일러의 공식이 얻어진다.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

오일러의 공식이 대단한 이유는 이제 복소수를 기하학적으로 해석할 수 있다는 데 있다. 복소수 $e^{i\theta}$는 실수 부분이 $\cos\theta$이고 허수 부분이 $\sin\theta$이므로, 실수와 허수 부분을 각각 x와 y축으로 그리는 소위 복소 평면complex plane 위에 표시하면 반지름이 정확히 1인 원 위에 존재하는 한 점이 된다. 참고를 위해서 [그림1]을 보라. 임의의 복소수는 복소 평면 상의 적절한 점에 대응하므로, 원점에서 이 점까지 연결하는 선분의 길이와 방향, 다시 말해서 벡터vector로 표현될 수 있다. 그렇다면 복소수를 가지고 하는 연산은 복소 평면 위에서의 적절한 기하학적인 변환에 해당하게 된다. 어떤 의미로 우리는 대수학algebra과 기하학geometry의 통합을 얻은 것이다.

사인 함수와 코사인 함수는 둘 다 파동을 기술하는, 다시 말해서 위 아래로 출렁거리는 가장 기초적인 함수이다. 오일러의 공식 속에 있는 θ의 위치에 $kx - wt$를 집어넣으면, 속도 $v = \frac{w}{k}$로 움직이는 평면파를 기술하는 다음과 같은 파동 함수가 얻어진다.

$$e^{i(kx-wt)} = \cos(kx - wt) + i\sin(kx - wt)$$



[그림2] 평면파가 복소 평면에서 나선 구조를 가지고 실공간으로 나아가는 그림

J. FGI

이 평면파를 그림으로 그리면 [그림2]와 같이 복소 평면에서 나선helix 구조를 가지고 실공간real space을 나아가는 파동이 된다. 이제 위 공식을 보는 순간 마음에 파동이 치는가? (아직 마음에 파동이 치지 않는 독자들은 앞으로 글이 연재될수록 서서히 그렇게 되리라 바라본다.)

그런데 여기서 중요한 질문 하나가 생긴다. 출렁거리는 파동을 기술한다라는 목적만을 생각한다면, 실수 함수인 사인이나 코사인 함수이면 충분할 것이다. 그런데 필자는 왜 굳이 허수를 변수로 갖는 지수 함수가 가장 순수한 형태의 파동을 기술한다고 주장하는 것일까? 이 질문에 대한 답은 양자역학적 파동 함수가 만족해야 하는 미분 방정식differential equation의 특성에 있다. 결론부터 미리 말하면, 답은 양자역학적 파동 함수가 만족해야 하는 미분 방정식, 즉 슈뢰딩거 방정식이 허수의 존재를 절실히 요구한다는 것이다. 다음 글에서는 슈뢰딩거 방정식이 음파sound wave와 같은 고전적인 파동을 기술하는 파동 방정식과 어떻게 다르기에 허수의 존재를 절실히 요구하는지 자세히 살펴 보도록 하자.