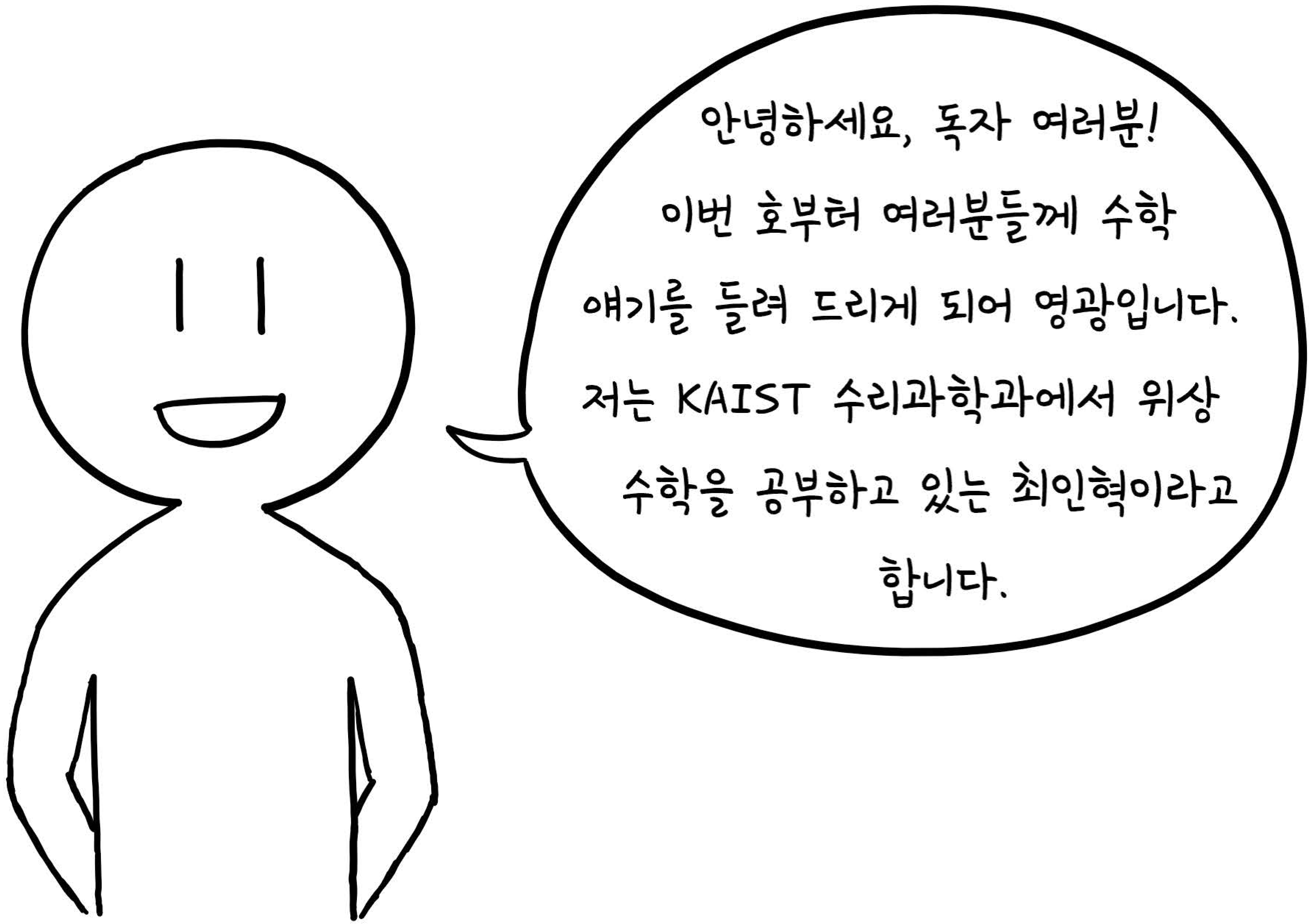
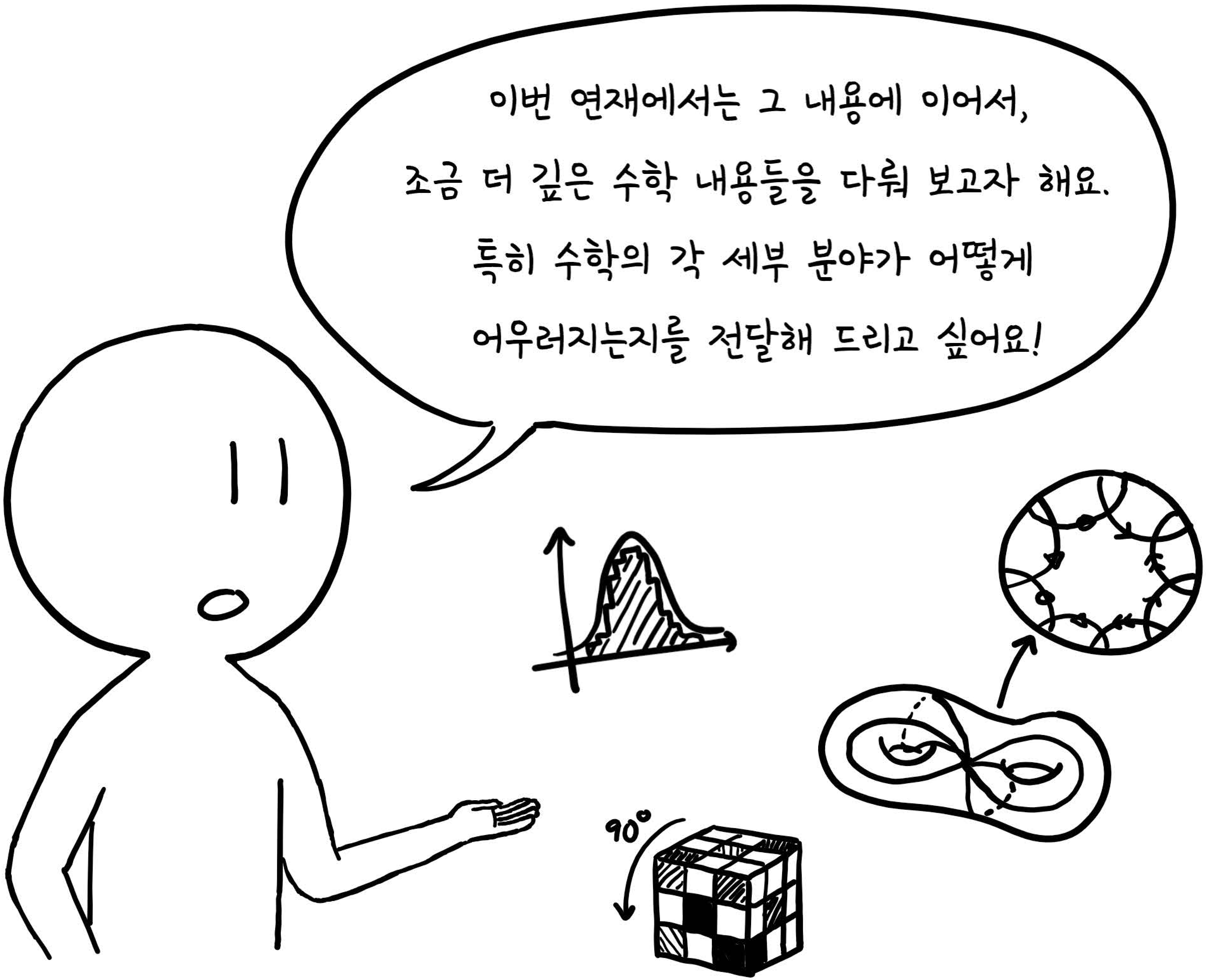

해석학하는 만화 1
- 두 번 미분하기 -

해석학하는 만화 1

<두 번 미분하기>


안녕하세요, 독자 여러분!
이번 호부터 여러분들께 수학
얘기를 들려 드리게 되어 영광입니다.
저는 KAIST 수리과학과에서 위상
수학을 공부하고 있는 최인혁이라고
합니다.

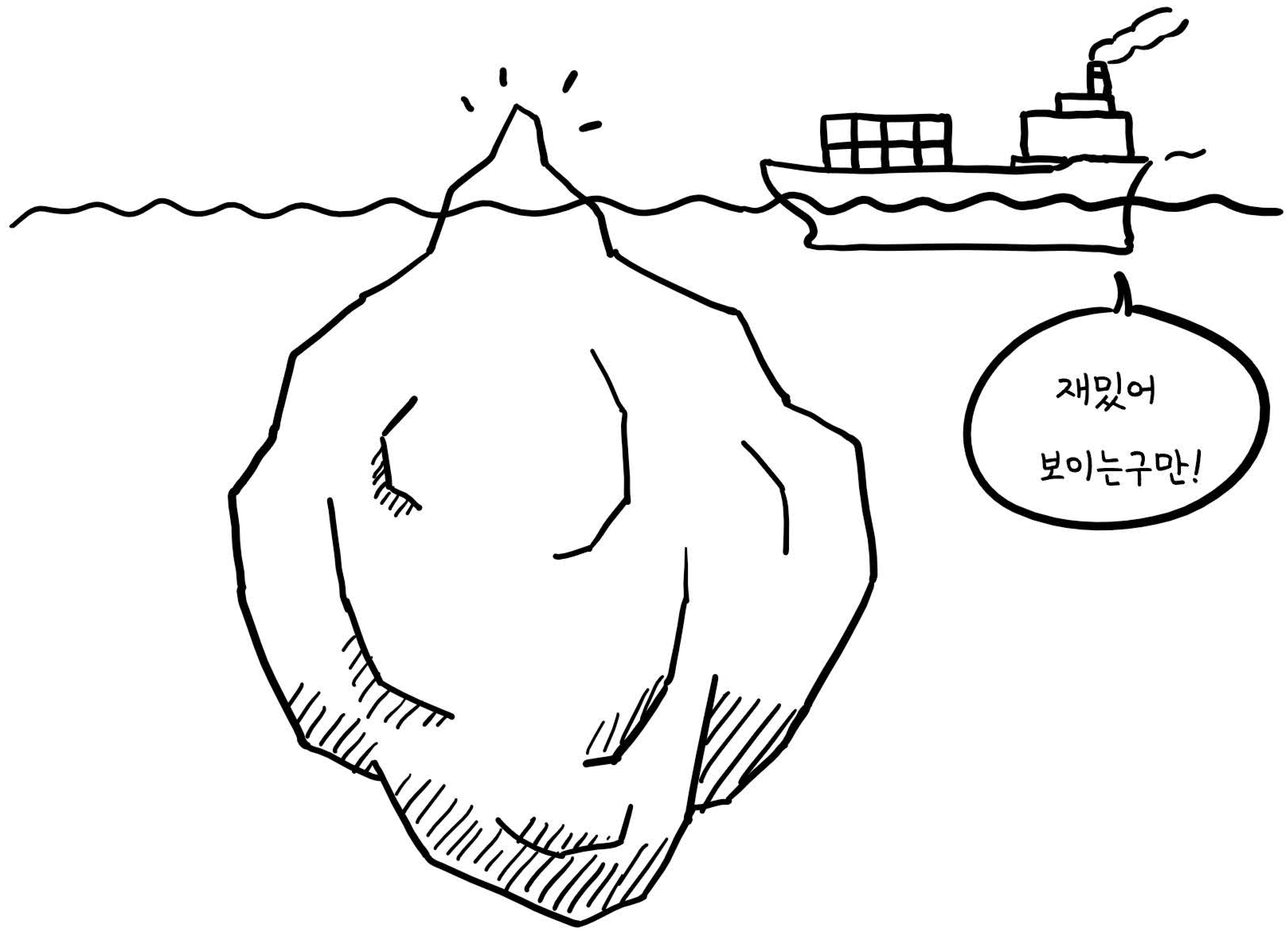
* https://www.facebook.com/mathcartooon/


이번 연재에서는 그 내용에 이어서,
조금 더 깊은 수학 내용들을 다뤄 보고자 해요.
특히 수학의 각 세부 분야가 어떻게
어우러지는지를 전달해 드리고 싶어요!
90°

여기서, 제 이야기를 들을 때 고려해 주셨으면 하는 점이 있어요.

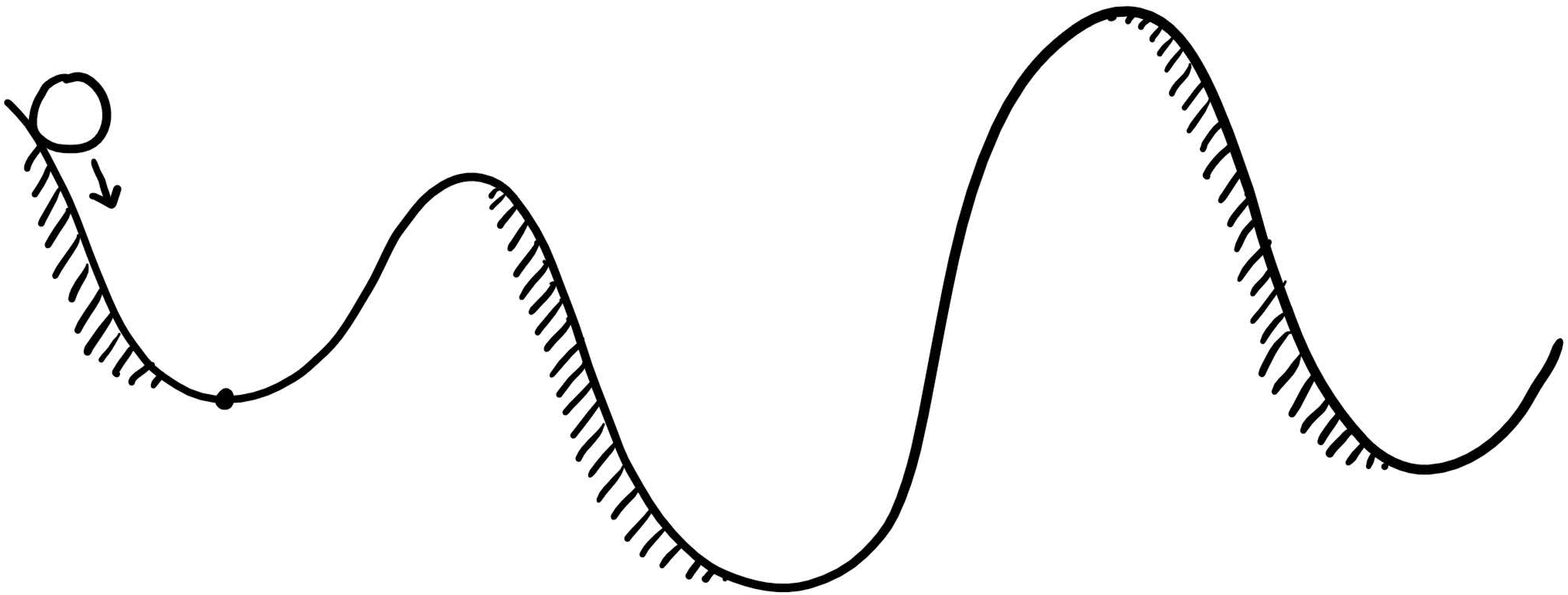
그렇기에, 이 만화가 전체 수학을 개괄한다기보다는, 흥미로운 주제와 이야깃거리를 소개한다고 봐 주시면 감사하겠습니다!

제 이야기는 빙산의 일각에 불과할 거고, 더 재미있는(?) 부분들이 수학에는 숨어 있으니 같이 공부해 보면 좋을 것 같아요!



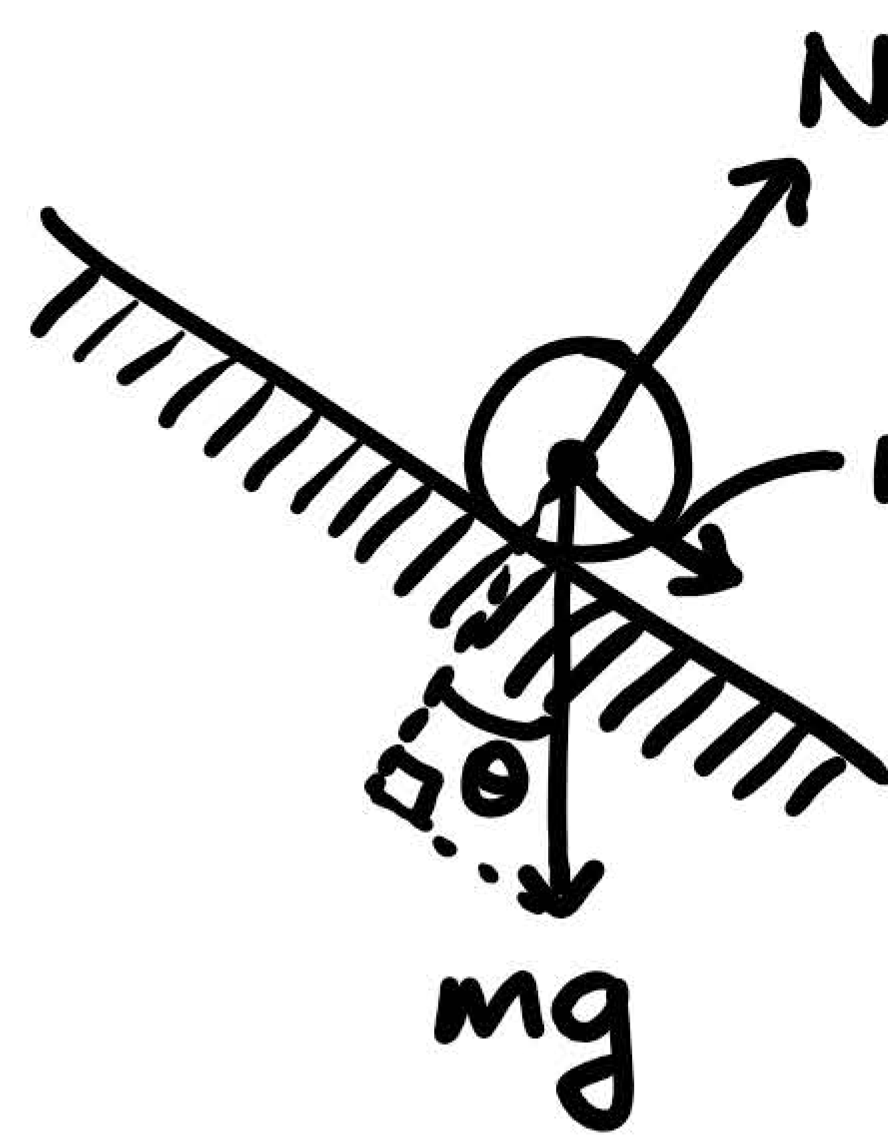
그러면, 이제 이야기를 시작해 보겠습니다.

우리 얘기는 곡선 위에서 미끄러지는 공 하나로 시작합니다.



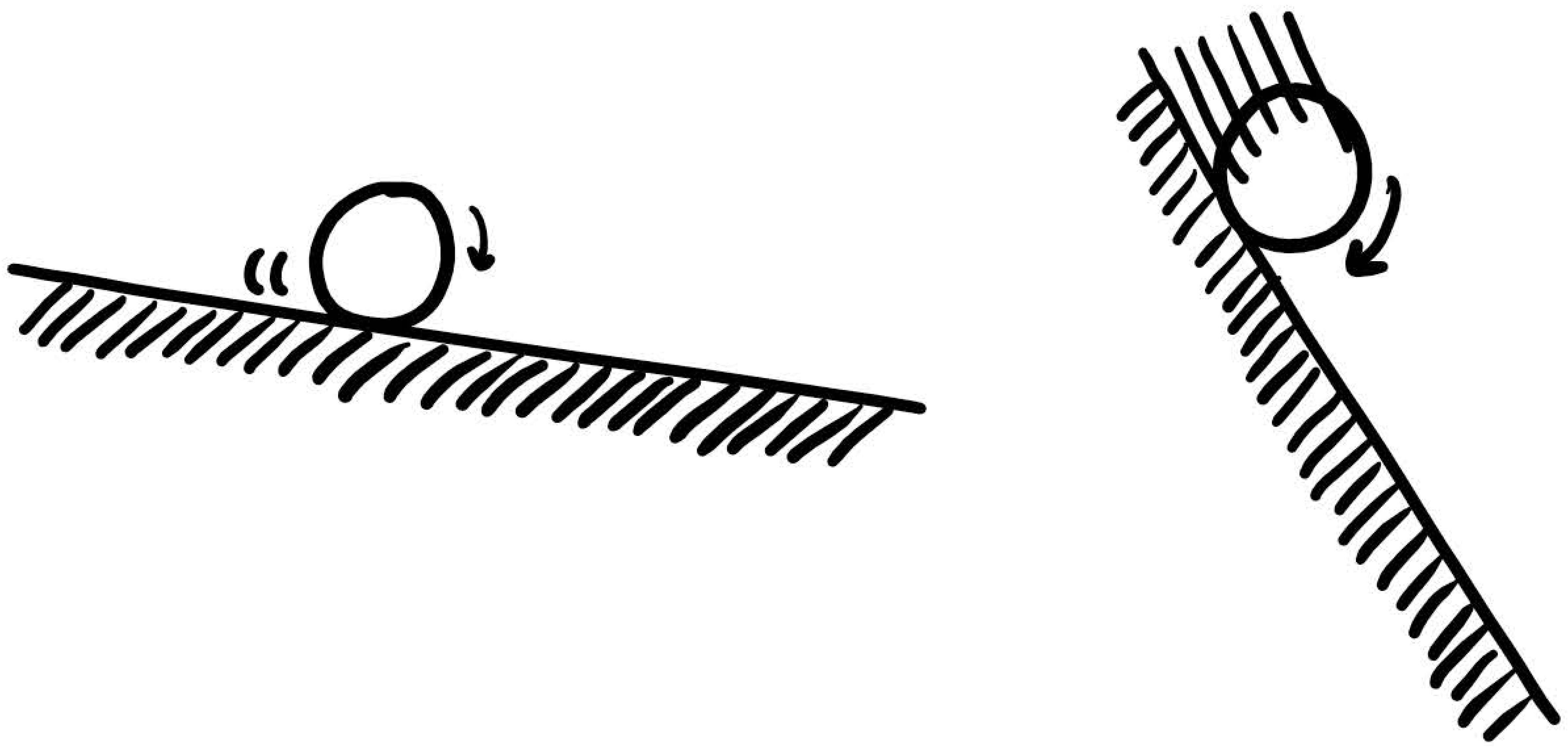
이 공의 움직임을 기술하는 방정식은 무엇일까요?

뉴턴의 운동방정식 $\boxed{F = ma}$ 와,



$mg\sin\theta$ 를 기억해 보면...

$\ddot{x}(t) = g\sin\theta$ 와 같은 운동방정식이 나오네요.



이건 일상적인 경험에 비추어 보아도 맞는 것 같아요.

경사가 완만한 곳에서는 가속이 덜 되지만, 경사가 급한 곳에서는 빠르게 가속되니까요.

그리고, 만약 미끄러지는 곡선의 방정식이

$$y = f(x)$$

이었다면,

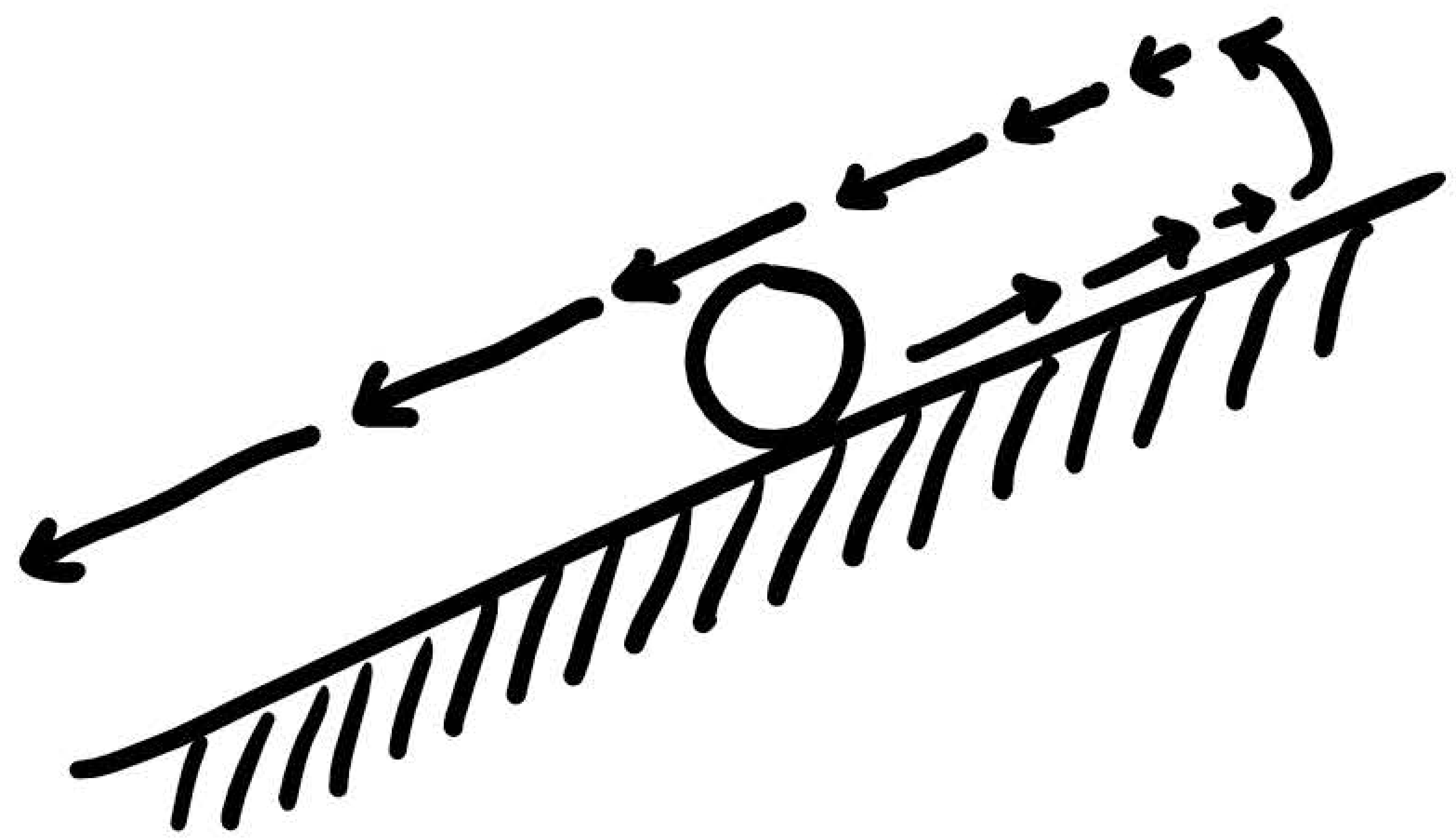
f에 대한 식으로 $\sin\theta$를 표현해서

$$\ddot{x}(t) = -\frac{g \cdot f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

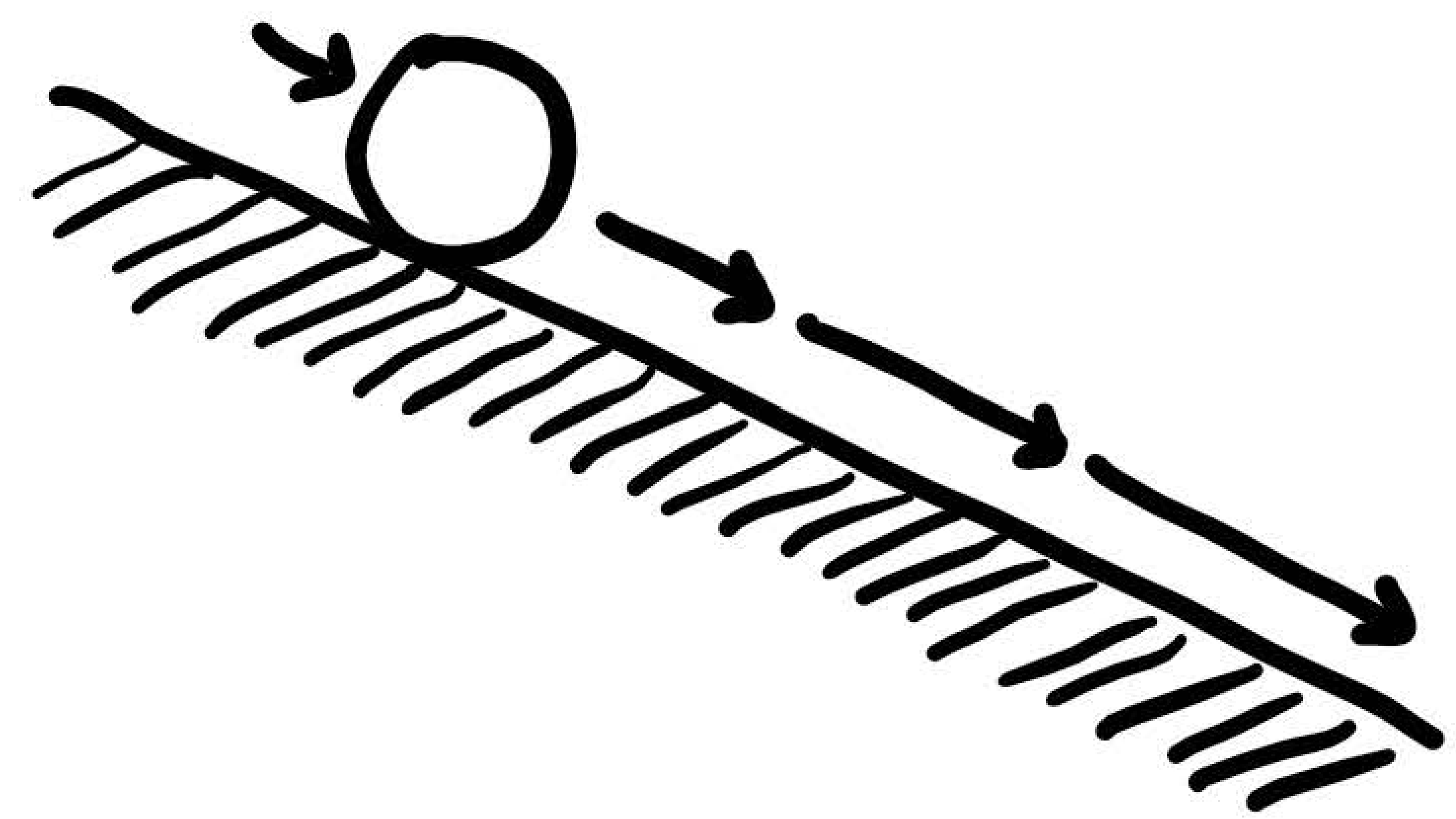
라고 할 수 있겠네요.

이 방정식을 엄밀하게 풀지 않고 잠깐 쳐다보는 것만으로도
많은 정보를 얻을 수 있어요.

예를 들어, 기울기가 0이 아닌 지점 근처를 공이 지날 때 움직임을 살펴 보면,



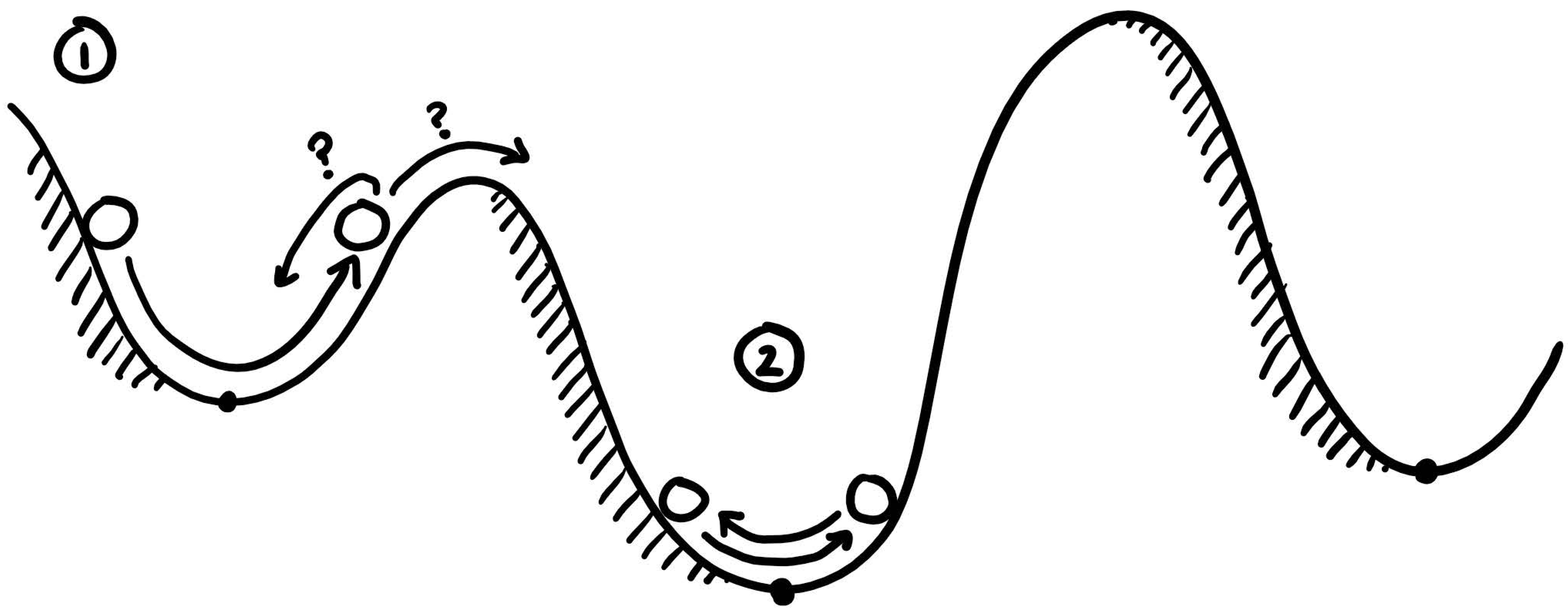
경사 때문에 왔던 길을
되돌아 가거나,



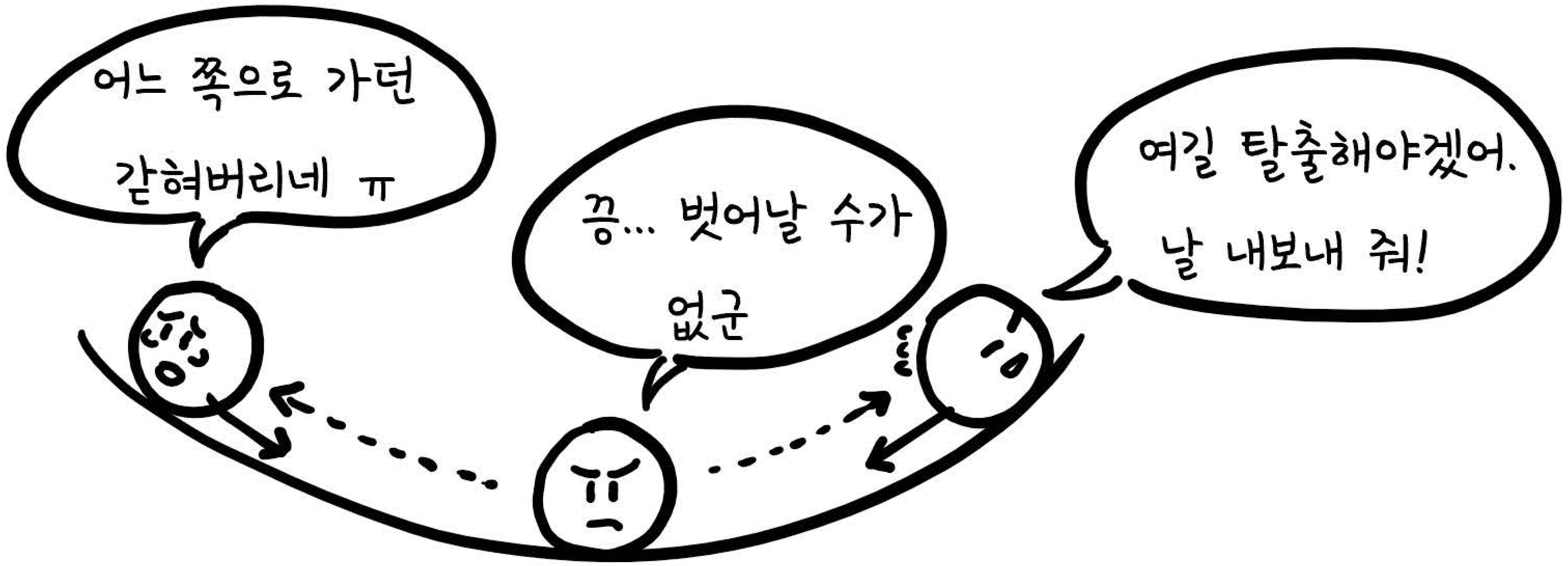
혹은 가속을 받아 그대로
지나쳐 버리겠죠.

어느 경우이던 간에, 공이 그 자리 근처만을 맴도는 경우는 없어요. 다시 말해,
이때 공의 움직임은 해당 지점에서의 f의 정보만을 가지고는 분석할 수 없어요.

즉 아래 그림에서 1번과 같은 경우죠. 공이 다시 돌아올지 말지, 돌아온다면 언제쯤 돌아오는지 등이 그 지점에서의 정보만으로 결정되지 않아요.



그와 반대로, 2번과 같은 '골짜기'에서는 (공의 에너지가 어느 정도 작다면) 그 주변만 맴돌 거니까, 골짜기 지점에서의 f에 대한 정보만 가지고도 운동을 분석할 수 있을 것 같아요.



이런 골짜기는

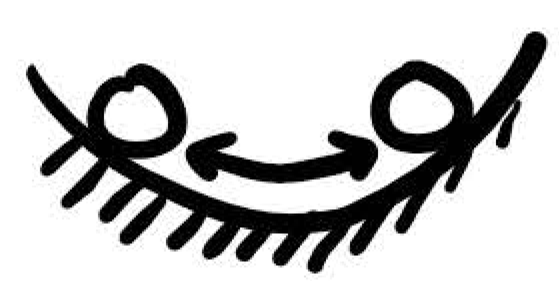
(1) 중심 지점이 기울어져 있으면 안 되고,

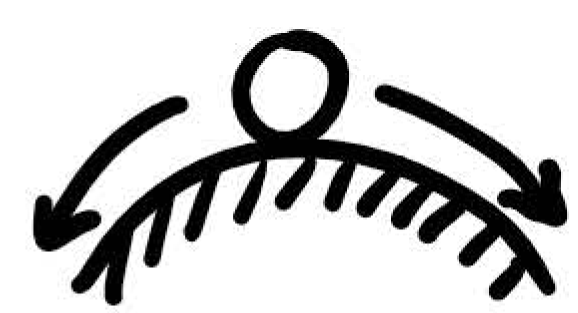
(2) 주변은 중심 지점을 향하게끔 기울어져 있어야 하겠죠.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \cancel{a_1}^{0} + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

① $a_2 > 0$ 

② $a_2 < 0$ 

편의상 골짜기 지점이 $x=0$에 해당한다고 두고 생각해 보면,

(1) $f'(0) = 0$

(2) $f''(0) > 0$

이어야 한다는 것을 알 수 있죠.

이때, 진폭이 많이 크지만 않다면 원래 방정식을 조금 더 간단하게 만들 수 있어요.

$$\ddot{x}(t) + gf''(0)\,x(t) = 0 \quad (f''(0) > 0)$$

과 같이 말이죠.

$$\Updownarrow$$

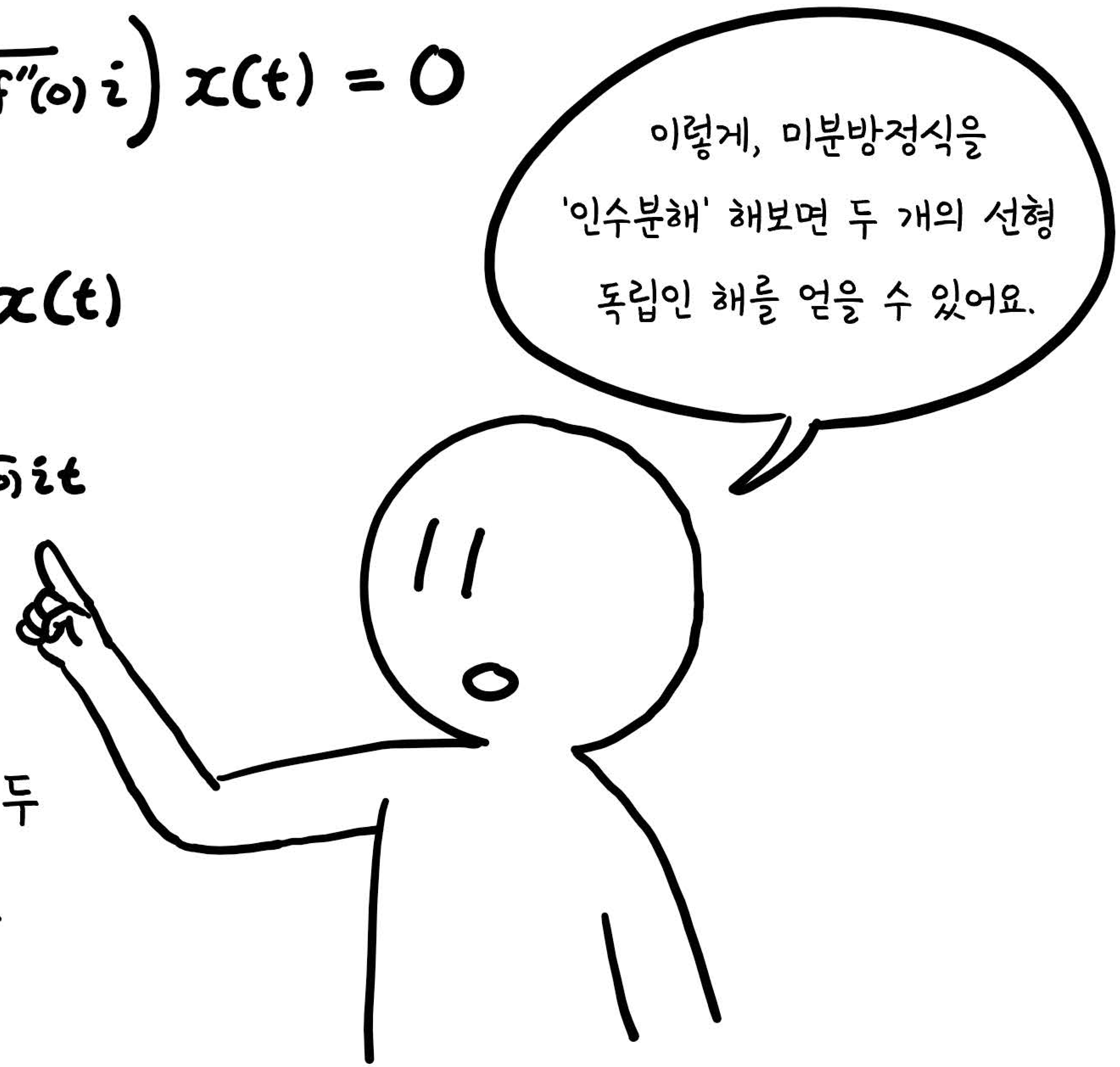
$$\left(\frac{d}{dt} \pm \sqrt{gf''(0)}\,i\right)\left(\frac{d}{dt} \mp \sqrt{gf''(0)}\,i\right)x(t) = 0$$

$$\Uparrow$$

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{gf''(0)}\,i\,x(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = e^{\pm\sqrt{gf''(0)}\,it}$$



반대로, 저 방정식의 모든 해들은 이 두 해의 선형결합으로 나타낼 수 있어요.

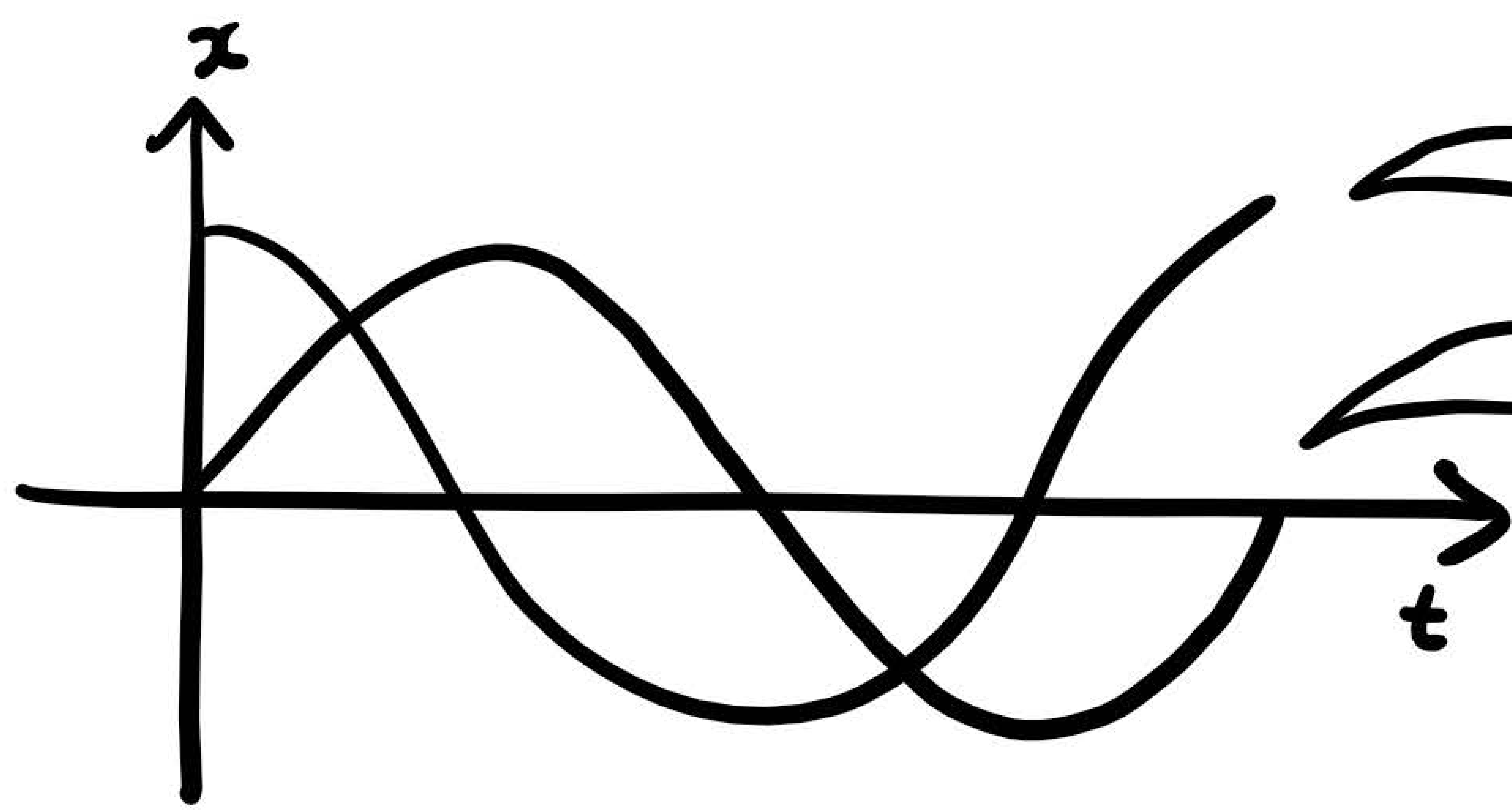
음 그런데, 우리가 알고 싶은 건 시간에 따른 물체의 위치이니,

저런 복소함수가 등장하는 건 조금 불편할 수 있어요. 그럴 땐,

$$\cos\sqrt{C}t = \frac{e^{i\sqrt{C}t} + e^{-i\sqrt{C}t}}{2}$$

$$\sin\sqrt{C}t = \frac{e^{i\sqrt{C}t} - e^{-i\sqrt{C}t}}{2i}$$

이렇게 두 복소함수해를 잘 결합해서 실수 범위에서만 놀도록 만든 사인함수와 코사인함수를 생각하면 돼요.



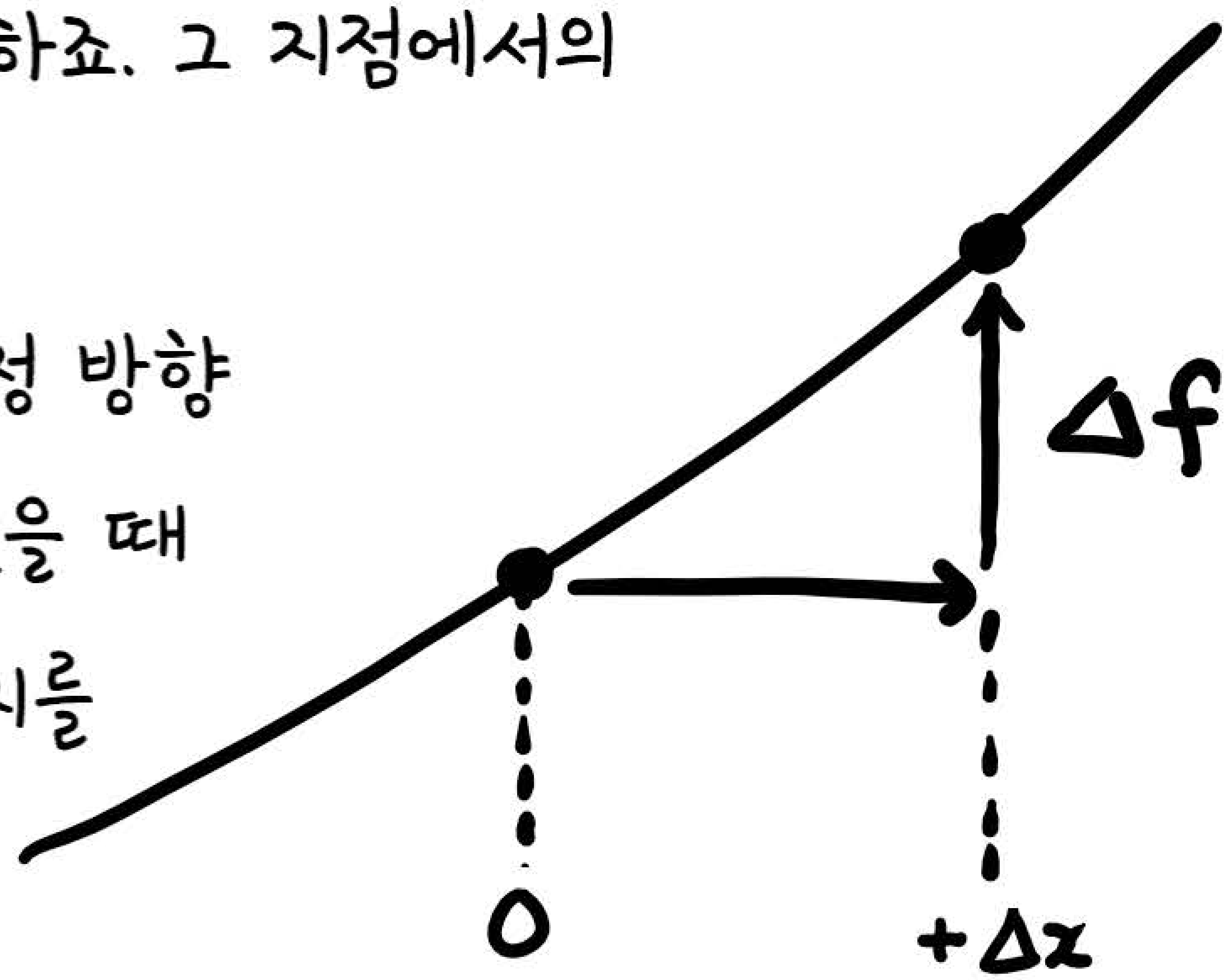
아니면 복소지수함수를 사용하지 않고도, 우리가 해집합의 기저가 된다는 걸 증명할 수도 있어요!

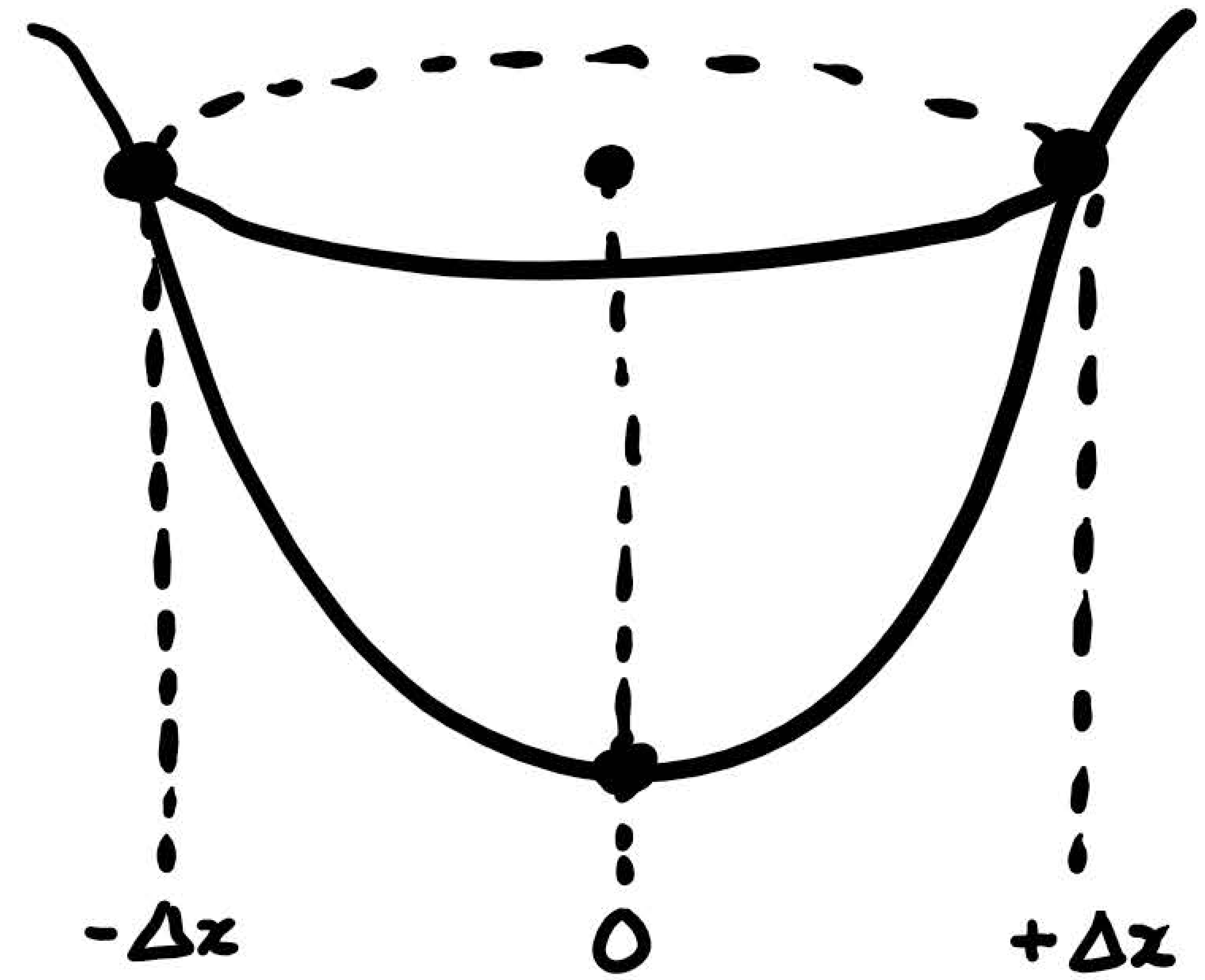
이 증명은 여기서는 생략하겠습니다...!

방금 상황에서 삼각함수 해가 등장한 이유는 바로 시간에 대한 이계도함수 항이 있어서였죠.

하지만, 위치에 대한 이계도함수 항도 나름대로 의미가 있답니다.

f의 '미분'의 의미는 명쾌하죠. 그 지점에서의 기울기를 말하는 거예요.
더 풀어서 말해 보면, 특정 방향 (오른쪽 방향)으로 걸어갔을 때 함숫값이 얼마나 변했는지를 보여주네요.

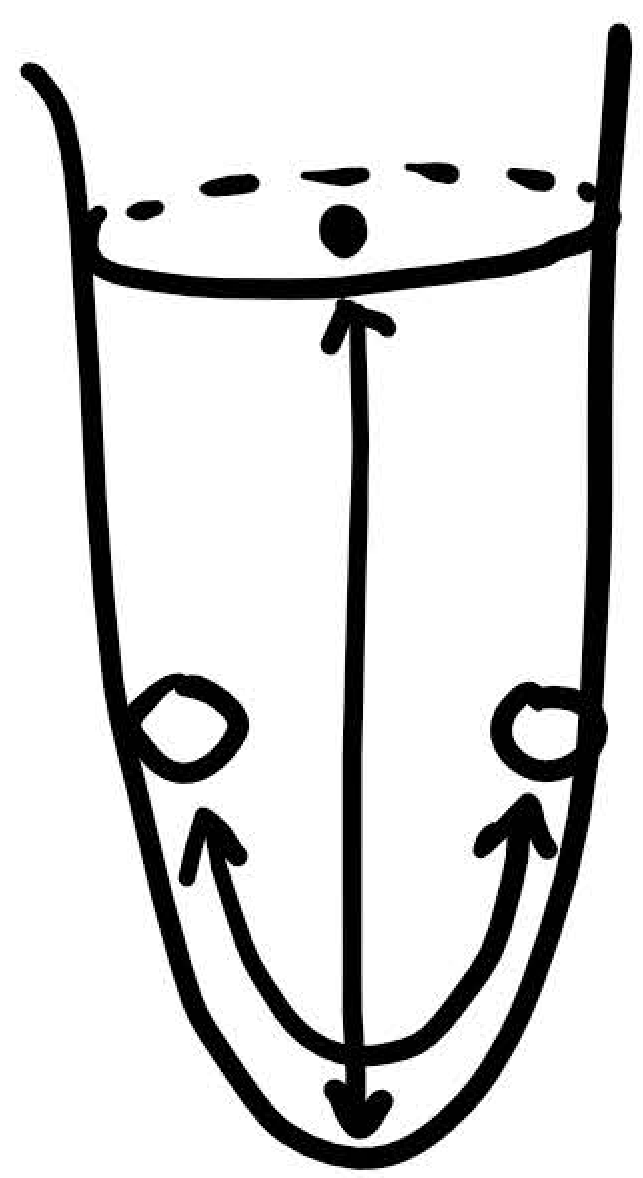


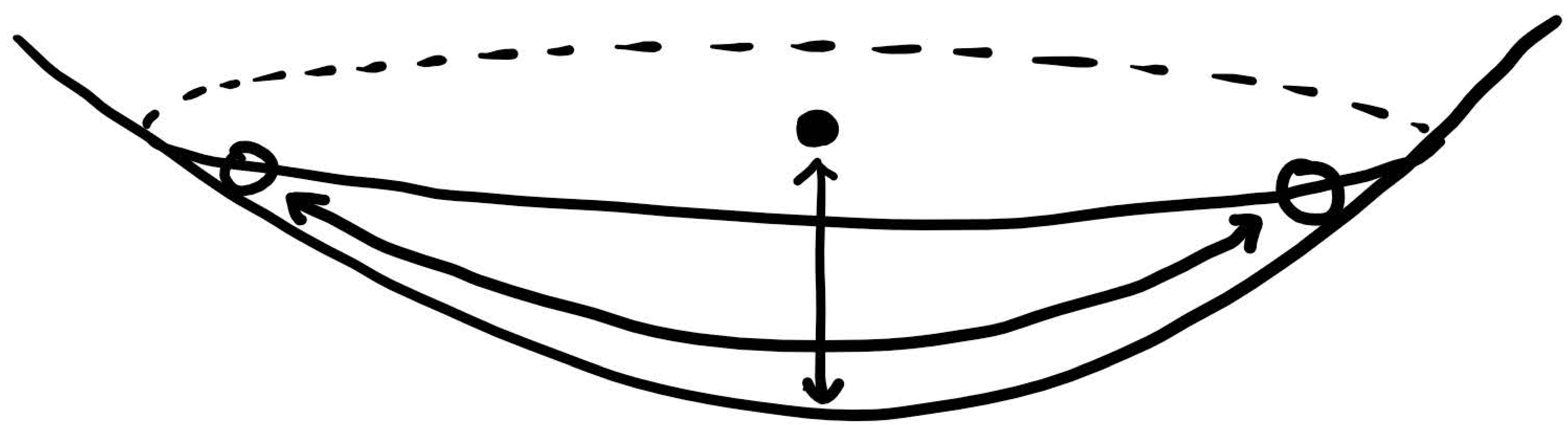


그에 비해, f의 '이계 미분'의 의미는, 0 주변(양옆) 함숫값들과 f(0)이 얼마나 차이 나는지를 보여줘요.
여기서 핵심은, 0 앞뒤의 함숫값이 동등하게 다뤄진다는 거예요.

즉, 구덩이가 얼마나 깊게 파였는지를 보여주는 거죠.

만약 깊게 파였다면 물체는 빠르게 왔다갔다할 거고,

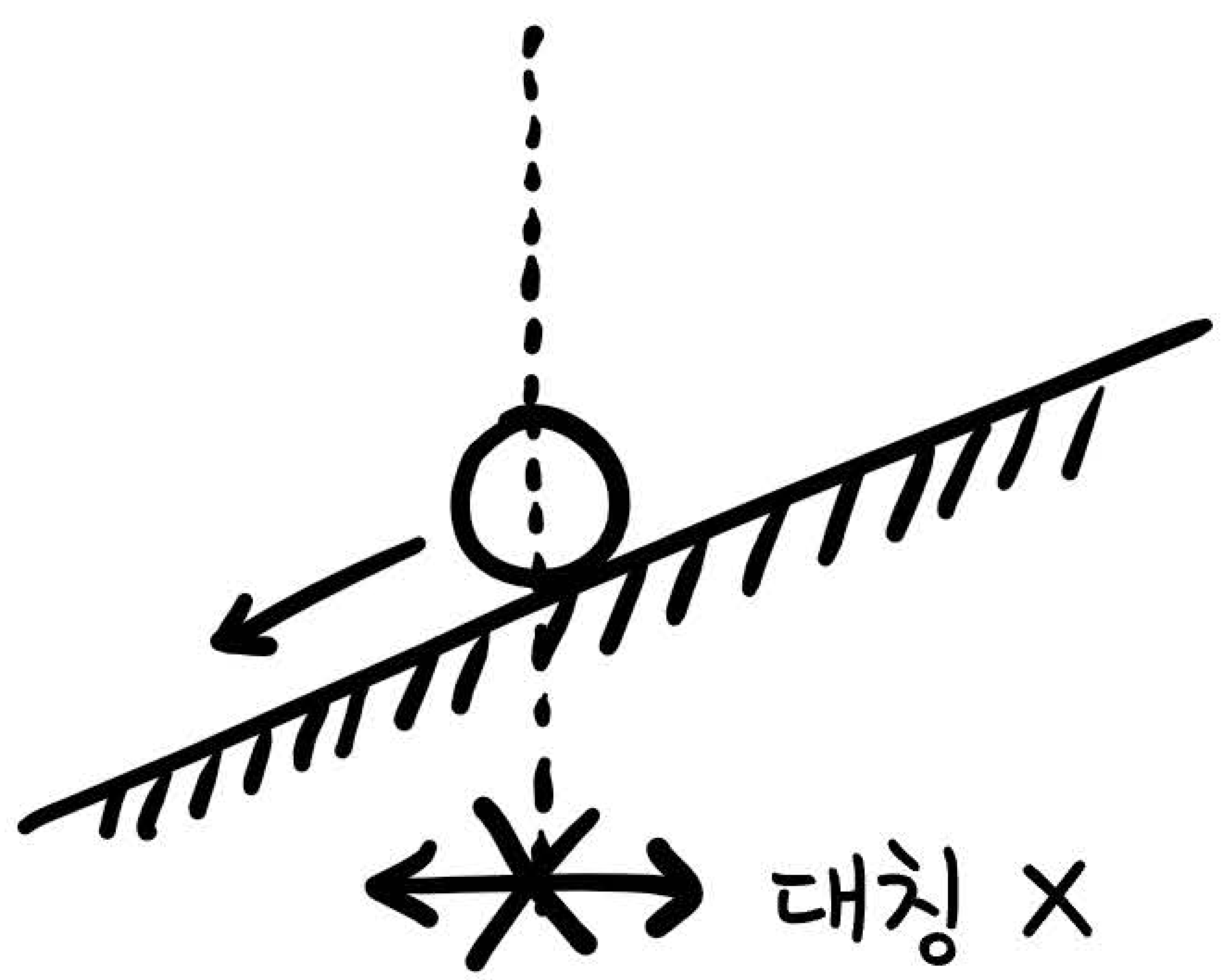




이렇게 넓게 파였다면 왔다갔다 하는 데 시간이 더 오래 걸리겠죠.

얼핏 보기에는 일계 미분 대신 이계 미분이 등장하는 게 부자연스러울 수도 있지만, 사실 대칭성을 생각하면 자연스러운 연산이에요.

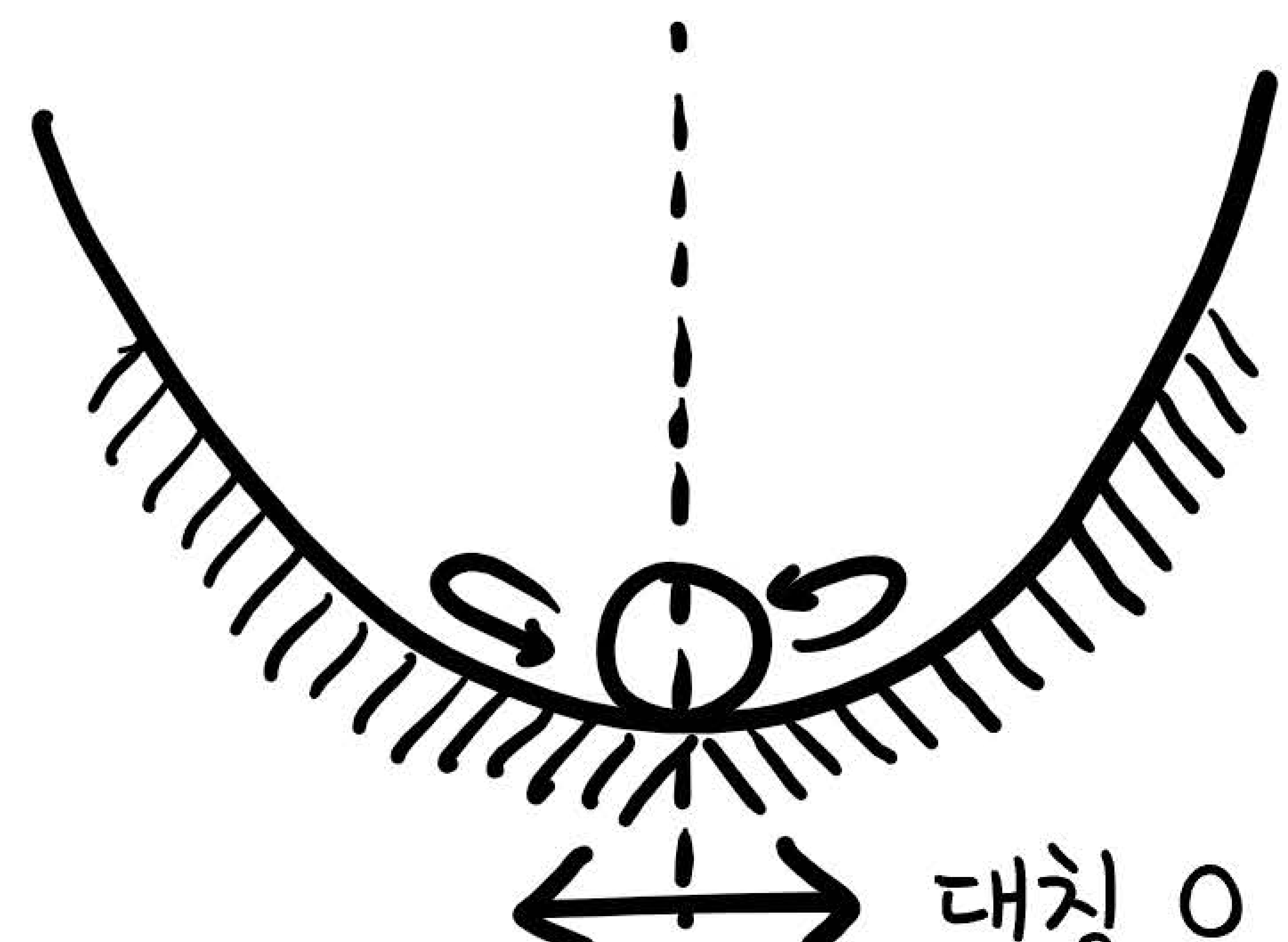
$$\ddot{x} = -g f'(0)$$



$$\frac{d}{dx}[f(-x)]\Big|_{x=0} = -f'(0)$$

일계 미분의 경우에는 x가 '증가하는 방향'을 잡아준 뒤 계산해야 하기에, 방향을 뒤집으면 계산이 유지되지 않죠.

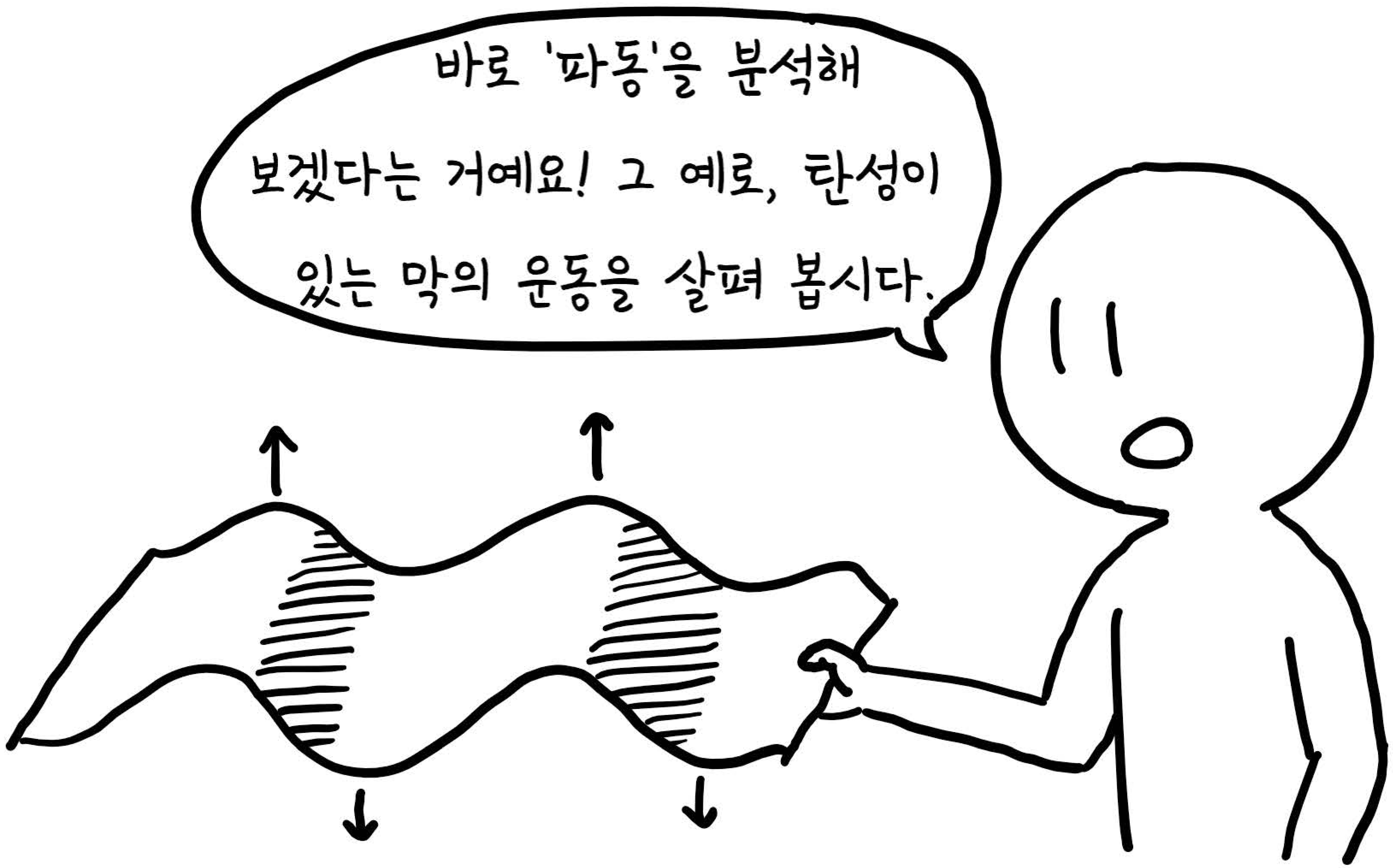
$$\ddot{x} = -g f''(0)\, x(t)$$



$$\frac{d^2}{dx^2}[f(-x)]\Big|_{x=0} = f''(0)$$

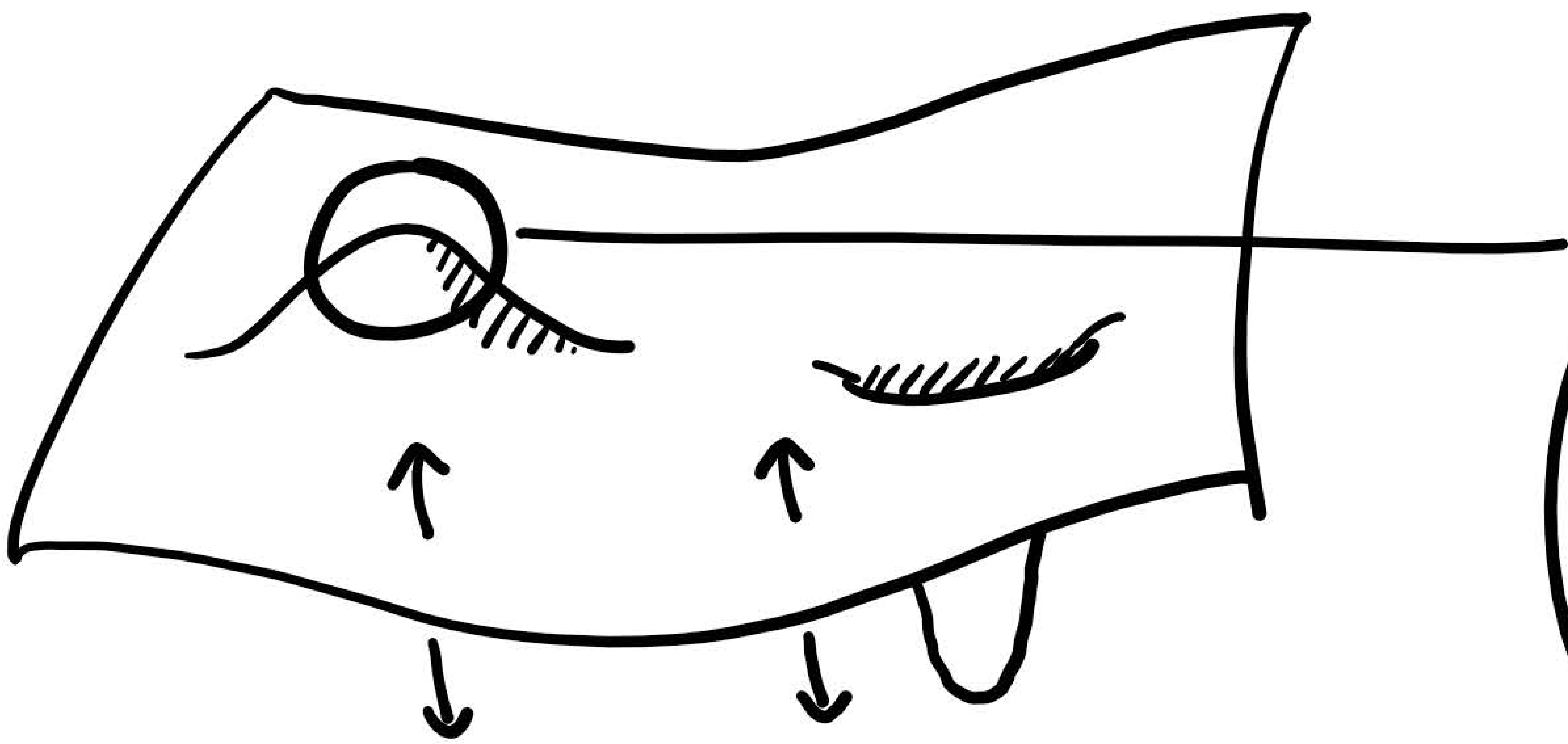
그에 비해, 이계 미분의 경우 기준점 주변의 점들을 '차별 없이' 다루기 때문에 대칭성을 가지고 있어요.

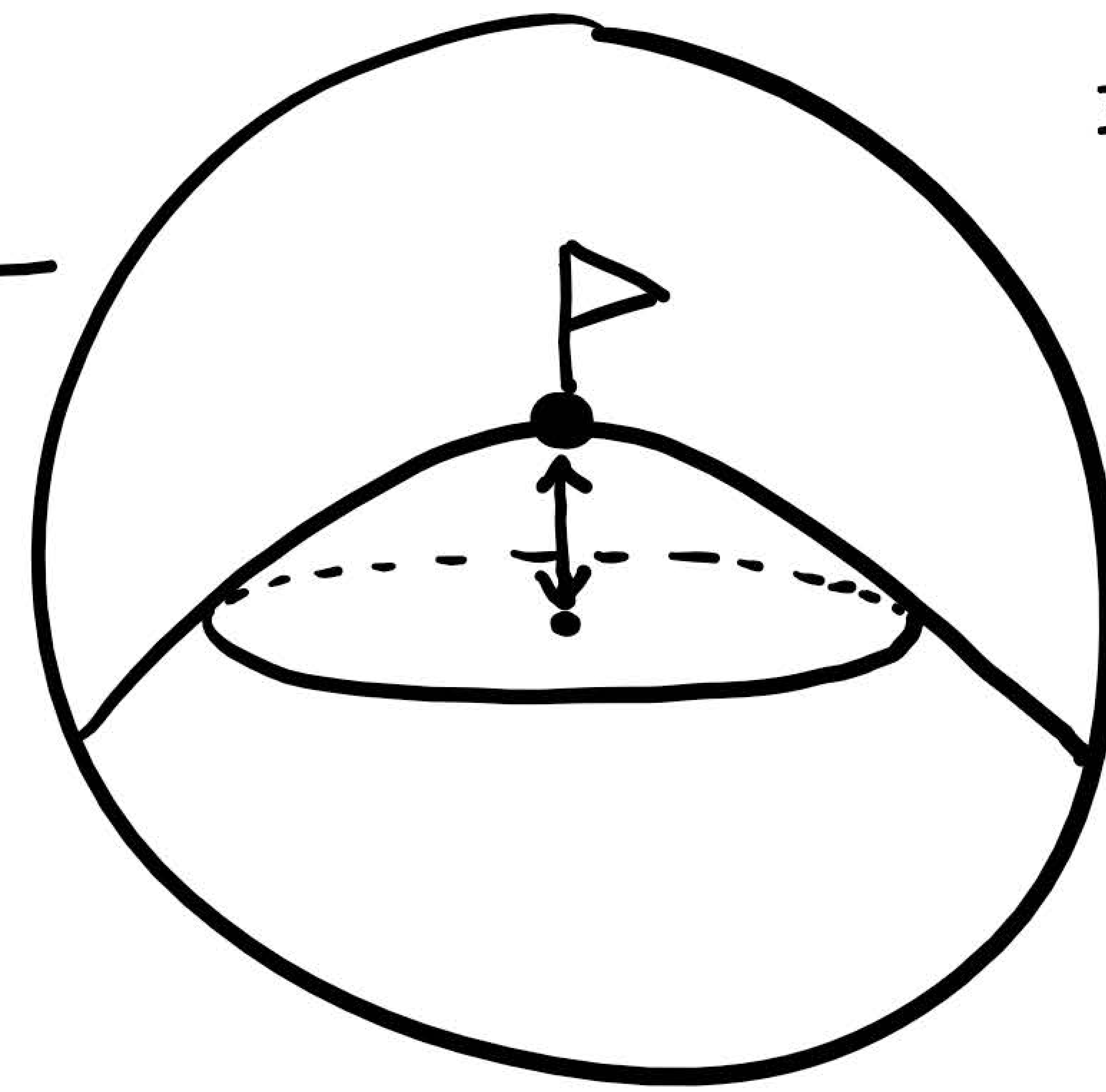
이제 여기까지는 연습운동이었고, 이 논의를 확장해 보겠습니다. 먼저, 이제 더 이상 지형은 고정되어 있지 않습니다. 움직이는 물체 그 자체가 자신이 따라갈 '지형'을 만들어 주는 운동을 공부할 거예요.



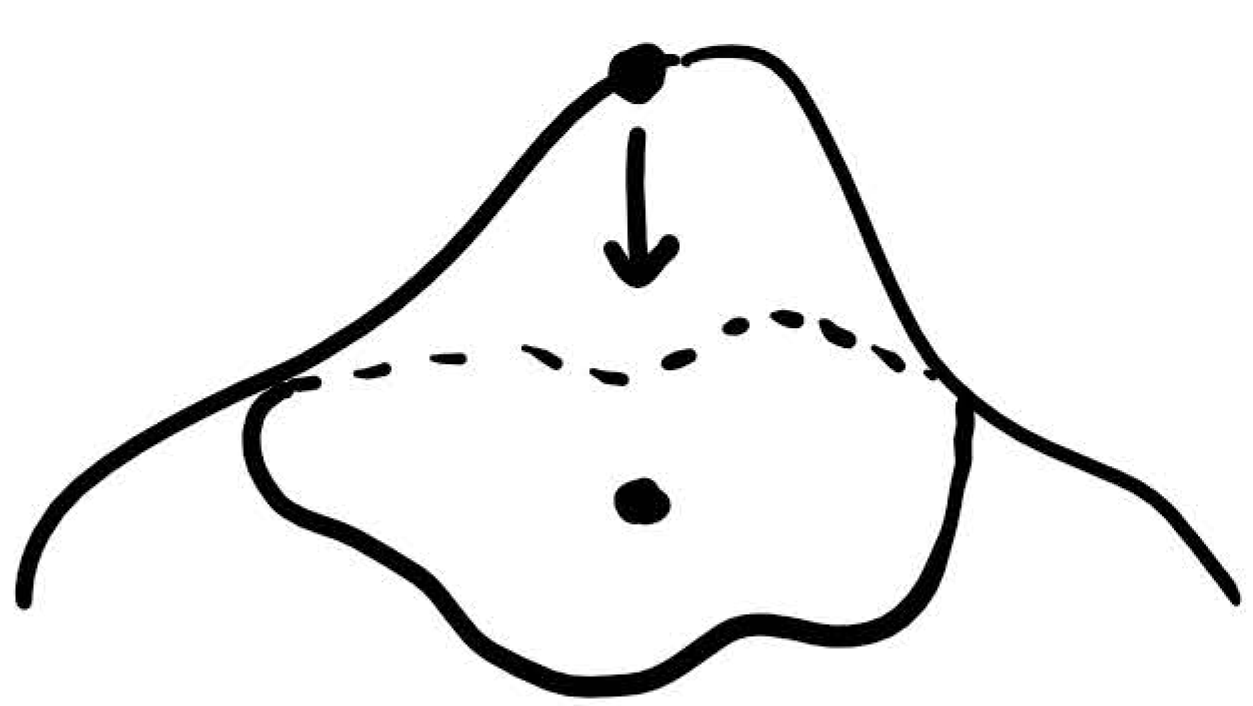
지형이 주어진 게 아니라 물체 스스로가 만든다는 게 무슨 뜻일까요?

여기 이런 막의 볼록한 부분을 살펴 봅시다.

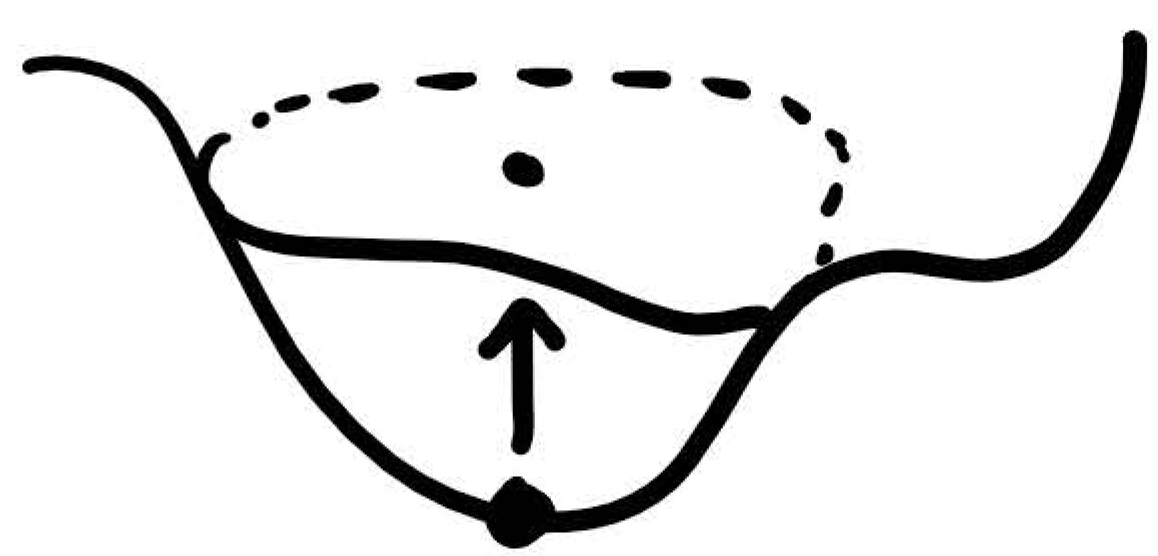




꼭대기 부분은 주변 부분보다 위로 솟아 있죠. 그러니 막의 탄성 때문에 이 부분은 밑으로 당겨집니다.



즉, 주변 부분보다 위로 솟아 있는 부분은 아래로 힘을 받고,



반대인 경우에는 위로 힘을 받습니다.

이걸 고려했을 때, 막의 운동방정식은

$$\ddot{u}(\vec{x},t) = C\left(\text{주변과의 } u\text{값 차이}\right)$$
$$= C\vec{\nabla}^2 u(\vec{x},t)$$

가 됩니다.

다시 해석하자면, 아까는 지형에 대한 정보(=이계 미분)는 주어지는 거고 그에 따라 해를 구하는 거였는데, 이번에는 해 자체의 지형을 사용하다 보니 해의 (공간에 대한) 이계 미분이 들어가는 거죠.

그러니, 각각의 이계미분 (t, x, y에 대한 것)마다 고윳값 문제의 해인 sin, cos을 생각해서 결합해 줍니다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

이계 미분!

$\oplus$

sin, cos

$\downarrow$

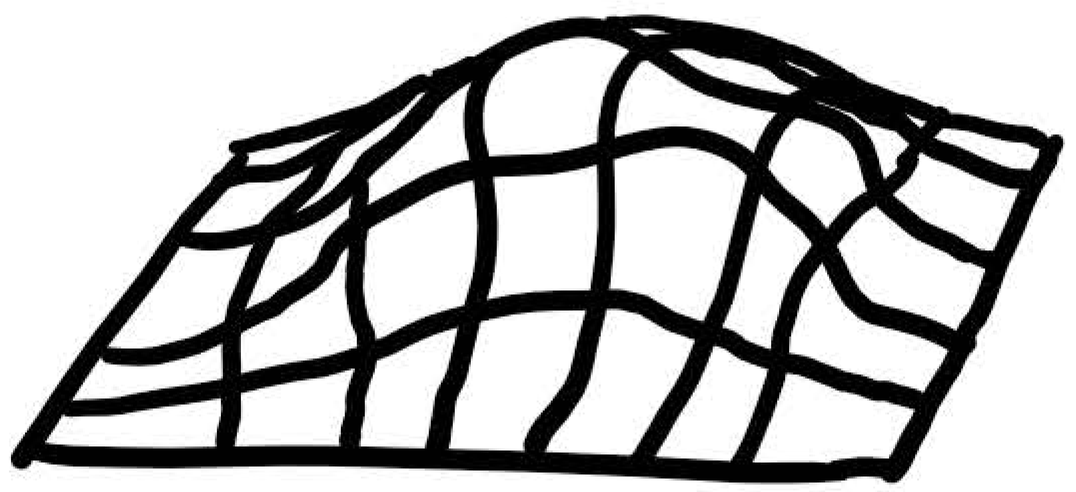
$$\boxed{A\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}\omega t\cdot\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_1 x\cdot\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_2 y}$$

$\Downarrow$

$$\omega^2 = C^2(k_1^2+k_2^2)$$

이 조건을 만족하기만 하면 되겠죠!

그러나, 반대로 모든 해가 저런 함수 형태는 아니죠. 그러니 저런 함수들의 합 형태로 일반적인 해를 나타낼 수 있으면 좋을 것 같아요.



$$u(\vec{x},0)=\sum_{k,k'} A_{k_1,k_2}\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_1x\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_2y$$

$$\dot{u}(\vec{x},0)=\sum_{k,k'} B_{k_1,k_2}\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_1x\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}k_2y$$

$$\Rightarrow$$

$$u(\vec{x},t)=\sum_{k_1,k_2} A_{k_1,k_2}\cos\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,t\ \cdots$$

$$+\sum_{k_1,k_2} B_{k_1,k_2}\sin\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,t\ \cdots$$

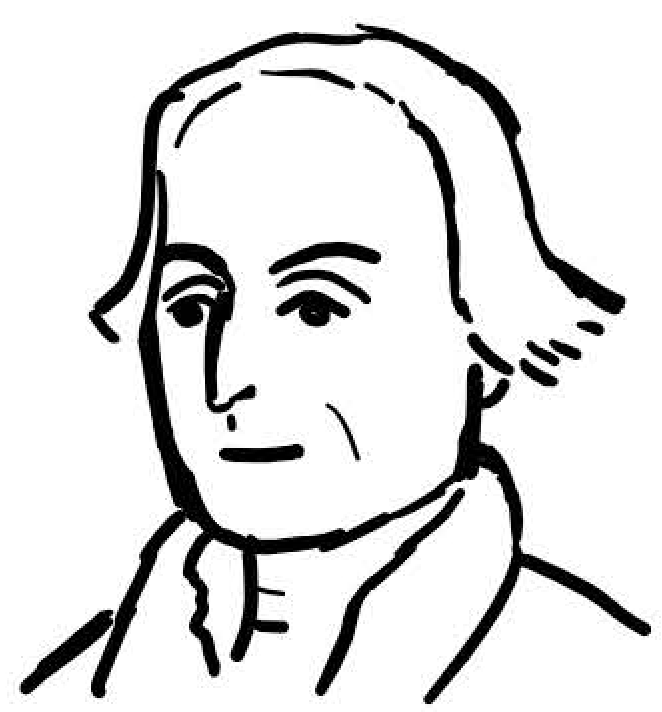
그 중에서도 중요한 초기값 문제는 이런 형태예요. 맨 처음 시점 ($t=0$)에서의 해의 값 및 미분값을 바탕으로 계수를 결정하면,

그 이후에 t에 따라 변화하는 양상은 자동으로 결정할 수 있을 테니 좋다는 거죠.

이 문제의 1차원 버전(막이 아니라 줄이겠죠)은 이미 1700년대에 여러 수학자들이 생각해 봤어요. 하지만 이 당시에는 특정한 함수만 삼각함수로 분해했고, 임의의 초기값 함수에 대해 하지는 않았어요.

레온하르트 오일러

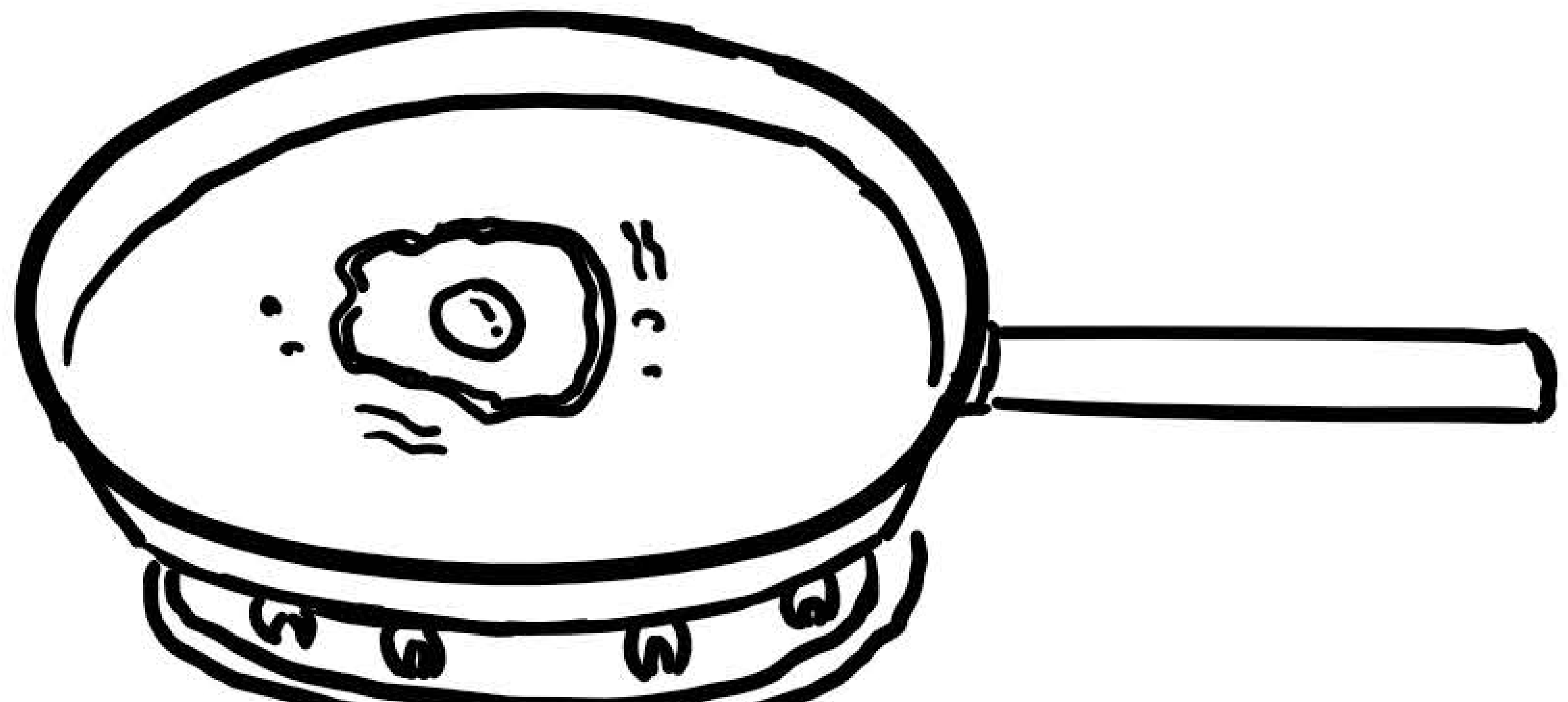
다니엘 베르누이



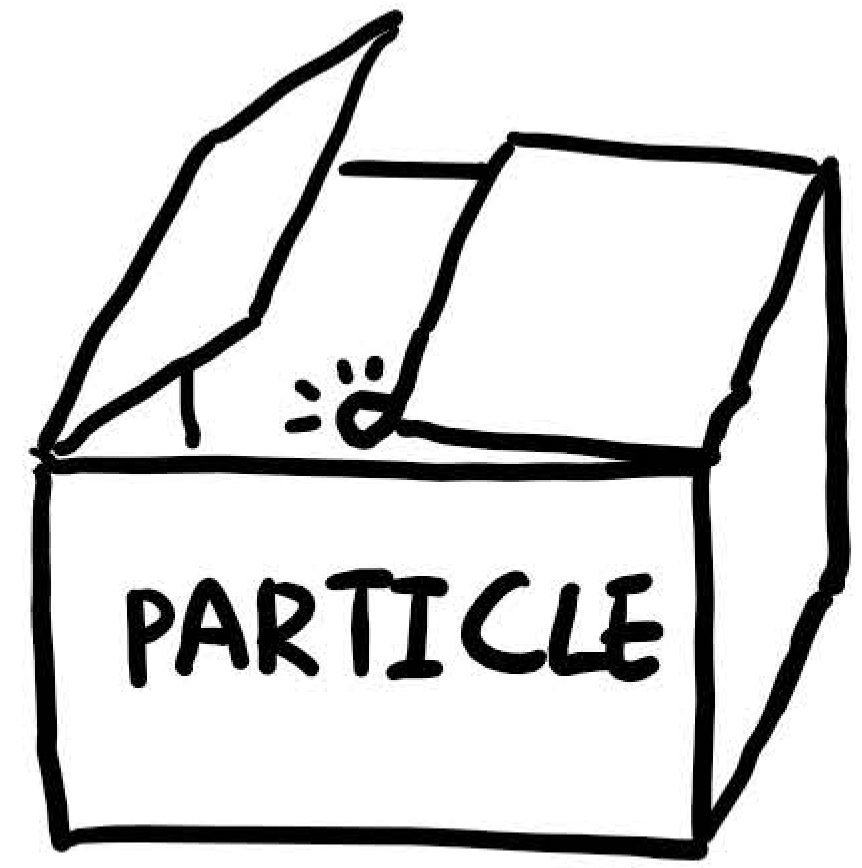
조셉 루이 라그랑주

만약 여기서 이론이 끝났다면, 우리는 지금 푸리에 급수라는 용어를 들어보지 못했겠죠. 다행히, 삼각함수 분해가 적용될 수 있는 방정식은 하나가 아니었어요.

아름다운 음악 소리나 호숫가의 물결 등을 기술하는 파동 방정식도 있지만,



뜨거운 물체로부터 차가운 물체로 에너지가 이동하는 현상, 즉 열에 관한 방정식도 있겠죠.



그리고 조금 나중의 일이지만, 양자역학의 역사에서 빼놓을 수 없는 슈뢰딩거 방정식이 있겠죠. (이것도 실은 파동 방정식과 연관이 있어요!)

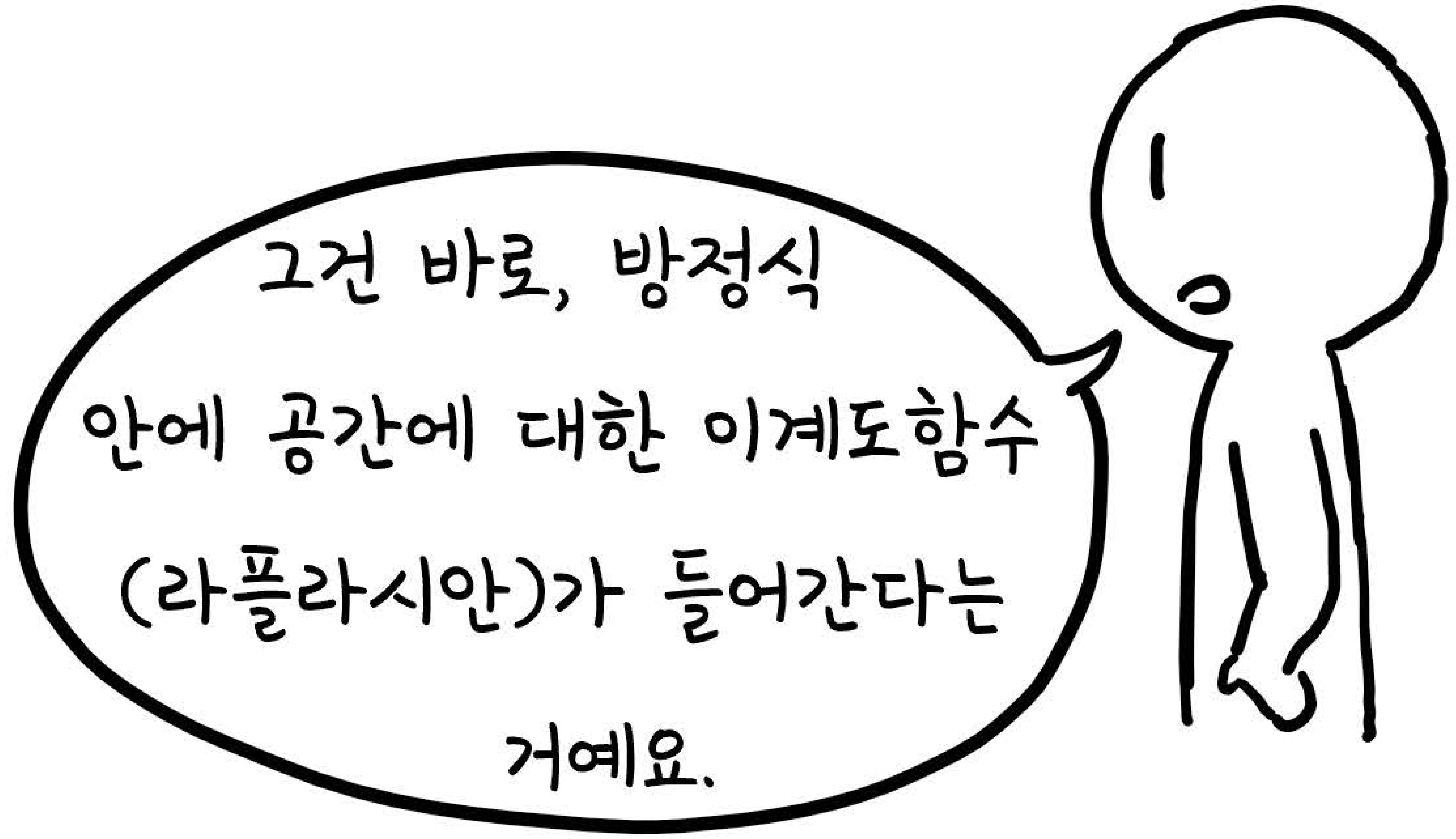
이 세 가지 방정식에는 공통점이 하나 있는데요,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\vec{x}, t) = C \boxed{\nabla^2 u(\vec{x}, t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = C \boxed{\nabla^2 u(\vec{x}, t)}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = C \boxed{\nabla^2 u(\vec{x}, t)}$$

*자유 입자의 경우



그러면 아까와 같이,

$$\boxed{A\, f(t) \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} k_1 x_1 \cdot \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} k_2 x_2 \cdots}$$

형태의 해를 집어넣어 보면 $f(t)$에 대한 제한조건을 알 수 있고, 일반적인 해를 이런 함수들의 합으로 나타낼 수만 있다면 좋을 거예요.

그러니, 열 방정식을 공부하다가도 삼각함수 분해에 대해 생각해볼 수 있었다는 거죠. 이게 바로 푸리에가 한 일이었어요. 푸리에는 1800년대 초반에 고체 안에서의 열 전파에 관해 연구하고 논문을 쓰고 있었습니다.

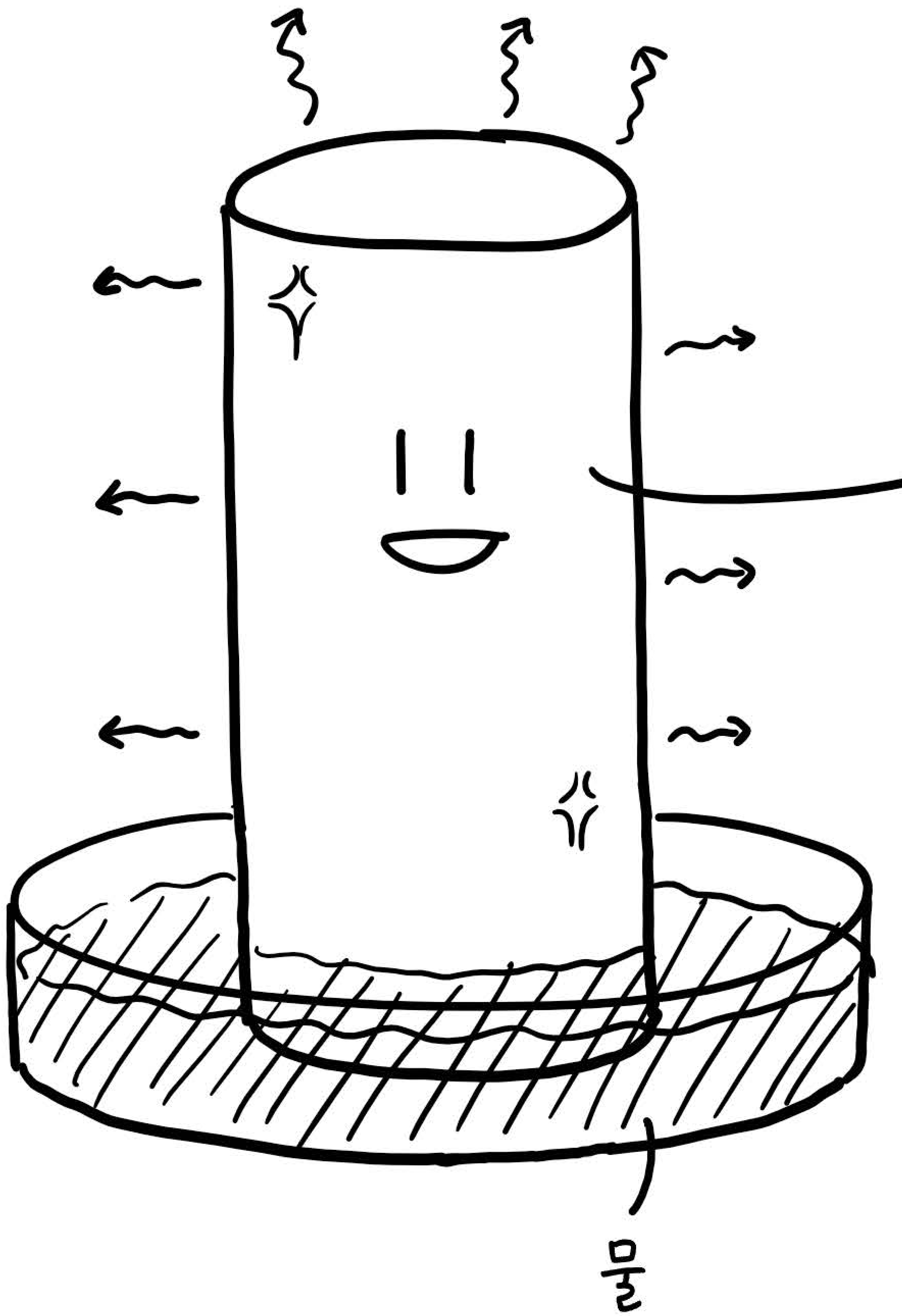
장-밥티스트 조제프 푸리에

프랑스 학사원 (Institut de France)

그 과정에서, 1807년 12월에 프랑스 학사원에 가서 본인이 쓰고 있던 논문*인 <열 전파에 관한 소고>의 개요를 설명합니다.

*이 당시의 논문은 결국 생전에 출판되지 않았고, 다만 푸아송이 그 발표를 듣고 적은 개요만이 출판되었습니다. (Herivel, pp. 153–154, Poisson.)

이 당시 푸리에가 관심을 가지던 문제는 다음과 같은 것이었죠. 금속 실린더나 직사각형 막대의 한쪽 끝이 (온도가 유지되고 있는) 액체에 담겨 있어 데워지고, 나머지 면은 공기에 노출되어 식어 가는 상황에서, 온도의 분포를 결정하는 방정식을 알고 싶어했어요.



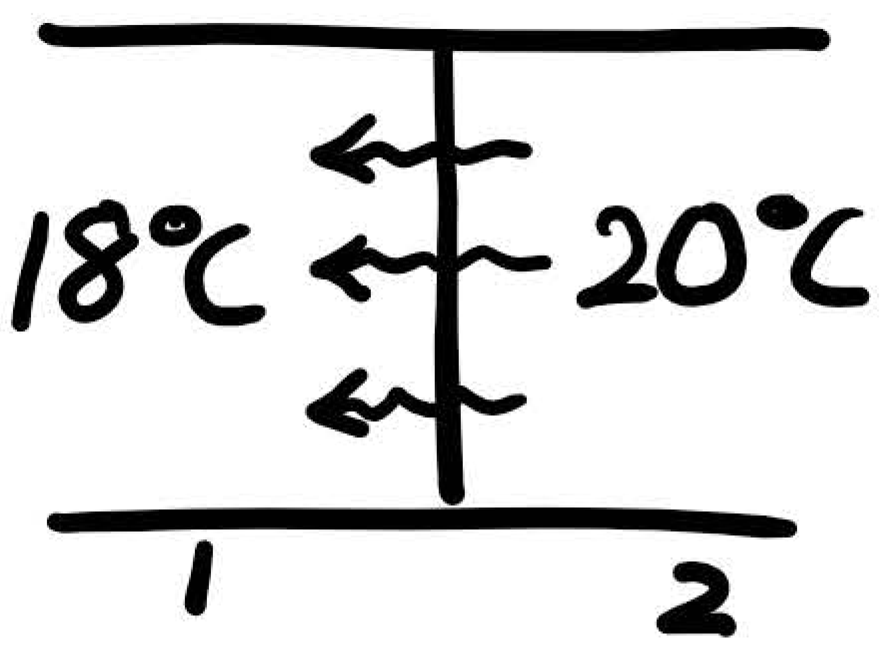
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}$$

이게 그 방정식이었죠!

푸리에는 먼저 유한 개의 물체 사이에 열이 어떻게 전파되는지 관찰한 다음, 연속적으로 차 있는 물체로 그 논증을 확장해서 방정식을 유도했어요.

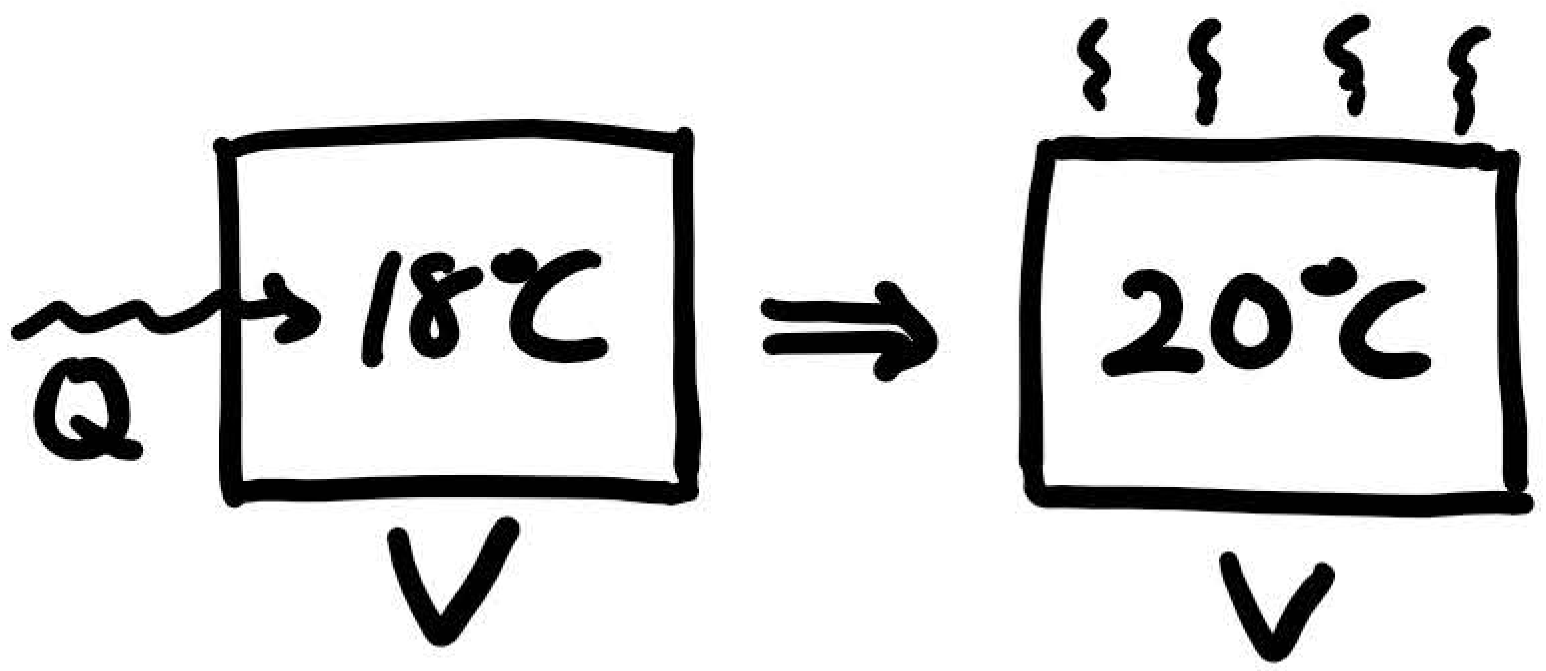
(Poisson, pp. 112–123, G–G, Ch. 2, 3, 4 – p. 121, pp. 126–128.)

한번 푸리에의 유도 과정을 따라가 봅시다. 여기에서도 "주변 평균값과의 비교"가 중요해요!



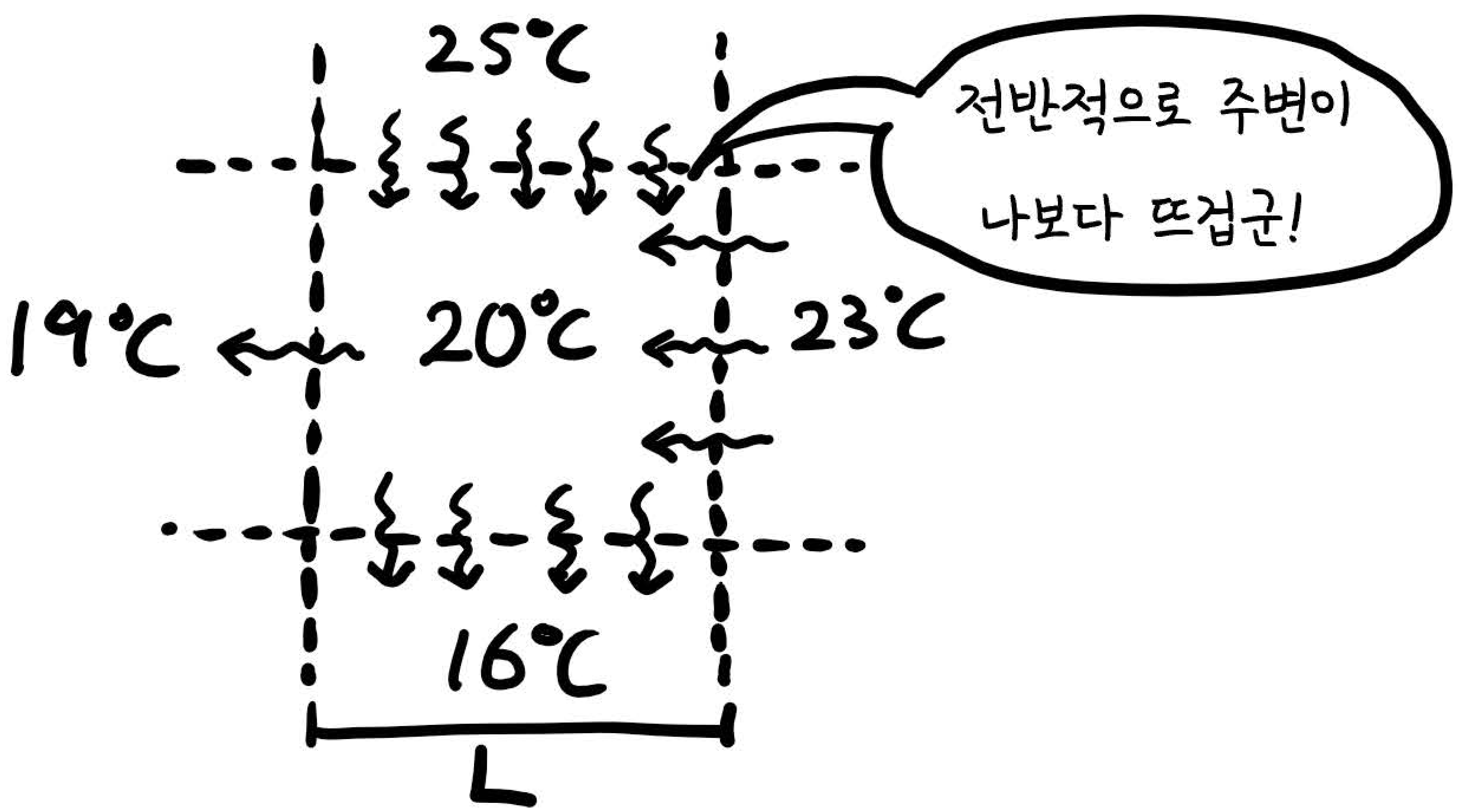
$$Q = K \cdot (T_2 - T_1) \cdot \Delta t$$

먼저 뉴턴이 얘기한 바에 따르면, 두 물체가 접촉해 있을 때 그 사이의 열 교환은 (1) 온도차, (2) 접촉 시간에 비례해요.



$$Q = \underset{\sim\sim}{C_v} V \cdot \Delta T$$

그리고 이렇게 받은 열은 그 물체 전체의 온도를 높이는 데 쓰이죠.



그럼 이렇게 고체 안에서 사방으로 둘러싸인 미소 면적을 생각하면,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q}{C_v L^2 \Delta t} = \frac{K}{C_v} \cdot \left(\frac{\text{L−주변 온도와 차이}}{L^2} \right)$$

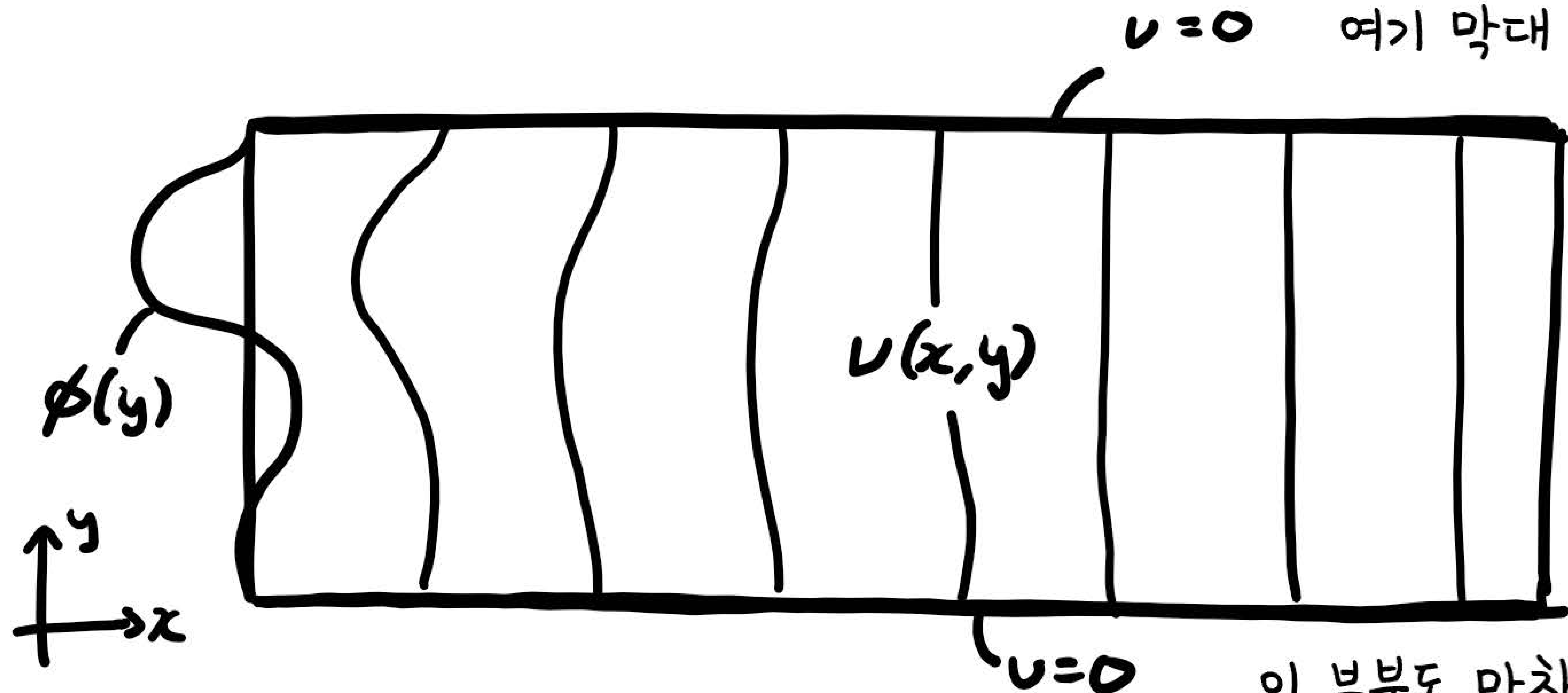
$$= \frac{K}{C_v} \nabla^2 T.$$

이번에도 라플라시안이 등장했죠!

이제 이 방정식의 해를 구하면 되는데요, 대표적으로 앞에 얘기했던 상황을 생각해 봅시다. 편의상 2차원 안의 막대를 생각하겠습니다.

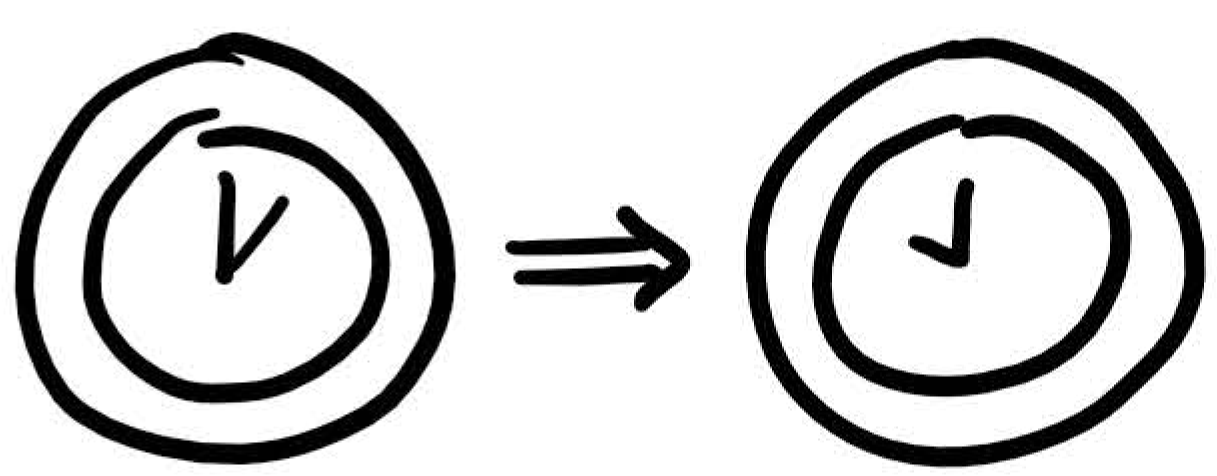
x=0 지점 부분은 액체 (열원)에 닿아 있어, 임의로 주어진 온도 분포를 가질 수 있습니다.

여기 막대 가장자리 부분은 온도가 0인 공기에 맞닿아 있구요,



이 부분도 마찬가지로 공기에 닿아 있습니다.

이 상태에서 시간이 많이 흘렀을 때,



: $\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} \to 0$,
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{정적인 열 방정식과,} \\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0 & \end{cases}$$

온도가 변하지 않는 정적인 상태가 되었다고 치면,

그에 맞는 경계값 조건을 얻습니다.

(Poisson, pp. 114-115, G-G, Ch. 6 - pp. 137-140.)

그러면 아까처럼 하면 $\boxed{v(x,y) = X(x)\,Y(y)}$ & $Y(0) = Y(\pi) = 0$

예쁜 특수해들을

구할 수 있겠죠.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = m^2 :$$

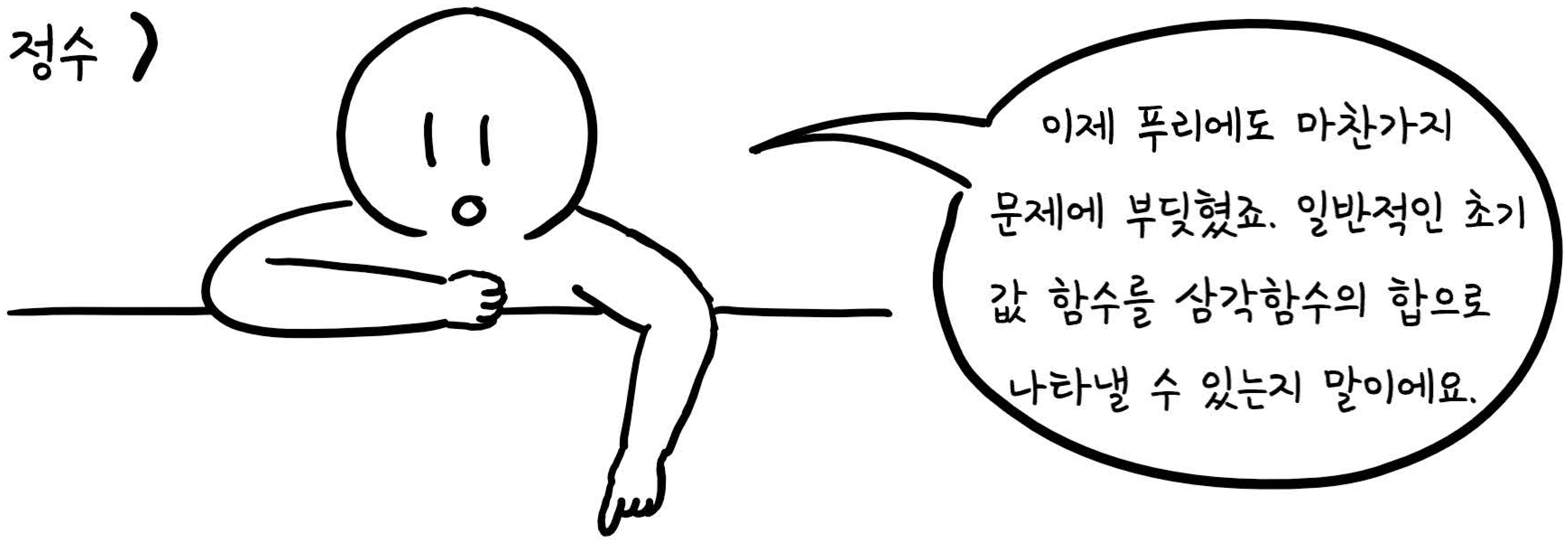
여기서 m이 정수여야만

조건에 맞는 해가 존재하기에,

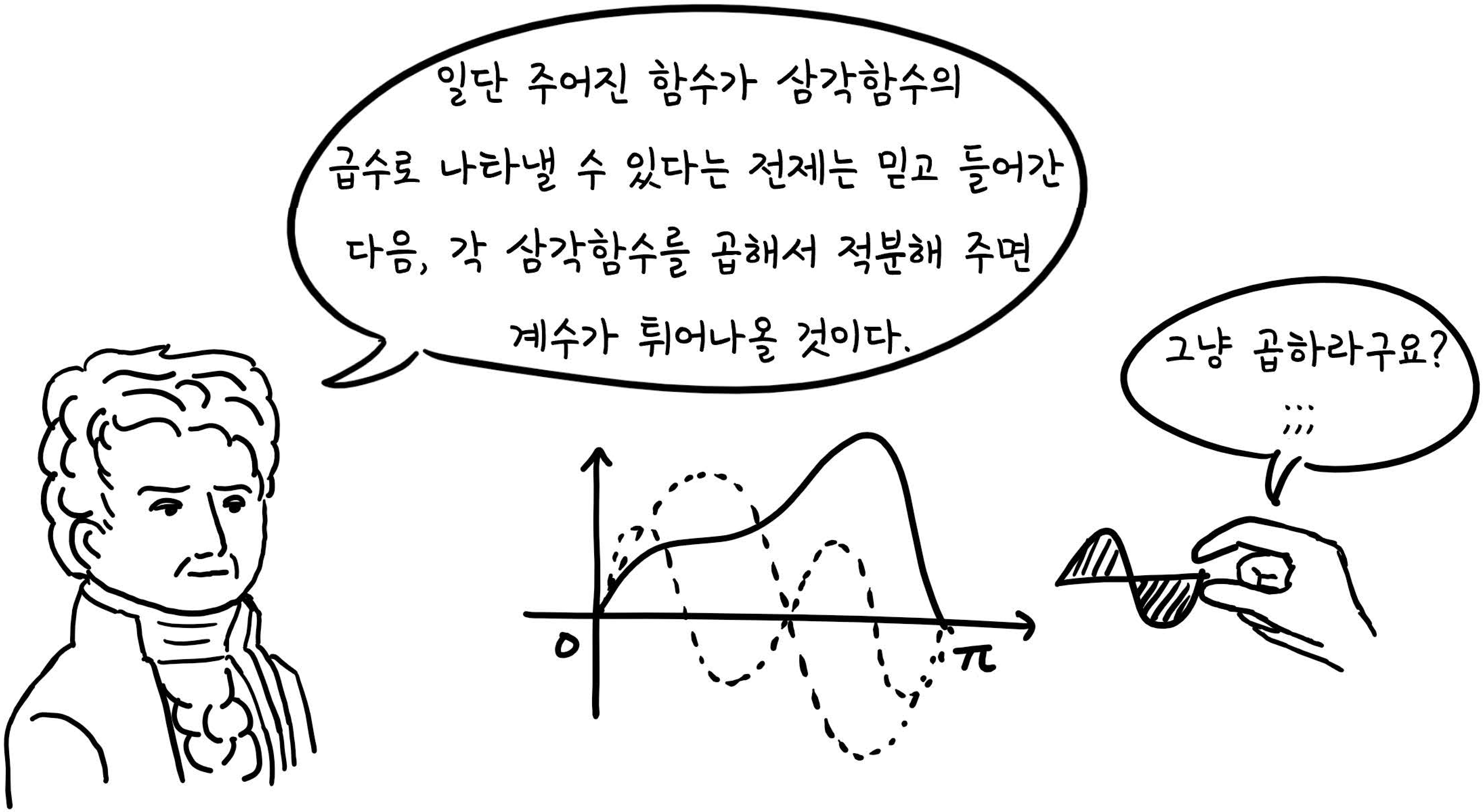
$$\Rightarrow X(x) = e^{\pm mx} \quad (m : \text{정수})$$

$$Y(y) = \sin my$$

를 얻습니다.



푸리에는 주어진 함수를 삼각함수의 급수로 나타낸 다음, 그 계수를 결정하기 위해 무한 연립 미분방정식을 풀었어요. 그 결과, 푸리에는 다음과 같은 결과를 얻었죠.

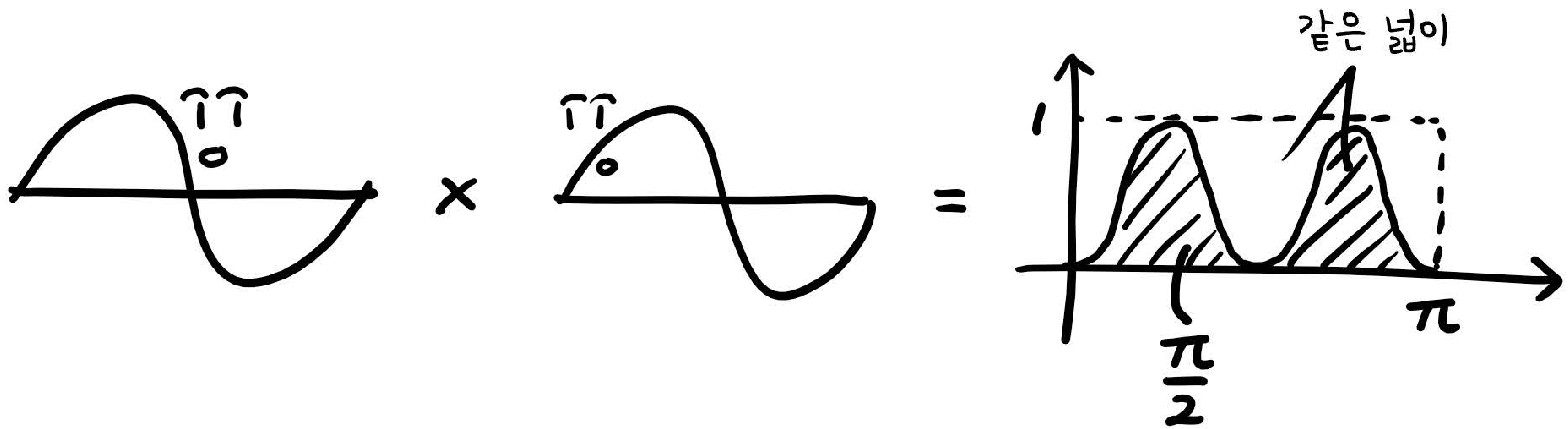


이렇게 하면 진짜 계수가 튀어나올까요?

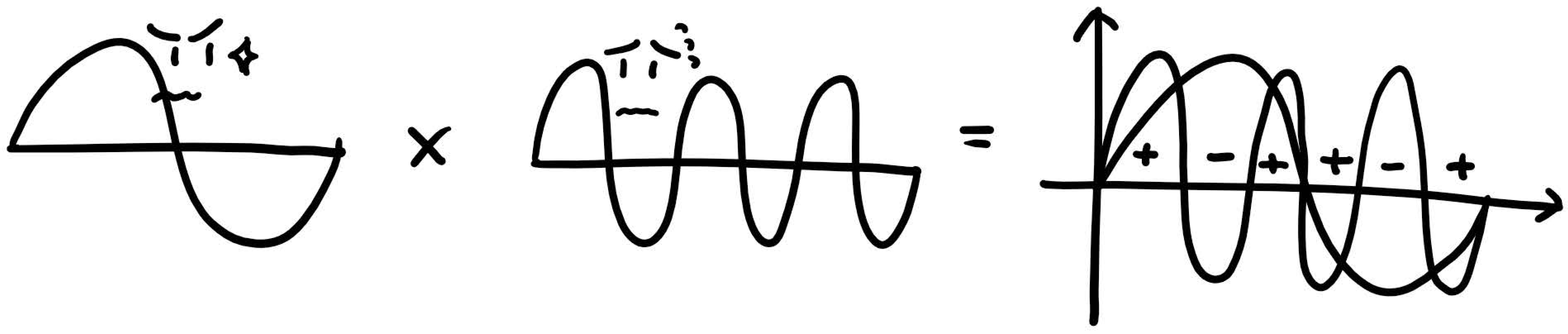
(G-G, Ch. 6-8, Ch.9-pp. 193-213, 216-218)

일단, 지금은 경계값 조건 ($X(0)=X(\pi)=0$)이 주어져 있으니,

사인함수만 생각해 봅시다. 그러면,



자기 자신과 곱해지면
항상 함숫값이 0 이상이고,
적분하면 $\pi/2$라는 값이
나오겠지만...

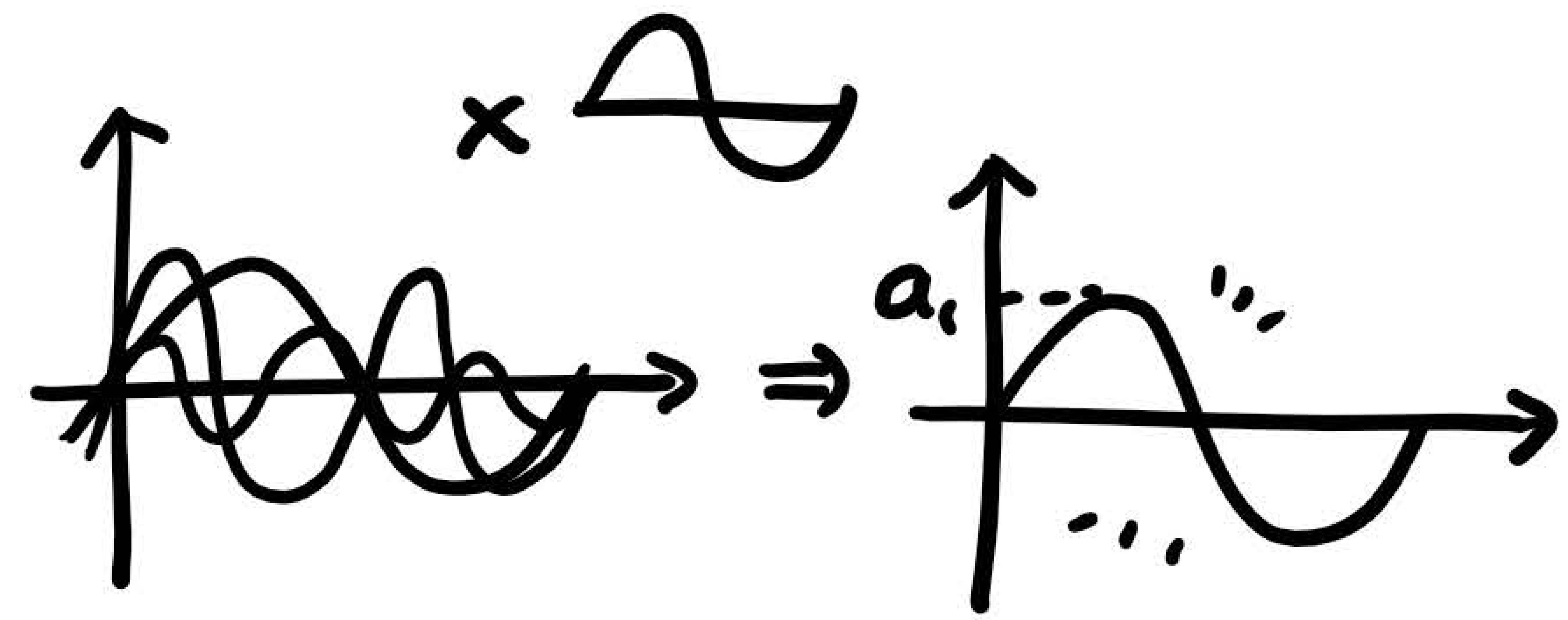


$= 0.$

자신과 주파수가 다른
삼각함수와 곱해지면,
부호가 같은 부분도
다른 부분도 있어 상쇄
되어 버려요.

그래서, 푸리에가 말한 대로 삼각함수 급수 전개가 있다고 친 뒤,

이렇게 곱해 주고 적분하면
원하는 계수만 쏙 얻을 수
있다구!



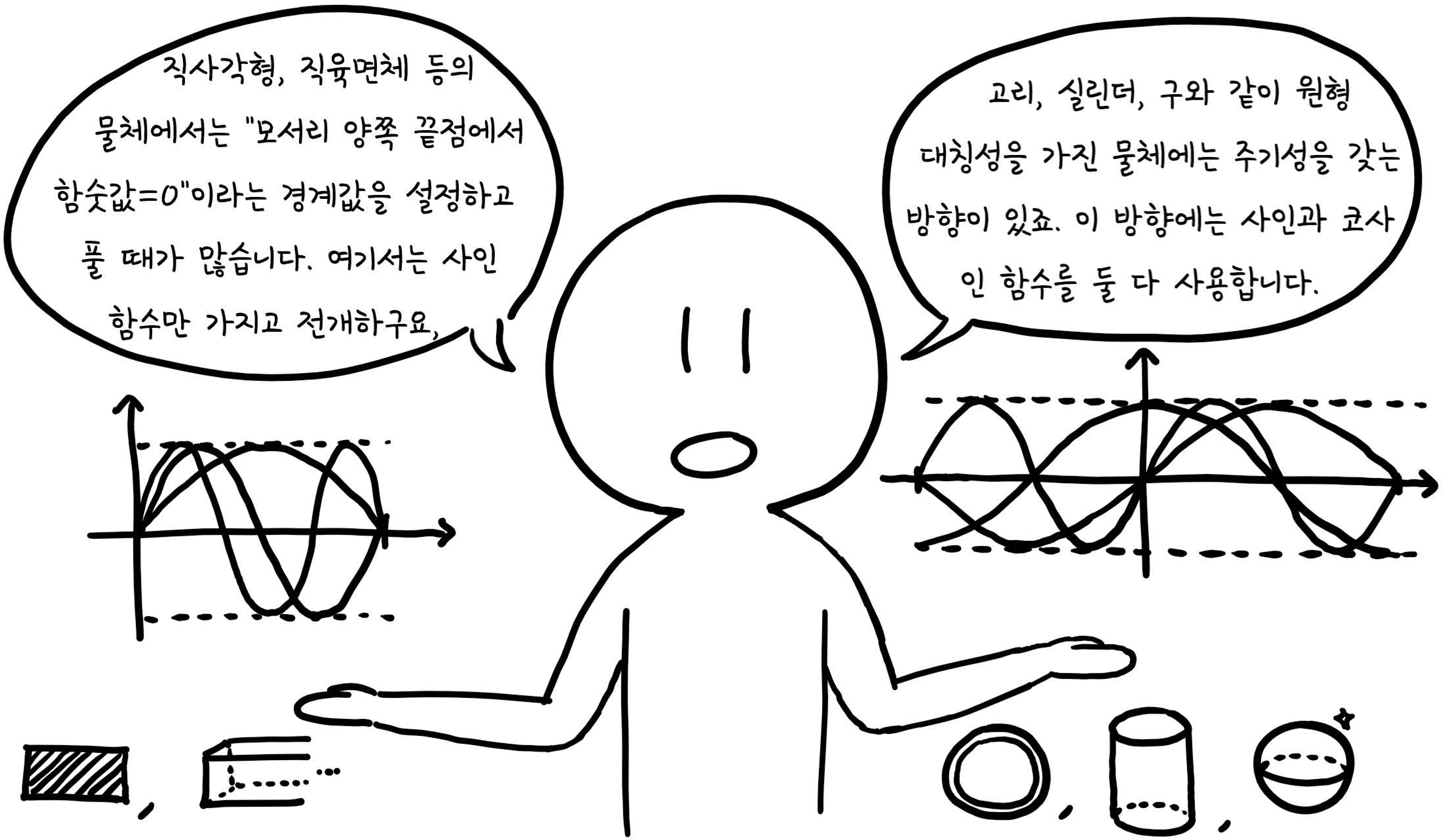
$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin ny$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \sin ky \, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin ny \sin ky \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} a_n \sin ny \sin ky \, dy$$

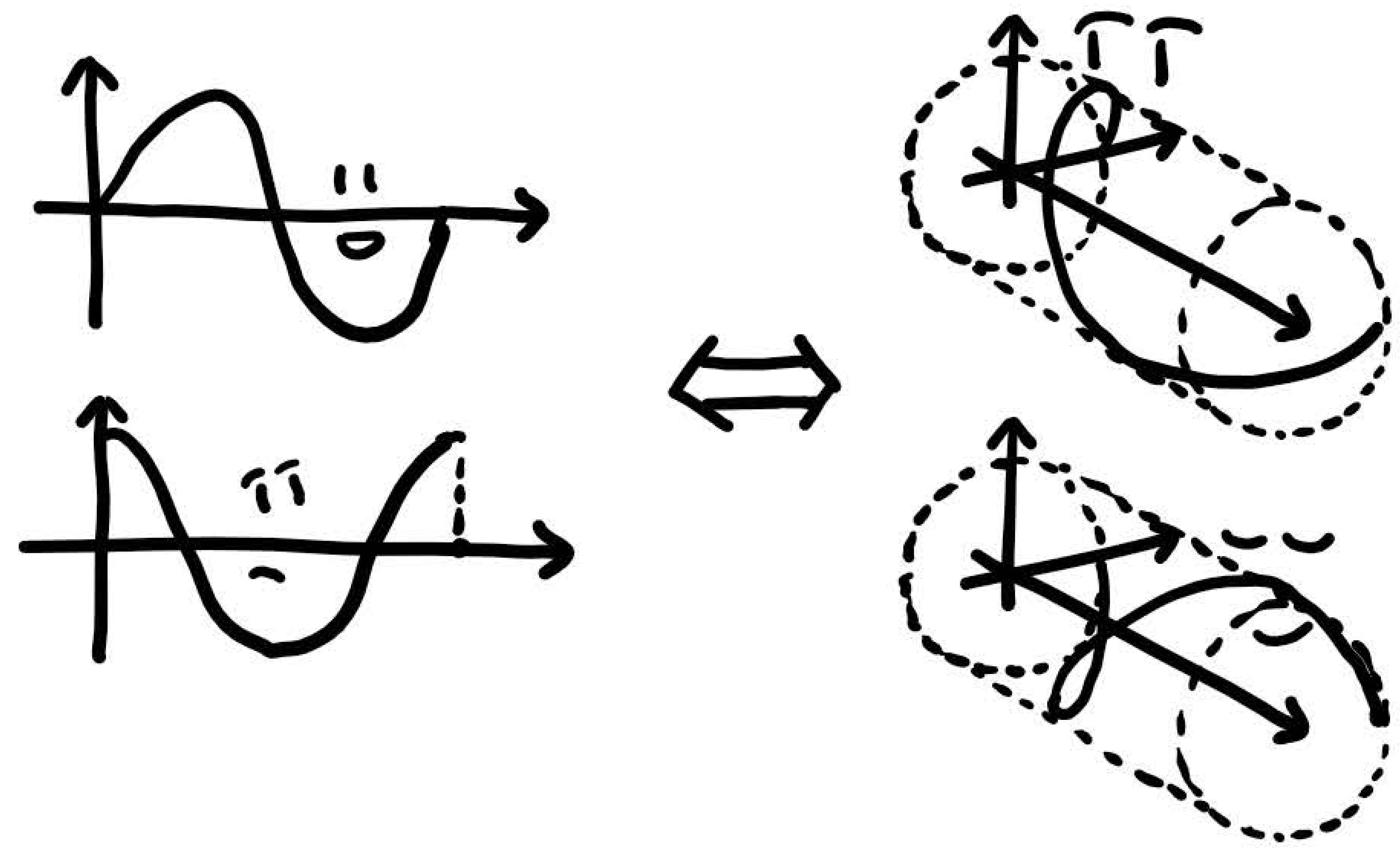
$$= \frac{\pi}{2} a_n$$ ...가 나온다고 하네요.

방금까지는 경계값 조건이 주어진 경우를 살펴봤는데요,

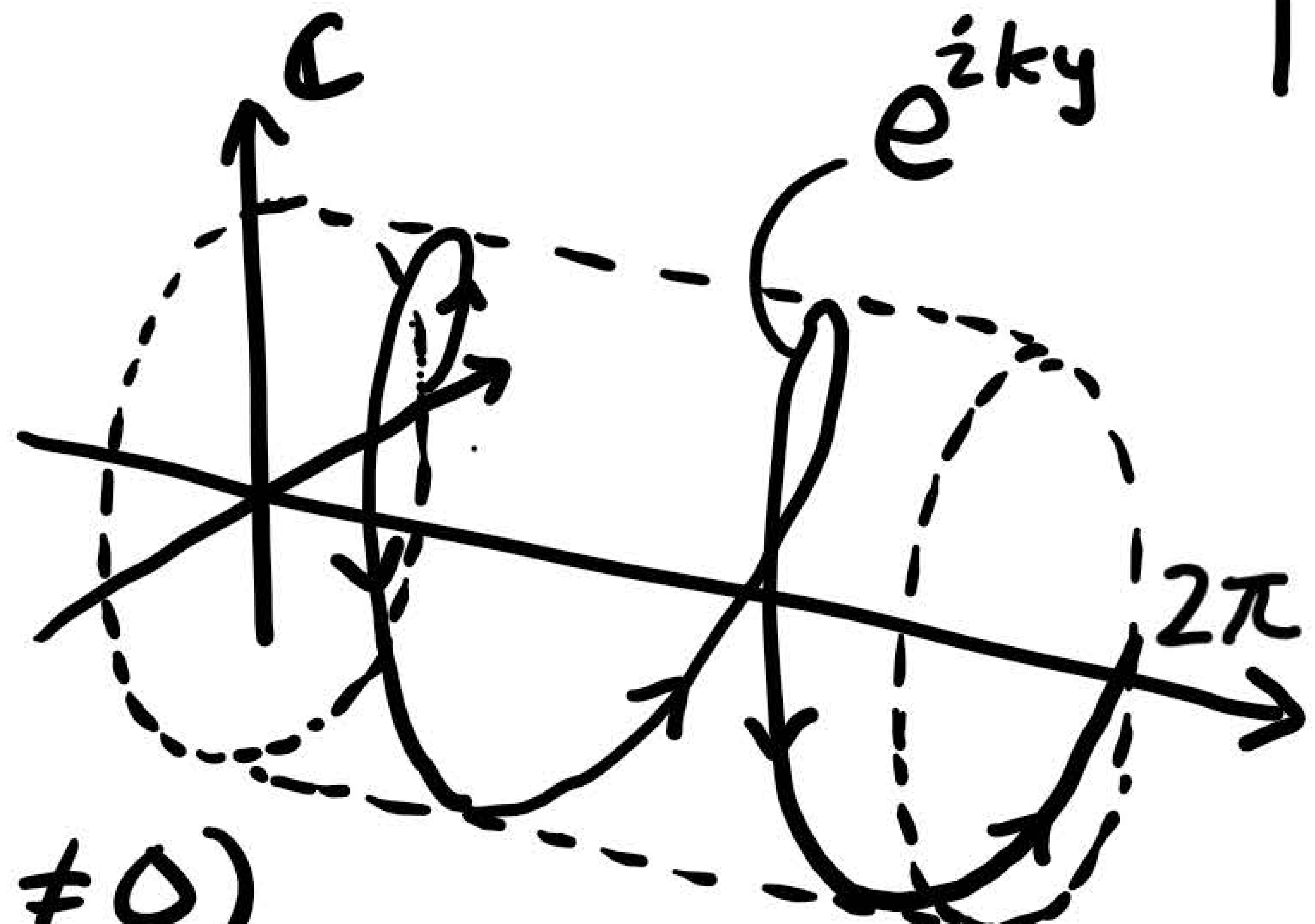


$$\boxed{\cos ky \pm i\sin ky = e^{-iky}}$$

아, 그런데 사인과 코사인 함수를 같이 쓸 거면 더 간편한 방법이 있어요.

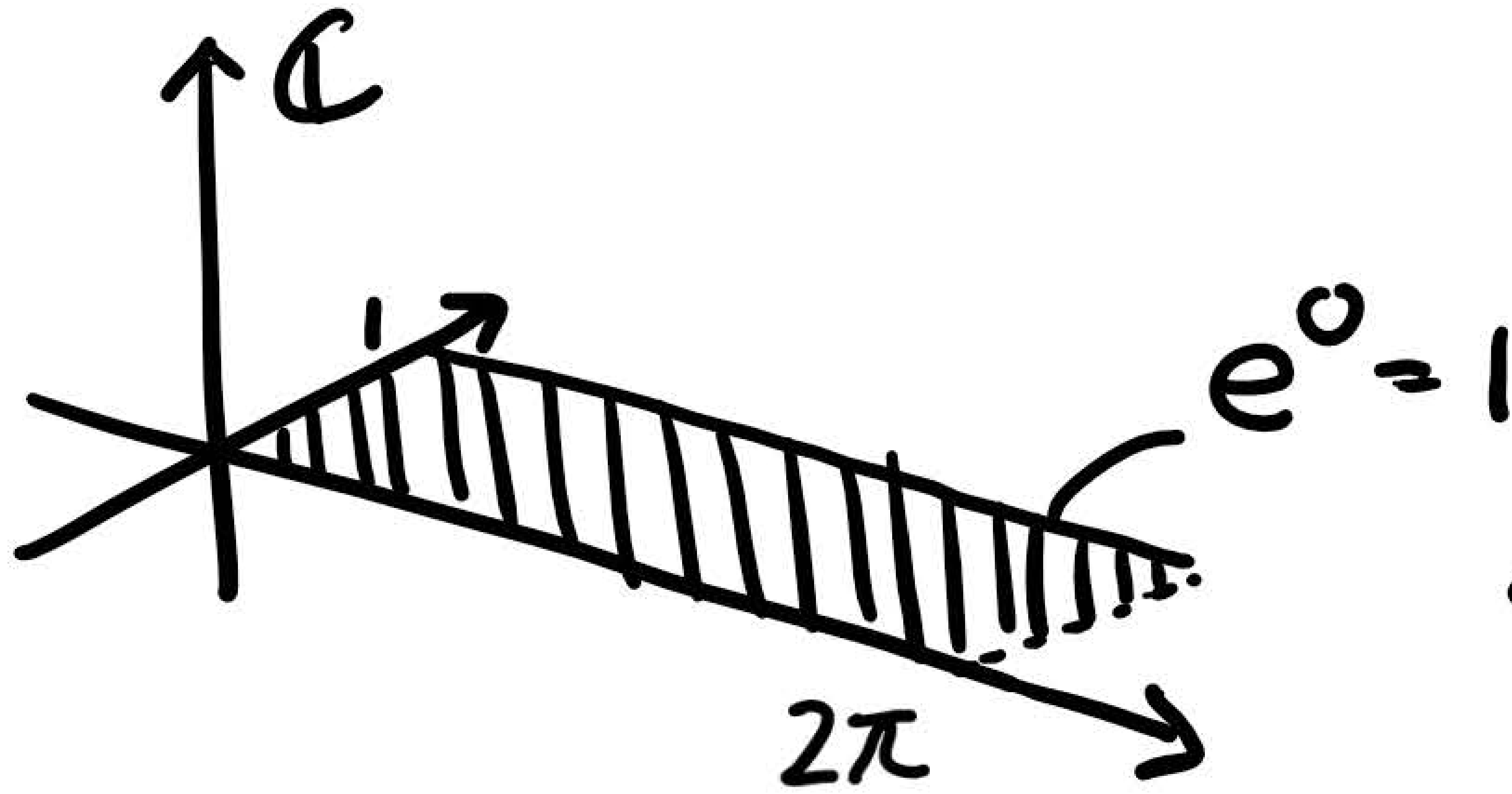


오일러 공식을 써서 복소지수 함수로 바꾸는 거예요! 주파수 k인 사인/코사인 함수와 주파수 k, −k인 복소지수함수는 서로를 선형 결합으로 표현할 수 있으니까요.



$(k \neq 0)$

$$\leftarrow \int_0^{2\pi} e^{ik\cdot y}\,dy = 0$$



$$\leftarrow \int_0^{2\pi} e^{i\cdot 0y}\,dy = 2\pi$$

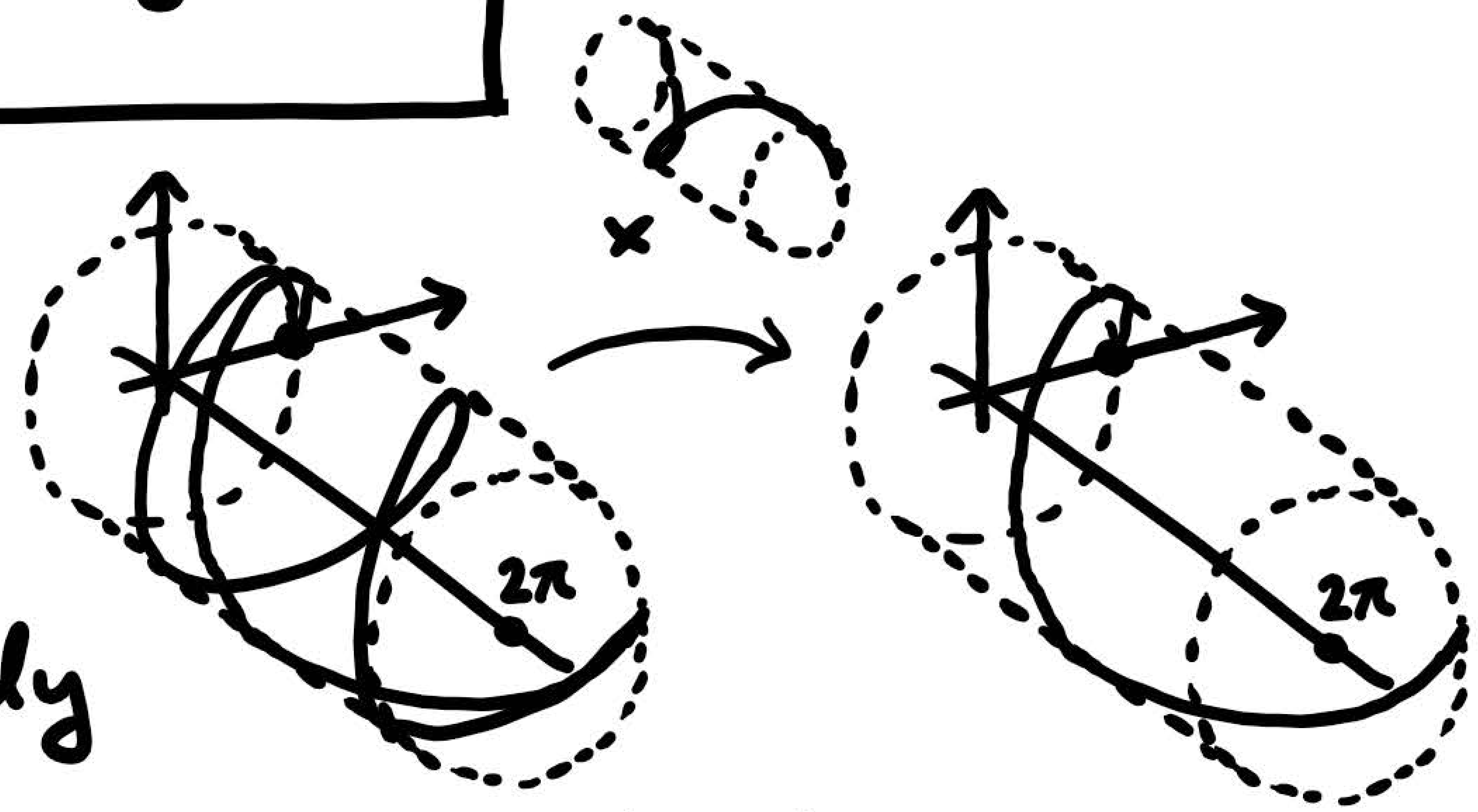
여기서 복소지수함수들은 아까와는 조금 다른 '배타성'을 가져요.

곱했을 때 주파수가 0이 되도록, 자신의 '켤레복소수' 함수를 곱해 줘야 적분이 살아남는 거죠.

그러면, 만약 어떤 함수가 복소지수함수의 급수 형태로 나타내질 때, 이 급수의 계수는...

이렇게 그 항 주파수와 반대인 녀석을 곱해준 뒤 적분하면 되겠죠!

$$\boxed{f(y)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{iky} \quad (0 \leqq y \leqq 2\pi)}$$



$$\int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny}\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{iky}\right) e^{-iny}\,dy$$

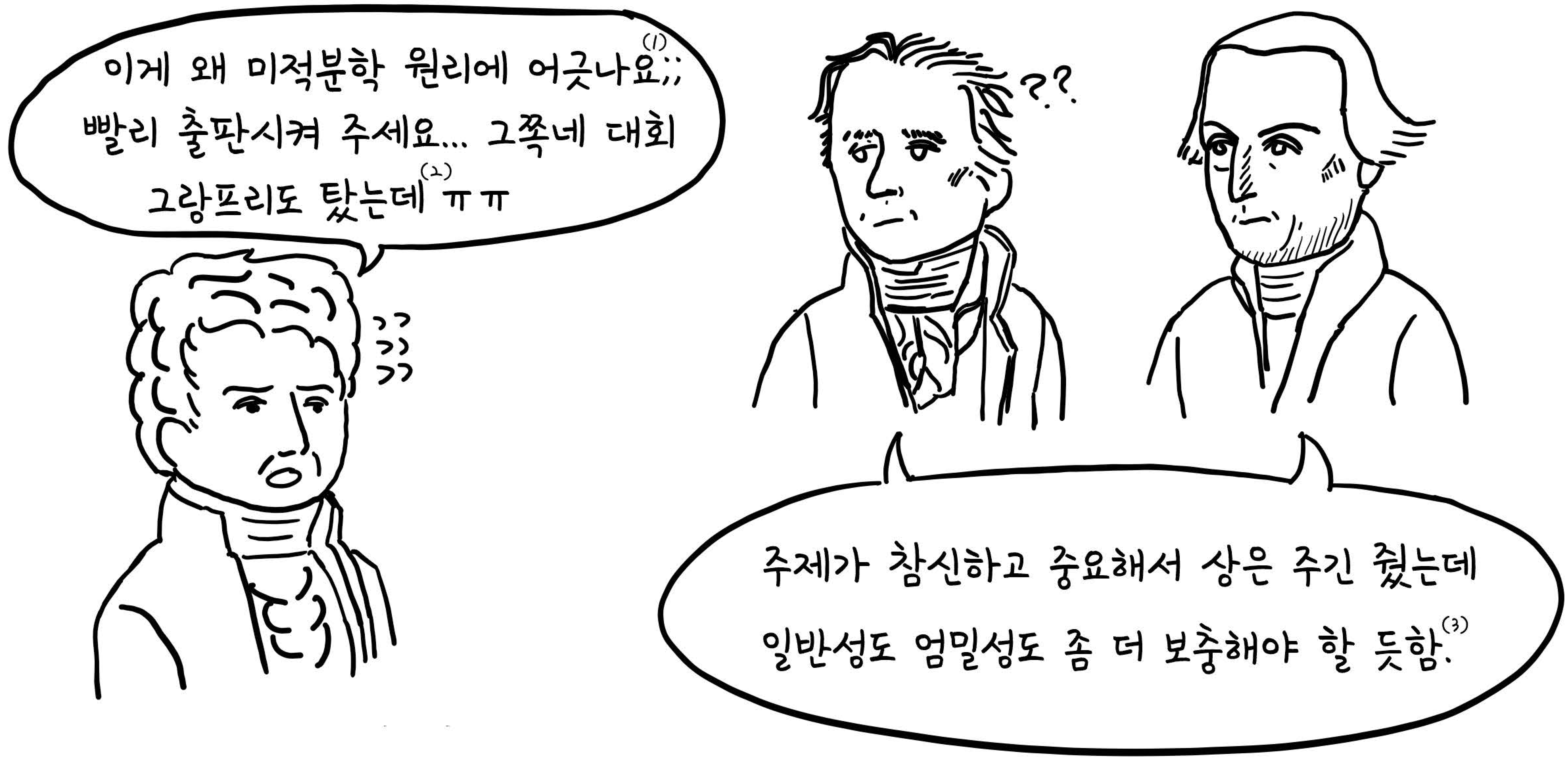
$$\overset{!}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)y}\,dy=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\cdot \bigcirc \leftarrow \begin{cases} k=n \text{ 일 때 } a_n \\ k\neq n \text{ 일 때 } 0 \end{cases}$$

$$=2\pi a_n$$

그리고 이렇게 구한 급수에 다른 변수 담당인 함수를 곱해서, 주어진 미분방정식의 해를 구하면 되는 거구요.

$$\nabla^2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-kx}\cdot e^{iky}\right) \overset{!}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \nabla^2\left(e^{-kx} e^{iky}\right)=0$$

꽤 그럴듯하지 않나요? 하지만 푸리에의 논문은 평가에서 통과되지 않았습니다. 심사위원이었던 라그랑주와 라플라스가 논리 전개에 의문을 가졌거든요. 사실, 푸리에에게는 두번째 기회가 있었습니다.



1810년, 학사원에서 내건 상금 문제가 바로 열의 수학적인 이론 구성이었거든요. 푸리에는 자기 논문을 보강해 내서 그랑프리를 타냈지만, 여전히 심사위원들은 해당 논문의 출판은 허가하지 않았습니다.

(1) Herivel, p. 316 (2) G-G, p. 25, 453. (3) Oeuvres I, vii-vii.

동시에, 푸리에의 논문은 (심지어 출판도 못했는데!) 많은 비판을 받았습니다. 그 중에서도 비오와 푸아송이 심했는데요, 이들은 푸리에의 해법이 가장 일반적인 상황을 묘사하지는 않는다고 봤습니다. 수학적으로도 엄밀하지 못하다고 생각했고요.

이런 공격 속에 푸리에는 결국 자력으로 <열의 해석적 이론>이라는 책을 1822년에 써냅니다. 기존 논문을 보강한 형태로요. (참고로, 푸리에의 1811년 논문은 결국 1819-22년에 출판되었습니다)

(1) S. D. Poisson, *Extrait d'un mémoire sur la distribution de la chaleur*. J. Phys. Chim., 80(1815), 441

과연 푸리에의 이론에서 어떤 부분이 비판을 받게 되었을까요? 푸리에가 당시 수학자들에게 던진 화두를 다음 시간부터 알아보겠습니다.
참고문헌입니다! (첫 세 개는 같은 논문의 다른 버전이에요)
Primary source :
- J. Fourier, *Mémoire sur la propagation de la chaleur* (1807, unpublished), ver. in G-G.
- J. Fourier, *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. Mémoire de l'Académie Royale des Sciences, 4 (1819-20); 185-555, 5 (1821-2), 143-246.
- S. D. Poisson, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*. Bull. Soc. phil, 1 (1808), 112-16 (ver. in Oeuvres, 2, 213-21).
Secondary source :
- I. Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830*. MIT Press, 1972.
- J. Herivel, *Joseph Fourier. The Man and the Physicist*. Oxford, 197).
- A. Wheeden, R. L. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis* (1st ed). CRC Press, 1977.
- G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed). Wiley, 1999.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction* (Princeton Lectures in Analysis Vol 1). Princeton University Press, 2003.
푸리에의 삶과 업적 둘 다를 보고 싶다면 Herivel 책을! 원본 논문을 읽고 싶다면 G-G 책을 보시면 됩니다.
그럼, 다음 화에서 다시 뵙겠습니다!