퍼즐

[9월의 퍼즐 해설] 십자수풀이

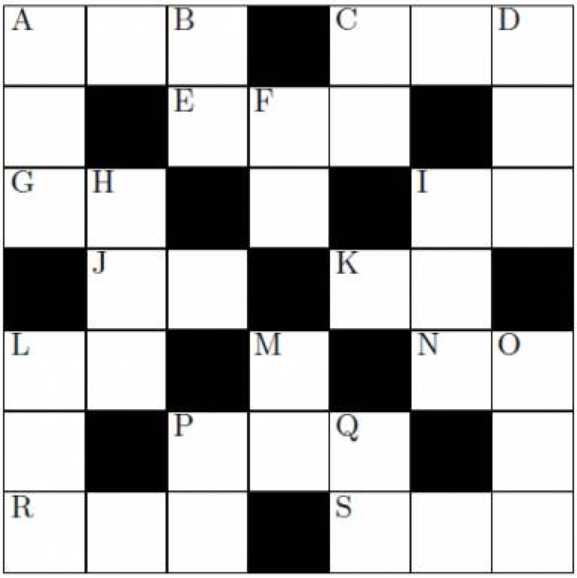
2018년 9월 28일

박부성

9월의 퍼즐에 참여해주신 모든 분들께 감사드립니다!

9월의 퍼즐에 참여해주신 분 중 정답과 함께 좋은 풀이를 보내주신 **김태훈**님께 HORIZON에서 준비한 선물을 전달드릴 예정입니다.

9월의 퍼즐 문제 보러가기



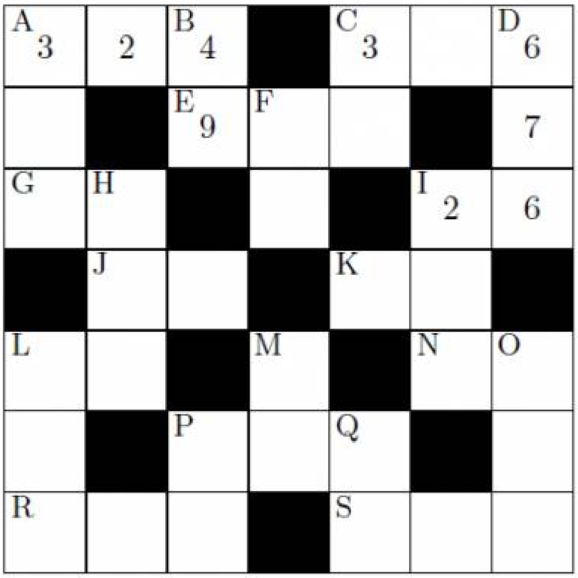
우선 가로 I 열쇠에서 세로 D는 가로 I의 제곱이면서 일의 자리가 일치해야 한다. 이렇게 되는 경우를 찾아보면,

$$10^2 = 100, \quad 11^2 = 121, \quad 15^2 = 225, \quad 16^2 = 256, \quad 20^2 = 400,$$
$$21^2 = 441, \quad 25^2 = 625, \quad 26^2 = 676, \quad 30^2 = 900, \quad 31^2 = 961$$

의 열 가지가 가능하다. 그런데 가로 A와 세로 D의 열쇠에서, 가로 A는 1000에서 세로 D를 뺀 수이면서 제곱수라야 한다. 세로 D로 가능한 각 경우를 1000에서 빼 보면, 세로 D와 가로 A로 가능한 조합은

$$(100, 900), \quad (676, 324), \quad (900, 100)$$

의 세 가지이다. 그러나 세로 B의 첫 자리 숫자가 0이 될 수는 없으므로, 세로 D는 676이고 세로 A는 324라야 한다. 따라서 가로 I는 26으로, 세로 B는 49로 결정된다.



가로 E의 열쇠에서 가로 I인 26의 배수 가운데 첫 자리가 9인 수를 찾아보면,

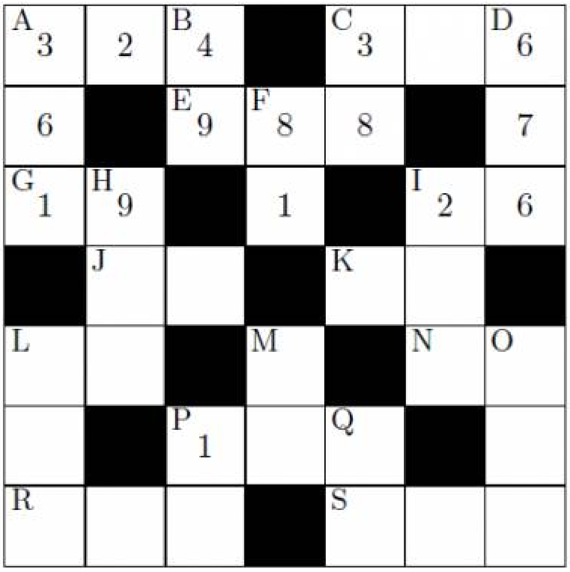
$$26 \times 35 = 910, \quad 26 \times 36 = 936, \quad 26 \times 37 = 962, \quad 26 \times 38 = 988$$

이고 이 가운데 세로 C와 가로 E의 일의 자리가 같은 경우는

$$26 \times 36 = 936, \quad 26 \times 38 = 988$$

의 두 가지이다. 그런데 세로 C의 열쇠에서 제곱수가 아니라고 하였으므로, 세로 C는 38일 수밖에 없다. 따라서 가로 E는 988이고 세로 F는 81이다.

한편 세로 A 열쇠에서 3으로 시작하는 세 자리 제곱수는 324와 361뿐이므로 세로 A는 361이 되고 가로 G는 19가 된다. 또 가로 P의 열쇠에서 가로 P의 첫 자리 숫자가 1임을 알 수 있다.



이제 가로 J, 가로 K, 세로 M의 열쇠를 보면, $81\times$(세로 M)을 적당히 나누어 서로 다른 두 수의 곱으로 나타낼 수 있어야 한다. 그런데, 예를 들어, 세로 M이 $25 = 5^2$라면, 가로 P가 15? 꼴이 되어 세로 I가 2로 시작할 수 없다. 이렇게 생각하면, 세로 M으로 가능한 거듭제곱수는 일의 자리가 4보다 작거나 같은

$$32 = 2^5, \quad 64 = 2^6$$

만 가능하다. 그리고 이때

$$81 \times 32 = 27 \times 96 = 54 \times 48, \quad 81 \times 64 = 54 \times 96$$

이 된다. 이 가운데 세로 I가 가로 P의 배수가 되는 경우는 가로 K가 54, 세로 M이 32일 때뿐이고, 그러면 가로 J는 48로 결정된다.

A 3	2	B 4	■	C 3		D 6
6	■	E 9	F 8	8	■	7
G 1	H 9	■	1	■	I 2	6
■	J 4	8	■	K 5	4	■
L		■	M 3	■	N	O
	■	P 1	2	Q	■	
R			■	S		

이제 세로 Q와 가로 S의 열쇠를 보면, 세로 Q를 제곱한 수의 첫 자리 숫자가 세로 Q의 일의 자리와 같아야 한다. 이렇게 되는 경우는

$$11^2 = 121, \quad 26^2 = 676, \quad 27^2 = 729$$

밖에 없다. 이 가운데 26과 676은 가로 I와 세로 D에서 이미 쓰였으므로 남은 경우는 11^2과 27^2의 둘이다.

만약 세로 Q가 11이라면 세로 I는 242가 된다. 그러면 가로 N이 2로 시작하는 두 자리 수이므로, 세로 H의 열쇠로부터 세로 L은 4로 시작하는 두 자리 수가 되어야 한다. 그런데 이 경우, 1로 시작하는 두 자리 수들인 세로 P와 세로 Q의 곱이 세로 L이 될 수 없다. 따라서 세로 Q는 27이 되고, 가로 S는 729이고 세로 I는 244이다. 또 가로 L은 2로 시작하는 두 자리 수임을 알 수 있다.

A 3	2	B 4	■	C 3		D 6
6	■	E 9	F 8	8	■	7
G 1	H 9	■	1	■	I 2	6
■	J 4	8	■	K 5	4	■
L 2		■	M 3	■	N 4	O
	■	P 1	2	Q 2	■	
R			■	S 7	2	9

이제 가로 N이 41, 43, 45, 47, 49인 경우를 계산해 보면, 가로 N은 47이고 세로 O는 799이다. 그리고 가로 L과 가로 N의 곱이 세로 H가 되는 경우는 가로 L이 20이고 세로 H가 940일 때이다. 또 가로 C는 376일 때 가로 N의 배수가 된다.

한편 세로 P와 세로 Q의 곱이 세로 L이 되는 경우는 세로 P가 10이거나 11일 때뿐이다. 그런데 세로 P가 10이라면 가로 R의 첫 자리가 0이 되므로, 세로 P는 11이고 세로 L은 297이다.

마지막으로 가로 R은 7?1 꼴이면서 세로 P인 11의 배수가 되어야 하므로, 가로 R는 781이다.

A 3	2	B 4	■	C 3	7	D 6
6	■	E 9	F 8	8	■	7
G 1	H 9	■	1	■	I 2	6
■	J 4	8	■	K 5	4	■
L 2	0	■	M 3	■	N 4	O 7
9	■	P 1	2	Q 2	■	9
R 7	8	1	■	S 7	2	9

가로 열쇠

A. 제곱수

C. 가로 N의 배수

E. (세로 C) × (가로 I)

G. 세로 A의 제곱근

I. 세로 D의 제곱근

J. (가로 J) × (가로 K)
= (세로 F) × (세로 M)

K. (가로 J) × (가로 K)
= (세로 F) × (세로 M)

L. 세로 H의 약수

N. 세로 O의 약수

P. 세로 I의 약수

R. 세로 P의 배수

S. 세로 Q의 제곱

세로 열쇠

A. 가로 G의 제곱

B. 제곱수

C. 제곱수 아님

D. 1000 – (가로 A)

F. 거듭제곱수

H. (가로 L) × (가로 N)

I. 가로 P의 배수

L. (세로 P) × (세로 Q)

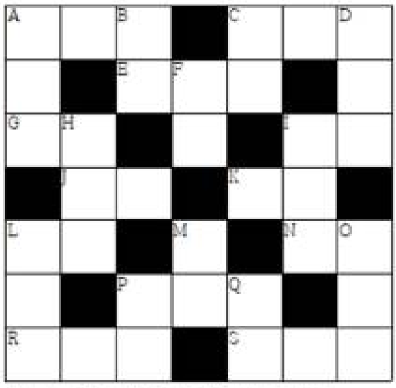
M. 거듭제곱수

O. 가로 N의 배수

P. 가로 R의 약수

Q. 가로 S의 제곱근

다음은 8월의 정답자로 선정된 **김태훈**님의 해설입니다.



(세로 D) = 1000 - (가로 A)이고, (가로 A)가 제곱수이므로,
(세로 D)와 1000 - (세로 D) 모두 세 자리의 제곱수입니다. ---------------------- (*)
(세로 D)가 (가로 I)의 제곱인데, 두 수의 일의 자릿수가 같습니다. 일의 자릿수가 a로 같다고 하면, $a^2 \equiv a \pmod{10}$에서, a는 1, 5, 6, 0 뿐이 가능함을 알 수 있습니다.

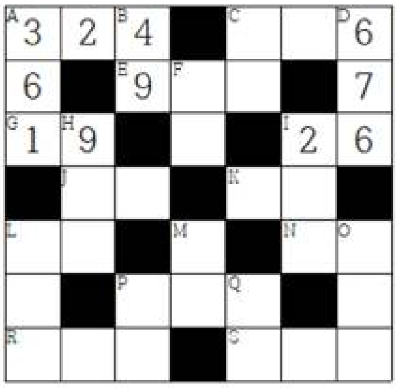
(case 1) (가로 I)의 일의 자리수가 1인 경우
((가로 I) , (세로 D))로 가능한 순서쌍은 (11, 121), (21, 441), (31, 961)입니다.
(*)에서, 1000-121=879, 1000-441=559, 1000-961=39 모두 제곱수가 아니므로 모순입니다.

(case 2) (가로 I)의 일의 자리수가 5인 경우
((가로 I), (세로 D))로 가능한 순서쌍은 (15, 225), (25, 625)입니다.
(*)에서, 1000-225=775, 1000-625=375 모두 제곱수가 아니므로 모순입니다.

(case 3) (가로 I)의 일의 자리수가 0인 경우
((가로 I), (세로 D))로 가능한 순서쌍은 (10, 100), (20, 400), (30, 900)입니다.
(*)에서, 1000-100=900, 1000-400=600, 1000-900=100 중 900과 100이 제곱수이므로,
(가로 A)로 가능한 값은 100 또는 900입니다. 그런데 두 경우 모두 (세로 B)의 첫 자리수가 0이 되어 모순입니다.

(case 4) (가로 I)의 일의 자리수가 6인 경우
((가로 I), (세로 D))로 가능한 순서쌍은 (16, 256), (26, 676)입니다.
(*)에서, 1000-256=744, 1000-676=324 중 제곱수는 324 뿐이므로, (가로 I) = 26, (세로 D) = 676이 가능합니다.

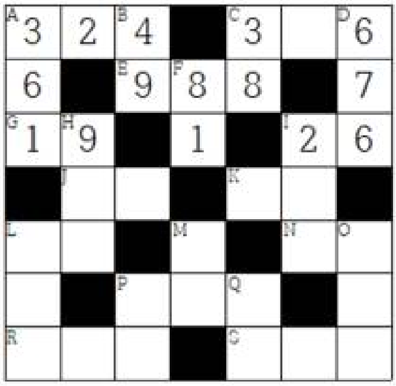
case 1, case 2, case 3, case 4에서, (가로 I) = 26, (세로 D) = 676인 경우만 가능합니다.
또한, (*)에 의해, (가로 A) = 1000-676=324임을 얻을 수 있습니다.
(세로 B)가 제곱수인데 십의 자리수가 4이므로, (세로 B) = 49가 됩니다.
또한, (세로 A)가 (가로 G)의 제곱이고, (세로 A)의 백의 자리수가 3이므로, (가로 G)= x이면, $300 \le x^2 < 400$, $18 \le x < 20$이 되어 x의 십의 자리수는 1입니다. (세로 A)의 일의 자리수가 1이 되므로, $x = 19$ 뿐이 가능합니다. 즉 (가로 G) = 19, (세로 A) = 361를 얻습니다.



(가로 E)의 조건에서, (가로 E)=(세로 C)*(가로 I)입니다.
(가로 E)는 백의 자리수가 9인 세 자리 수이고,
(가로 I) = 26의 배수이므로,
(가로 E)는 910, 936, 962, 988이 가능합니다.
따라서 ((가로 E), (세로 C))로 가능한 순서쌍은
(910, 35), (936, 36), (962, 37), (988, 38) 뿐입니다.
(가로 E)와 (세로 C)의 일의 자리수가 같아야 하므로,
(936, 36)과 (988, 38) 뿐이 가능하고,
(세로 C)의 조건에서 (세로 C)는 제곱수가 아니므로,
(가로 E) = 988, (세로 C) = 38인 경우만이 가능합니다.

또한, (세로 F)가 거듭제곱수여야 하고, F의 십의 자릿수가 8임을 알고 있으므로,
(세로 F) = 81입니다.

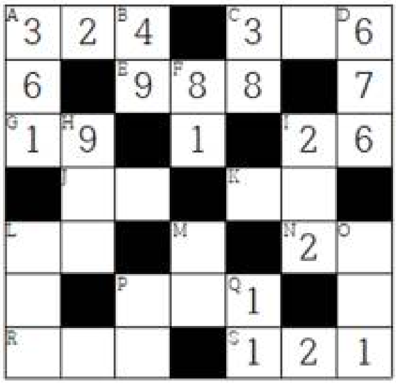
(세로 P) = 61입니다.



(세로 I)가 (가로 P)의 배수라는 조건이 있는데,
(세로 I)와 (가로 P) 모두 세 자리 수이며,
(세로 I)의 백의 자리 숫자가 2이므로,
(세로 I)는 (가로 P)의 정확히 2배입니다. ---------- (**)
(3배 이상이면, (가로 P)의 값이 100 미만이어 모순이고,
(세로 I)와 (가로 P)의 값이 달라야 하므로 성립)

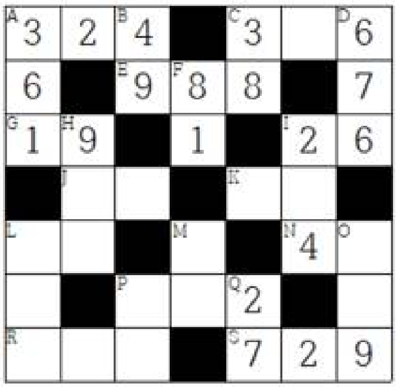
이제 (세로 Q)의 제곱이 (가로 S)라는 조건에서, (세로 Q)= y라 하면,
$100 \le y^2 < 1000$, $10 \le y \le 31$입니다. y의 일의 자리수와 y^2의 백의 자리수가 같은 경우는 $y = 11, 26, 27$ 뿐입니다. 이 중 $y = 26$인 경우는 (세로 Q) = (가로 I)가 되어 모순입니다.

만일 $y = 11$이라면, (세로 Q) = 11, (가로 S) = 121이고,
(**)에 의해 (가로 N)의 십의 자리수는 2입니다. (∵ (가로 P)의 일의 자리수가 1)

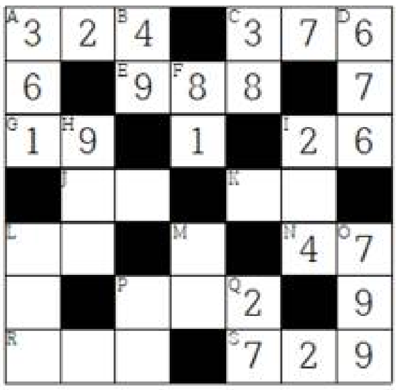


(세로 O)가 (가로 N)의 배수이고, (세로 O)가 홀수이므로,
(가로 N)도 홀수입니다.
(가로 C)의 조건에서, (가로 N)은 (가로 C)의 약수입니다.
그런데 306, 316, 326, ⋯, 396의 약수 중 십의 자리가 2인 것은 21 뿐임을 계산을 통해 확인할 수 있습니다.
따라서, (가로 N) = 21입니다.
(세로 O)가 (가로 N) = 21의 배수이고, 백의 자리수와 일의 자리수가 모두 1인데, 그러한 세 자리수는 존재하지 않으므로 모순입니다.
따라서 $y \ne 11$입니다.

그러므로, $y = 27$임을 알 수 있고, (세로 Q) = 27, (가로 S) = 729입니다.
또, (**)에 의해 (가로 N)의 십의 자리수가 4임도 얻습니다.



(가로 C)의 조건에서, (가로 N)은 (가로 C)의 약수입니다.
그런데 306, 316, 326, ⋯, 396의 약수 중 십의 자리가 4인 것이 47 뿐임을 계산을 통해 확인할 수 있습니다.
따라서 (가로 N) = 47이고, (가로 C) = 376입니다.
조건에서 (세로 O)는 (가로 N) = 47의 배수이고,
47의 배수이며 백의 자릿수가 7이고 일의 자릿수가 9인 세 자리수는 799 뿐이므로 (세로 O) = 799입니다.



(세로 H)의 조건에서, (세로 H) = 47 * (가로 L)입니다.
47의 배수이고 백의 자릿수가 9인 세 자리수는
940, 987 뿐인데, (세로 H)가 987이라면 (가로 L)이 21이 되어 모순입니다. ((세로 H)의 일의 자릿수와 (가로 L)의 일의 자릿수가 다르기 때문)
따라서, (세로 H) = 940이고, (가로 L) = 20입니다.

A 3	2	B 4	■	C 3	7	D 6
6	■	E 9	F 8	8	■	7
G 1	H 9	■	1	■	I 2	6
■	J 4		■	K		■
L 2	0	■	M	■	N 4	O 7
	■	P		Q 2	■	9
R			■	S 7	2	9

(세로 L)의 조건에서, (세로 L) = 27 * (세로 P)입니다.
(세로 L)의 값이 300 미만이므로, (세로 P)의 값은 12 미만임을 얻습니다.
만일 (세로 P)의 값이 10이라면, (세로 L)이 270이 되고, (가로 R)의 백의 자릿수가 0이 되어 모순입니다.
따라서, (세로 P) = 11이고, (세로 L) = 297입니다.
또, (가로 R)의 조건에서, (가로 R)은 (세로 P) = 11의 배수이고, 백의 자릿수가 7, 일의 자릿수가 1이므로, (가로 R) = 781입니다.

A 3	2	B 4	■	C 3	7	D 6
6	■	E 9	F 8	8	■	7
G 1	H 9	■	1	■	I 2	6
■	J 4		■	K		■
L 2	0	■	M	■	N 4	O 7
9	■	P 1		Q 2	■	9
R 7	8	1	■	S 7	2	9

이제, 거의 끝났습니다!
(세로 M)의 일의 자릿수를 m,
(세로 K)의 일의 자릿수를 k,
(세로 J)의 일의 자릿수를 j라 합시다.

(가로 J)의 조건에서, (가로 J) * (가로 K)는 81의 배수입니다. 만일 (가로 J)가 3의 배수가 아니라면, (가로 K)가 81의 배수가 되어야 하므로 (가로 K) = 81이 됩니다. 그런데 (세로 F) = 81이므로 수가 겹치면 안 된다는 문제의 조건에 모순입니다. 따라서 (가로 J)는 3의 배수입니다. 즉, (가로 J) = $40+j$가 3의 배수이고, $j=2$ 또는 $j=5$ 또는 $j=8$입니다.

(**)에서, (세로 I)가 (가로 P)의 두 배이므로, $204+10k=2(102+10m)$, $k=2m$입니다.
다시 (가로 J)의 조건을 mod10으로 보면, $m \equiv kj \equiv 2mj \pmod{10}$입니다.

만일 $j=2$ 또는 $j=5$이라면, 각 경우에 대해 $3m \equiv 0 \pmod{10}$, $9m \equiv 0 \pmod{10}$이므로, $m \equiv 0 \pmod{10}$, 즉 $m=0$을 얻습니다.
그런데 (세로 M)의 조건에서 (세로 M)은 거듭제곱수이고, 일의 자릿수가 0이고 거듭제곱수인 두 자리 수는 존재하지 않으므로 모순입니다.

따라서 $j=8$입니다.

A 3	2	B 4	■	C 3	7	D 6
6	■	E 9	F 8	8	■	7
G 1	H 9	■	1	■	I 2	6
■	J 4	8	■	K		■
L 2	0	■	M	■	N 4	O 7
9	■	P 1		Q 2	■	9
R 7	8	1	■	S 7	2	9

다시 (가로 J)의 조건을 써보면,
81 * (세로 M) = 48 * (가로 K)가 됩니다.
양변의 3의 지수를 확인해보면 (가로 K)는 27의 배수여야 함을 알 수 있습니다.
그런데 (세로 Q) = 27, (세로 F) = 81이므로, 수들이 겹치면 안 된다는 문제의 조건에 의해 (가로 K) = 54여야 함을 얻습니다.
(가로 J)의 조건에서, 81 * (세로 M) = 48 * 54
따라서, (세로 M) = 32이고, 이는 (세로 M)의 조건, 즉 (세로 M)이 거듭제곱수라는 조건도 만족합니다.

A 3	2	B 4	■	C 3	7	D 6
6	■	E 9	F 8	8	■	7
G 1	H 9	■	1	■	I 2	6
■	J 4	8	■	K 5	4	■
L 2	0	■	M 3	■	N 4	O 7

9		P 1	2	Q 2		9
R 7	8	1		S 7	2	9

위처럼 수를 채워 넣으면 문제의 조건들을 모두 만족함을 어렵지 않게 확인할 수 있습니다.

따라서, 가능한 십자수풀이의 해는 앞에서 구한 것으로 유일하게 존재합니다.