

퍼즐

[5월의 퍼즐 해설] 옛듣고 푸는 복면산

2019년 6월 3일

박부성



5월의 퍼즐에 참여해주신 모든 분들께 감사드립니다!

5월의 퍼즐에 참여해주신 분 중 정답과 함께 좋은 풀이를 보내주신 **이광현**님께
HORIZON에서 준비한 선물을 전달드릴 예정입니다.

[5월의 퍼즐 문제 보러가기](#)

이번 호 문제는 미국의 수학 단체인 Pi Mu Epsilon의 저널 3권 10호인 1964년 봄호에 게재된 시드니 크래비츠 Sidney Kravitz의 문제를 조금 변형한 것이다.

두 자릿수를 제공한 결과가 네 자릿수이므로, 두 자릿수는 32보다는 크거나 같아야 한다. 만약 두 자릿수가 32였다면 $32^2 = 1024$ 이므로 이것은 복면산 $AB^2 = CDBE$ 의 답이라고 할 수 있다. 그런데 이 복면산의 답은 유일하지 않아서, $82^2 = 6724$ 도 같은 복면산의 답이 된다.

이런 식으로 두 자리 수를 제공한 결과가 네 자릿수가 되는 경우를 복면산으로 나타내어 보면 다음과 같이 32가지 경우가 가능하다.

$$1. AA^2 = ABCD : 99^2 = 9801$$

$$2. AA^2 = BBCC : 88^2 = 7744$$

$$3. AA^2 = BCDA : 55^2 = 3025, 66^2 = 4356$$

$$4. AA^2 = BCDC : 77^2 = 5929$$

$$5. AA^2 = BCDE : 33^2 = 1089, 44^2 = 1936$$

$$6. AB^2 = ACDA : 97^2 = 9409$$

$$7. AB^2 = ACDB : 95^2 = 9025, 96^2 = 9216$$

$$8. AB^2 = ACDE : 98^2 = 9604$$

$$9. AB^2 = BCAC : 63^2 = 3969$$

$$10. AB^2 = BCDA : 64^2 = 4096$$

$$11. AB^2 = BCDB : 41^2 = 1681, 75^2 = 5625$$

$$12. AB^2 = BCDE : 52^2 = 2704, 87^2 = 7569$$

$$13. AB^2 = CAAB : 76^2 = 5776$$

$$14. AB^2 = CAAD : 83^2 = 6889$$

$$15. AB^2 = CABB : 50^2 = 2500, 60^2 = 3600$$

$$16. AB^2 = CADC : 68^2 = 4624$$

$$17. AB^2 = CADE : 37^2 = 1369, 49^2 = 2401$$

$$18. AB^2 = CBAD : 74^2 = 5476$$

$$19. AB^2 = CBDE : 73^2 = 5329, 89^2 = 7921$$

$$20. AB^2 = CCDE :$$

$$34^2 = 1156, 47^2 = 2209, 58^2 = 3364, 67^2 = 4489, 94^2 = 8836$$

$$21. AB^2 = CDAE : 43^2 = 1849, 69^2 = 4761$$

$$22. AB^2 = CDBB : 40^2 = 1600, 70^2 = 4900, 80^2 = 6400, 90^2 = 8100$$

$$23. AB^2 = CDBE : 32^2 = 1024, 78^2 = 6084, 82^2 = 6724$$

$$24. AB^2 = CDCB : 45^2 = 2025, 56^2 = 3136, 81^2 = 6561, 91^2 = 8281$$

$$25. AB^2 = CDDB : 35^2 = 1225, 46^2 = 2116, 65^2 = 4225, 85^2 = 7225$$

$$26. AB^2 = CDDD : 38^2 = 1444$$

$$27. AB^2 = CDEA : 42^2 = 1764, 48^2 = 2304, 93^2 = 8649$$

$$28. AB^2 = CDEB :$$

$$36^2 = 1296, 51^2 = 2601, 61^2 = 3721, 71^2 = 5041, 86^2 = 7396$$

$$29. AB^2 = CDEC : 39^2 = 1521$$

$$30. AB^2 = CDED : 92^2 = 8464$$

$$31. AB^2 = CDEE : 62^2 = 3844$$

$$32. AB^2 = CDEF :$$

$$53^2 = 2809, 54^2 = 2916, 57^2 = 3249, 59^2 = 3481, 72^2 = 5184,$$

$$79^2 = 6241, 84^2 = 7056$$

문제에서 처음에 이 복면산의 답이 유일하지 않다고 하였으므로 첫 번째 경우인 $99^2 = 9801$ 처럼 답이 유일한 복면산은 제외할 수 있다. 그리고 홀짝을 알면 답이 유일하게 결정된다고 하였으므로, 하나의 복면산에 대한 답이 하나만 홀짝이 다르고 나머지는 홀짝이 모두 같은 경우를 찾아야 한다. 예를 들어, 24번째 경우인 $AB^2 = CDCB$ 의 답은 한 경우만 짝수고 나머지 세 경우는 홀수이다.

이런 조건을 만족하는 경우를 찾아보면 다음 세 가지가 가능하다.

24. $AB^2 = CDCB : 45^2 = 2025, 56^2 = 3136, 81^2 = 6561, 91^2 = 8281$

25. $AB^2 = CDDB : 35^2 = 1225, 46^2 = 2116, 65^2 = 4225, 85^2 = 7225$

27. $AB^2 = CDEA : 42^2 = 1764, 48^2 = 2304, 93^2 = 8649$

원래의 복면산 문제가 24번과 같은 $AB^2 = CDCB$ 였다면, 문제에서 짝수라는 조건이 있어서 복면산 문제를 풀던 두 사람은 $56^2 = 3136$ 을 알아낼 수 있다. 한편 원래의 복면산 문제가 25번과 같은 $AB^2 = CDDB$ 였다면, 이번에도 문제에서 짝수라는 조건이 있어서 복면산 문제를 풀던 두 사람은 $46^2 = 2116$ 을 알아낼 수 있다.

그렇지만 문제를 옆에서 듣기만 한 “나”는 짝수라는 조건을 들었다고 해도 복면산 문제가 24번의 $AB^2 = CDCB$ 인지 25번의 $AB^2 = CDDB$ 인지 알 수가 없다.

따라서 홀짝 조건을 듣고 복면산 문제를 하나로 결정할 수 있는 것은 27번인 $AB^2 = CDEA$ 뿐이며, 이 경우 홀수라는 조건이 주어졌음을 알 수 있고, 복면산의 답은 $93^2 = 8649$ 이다.

문제에서 두 자릿수를 제공한 결과가 네 자릿수인 복면산을 풀고 있다고 하였는데, 실은 두 자릿수를 제공한 결과가 네 자릿수라는 제한이 없어도, 즉 두 자릿수를 제공한 결과가 세 자릿수인 경우까지 고려해도 답은 똑같다. 다만 문제를 푸는 과정에서 번거로울까봐 네 자릿수로 제한하였다.

다음은 5월의 정답자로 선정된 **이광현**님의 해설입니다.

2자리 수를 제공하여 4자리가 되는 경우는 32 ~ 99 까지 총 68가지 경우만 확인하면 됩니다.

본문의 대화를 바탕으로 하면,

1. 해당 복면산은 답이 최소 3개 이상이어야 합니다.
2. 해당 복면산은 홀수인 답과 짝수인 답이 둘다 존재해야 합니다.
3. 홀/짝 둘중 한가지는 답이 1개뿐이고, 나머지는 답이 2개 이상이어야 합니다.

이에 해당하는 복면산은 총 3개가 답이 됩니다.

$XY^2 = ABCX$: $42^2 = 1764$, $48^2 = 2304$, $93^2 = 8649$ (홀수가 정답인 경우)

$XY^2 = ABAY$: $45^2 = 2025$, $56^2 = 3136$, $81^2 = 6561$, $91^2 = 8281$ (짝수가 정답인 경우)

$XY^2 = ABBY$: $35^2 = 1225$, $46^2 = 2116$, $65^2 = 4225$, $85^2 = 7225$ (짝수가 정답인 경우)

답이 3개인건지 해석을 잘못된 것인지 모르겠는데, 마지막 B의 말을 메타언어처럼 해석하면.

$XY^2 = ABCX$ 가 문제이고 $93^2 = 8649$ 가 답인 것으로 보입니다.