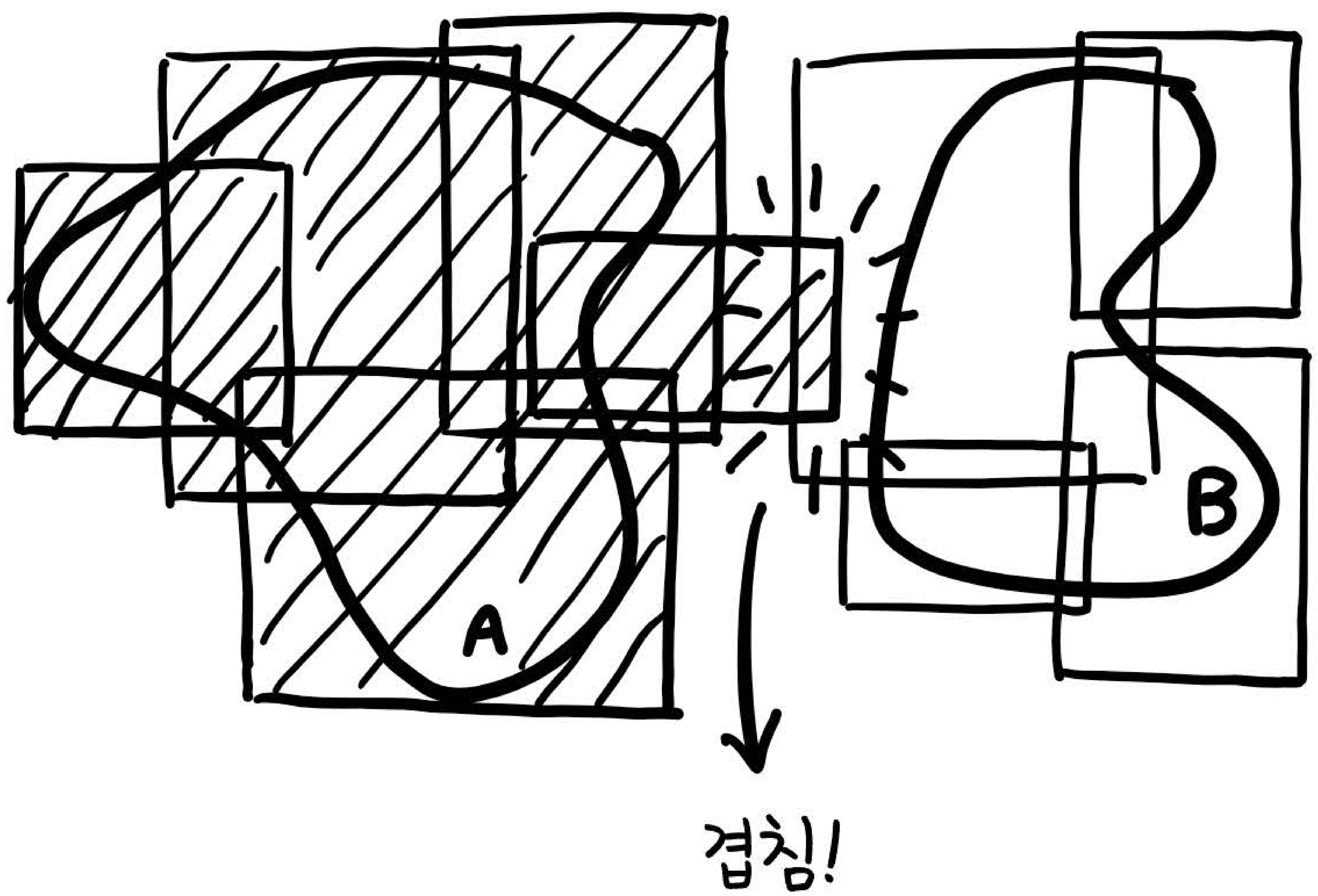
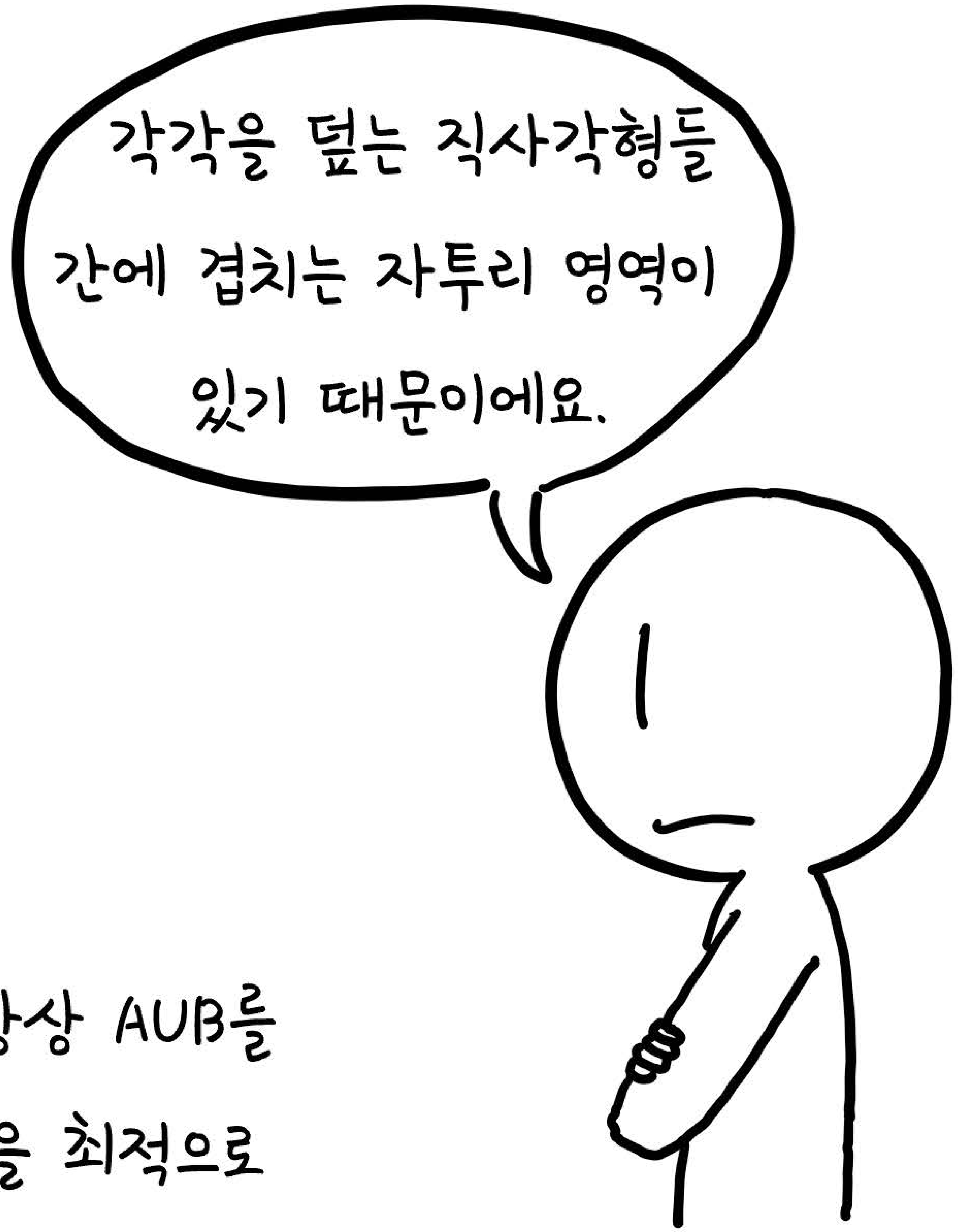
Z z z
해석학하는 만화 4
~ 하나, 둘, 많이 ~

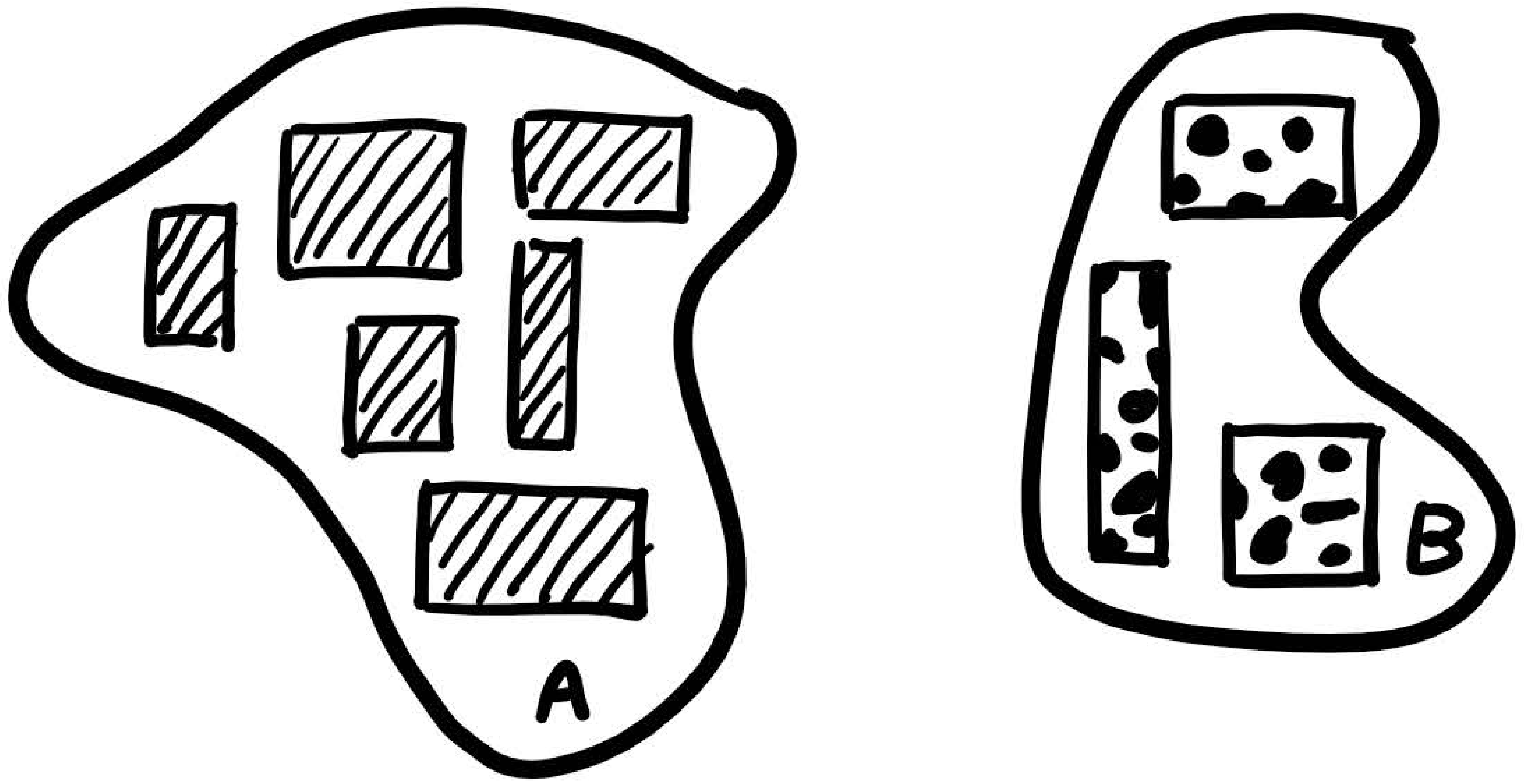
지난 시간에는 "직사각형 유한 개로 덮는" 방식으로 넓이를 재는 것에 대해 얘기했죠. 안타깝게도 아직 "넓이 합 = 합집합 넓이"가 보장되지 않았어요.

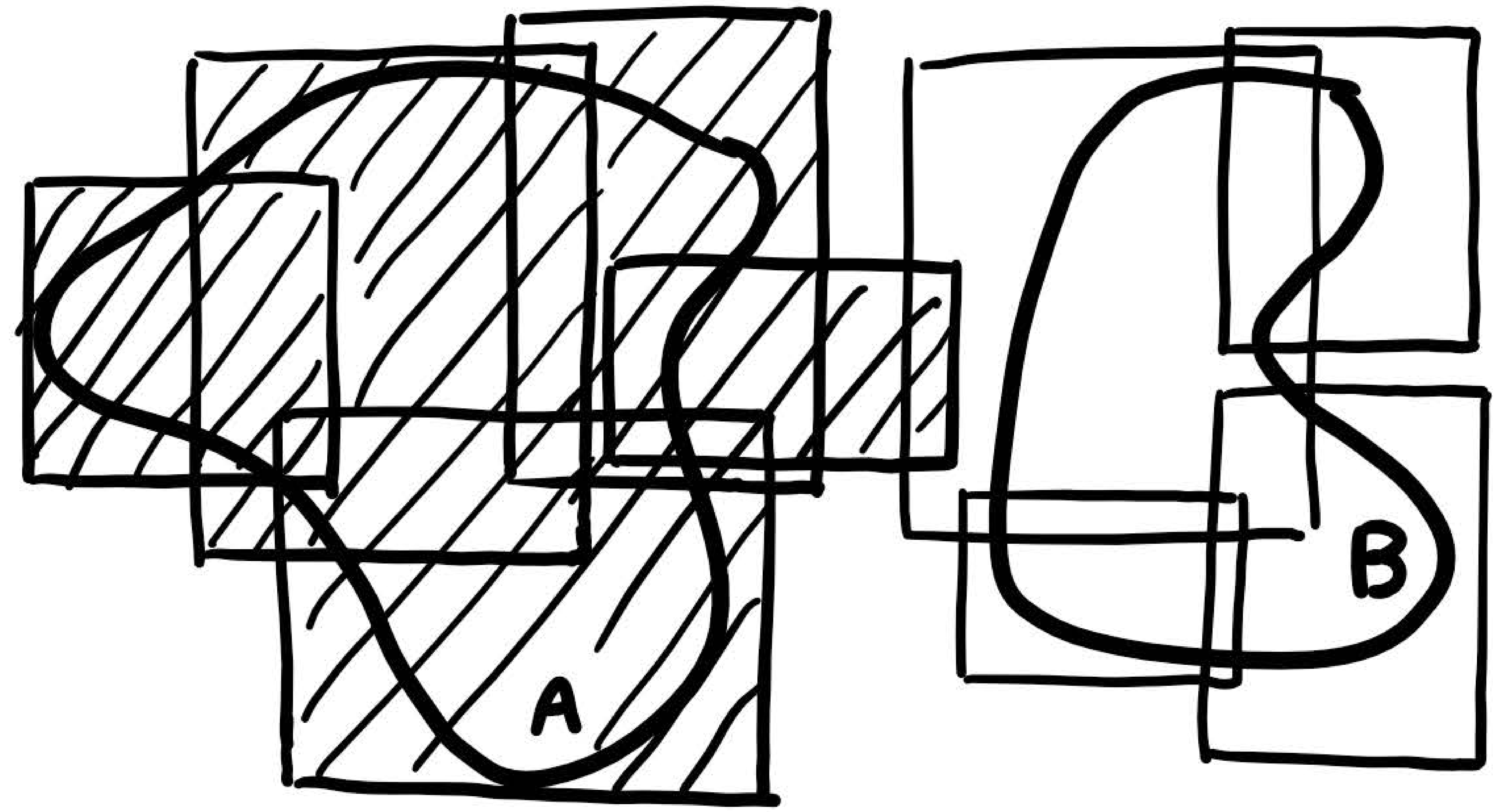




A를 덮는 직사각형 덮개 + B를 덮는 직사각형 덮개로는 항상 A∪B를 다 덮지만, 두 덮개가 일정 면적 이상 겹치면 A∪B의 면적을 최적으로 나타내지 않겠죠.

그런데, A와 B가 서로 안 겹친다면 A와 B에 각각 "포함되는" 직사각형 더미들도 서로 겹치지 않겠죠. 걔들을 이용하면 되지 않을까요?





: A 에 포함되는 직사각형들

: B 에 포함되는 직사각형들

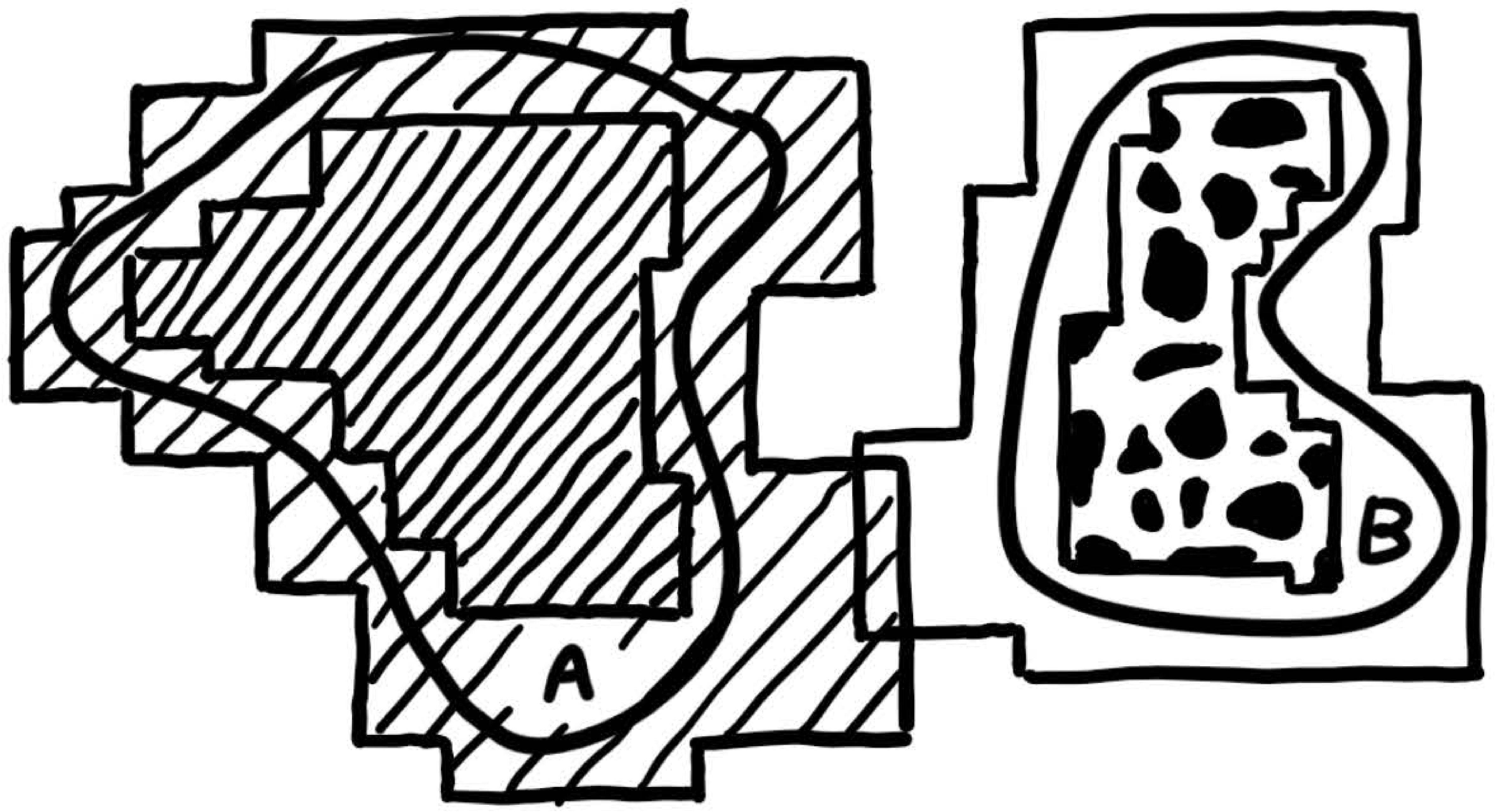
: A를 덮는 직사각형들

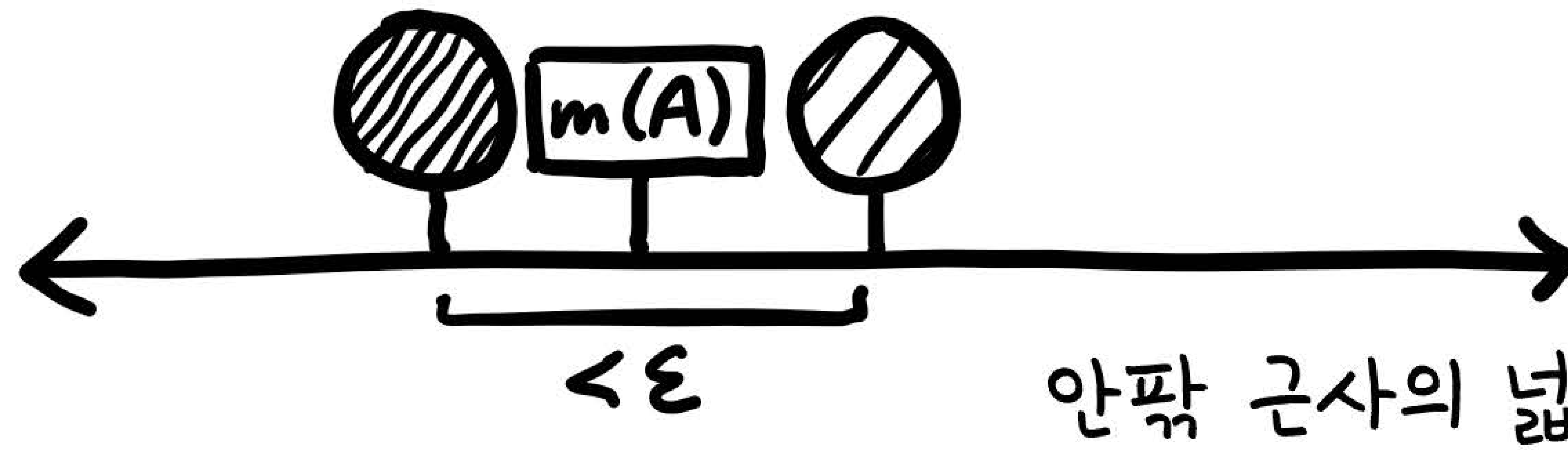
: B를 덮는 직사각형들

여기서는 $A \cup B$가 , 를 포함하니, 걔네 면적 = + 보다 넓다는 걸 알 수 있죠.

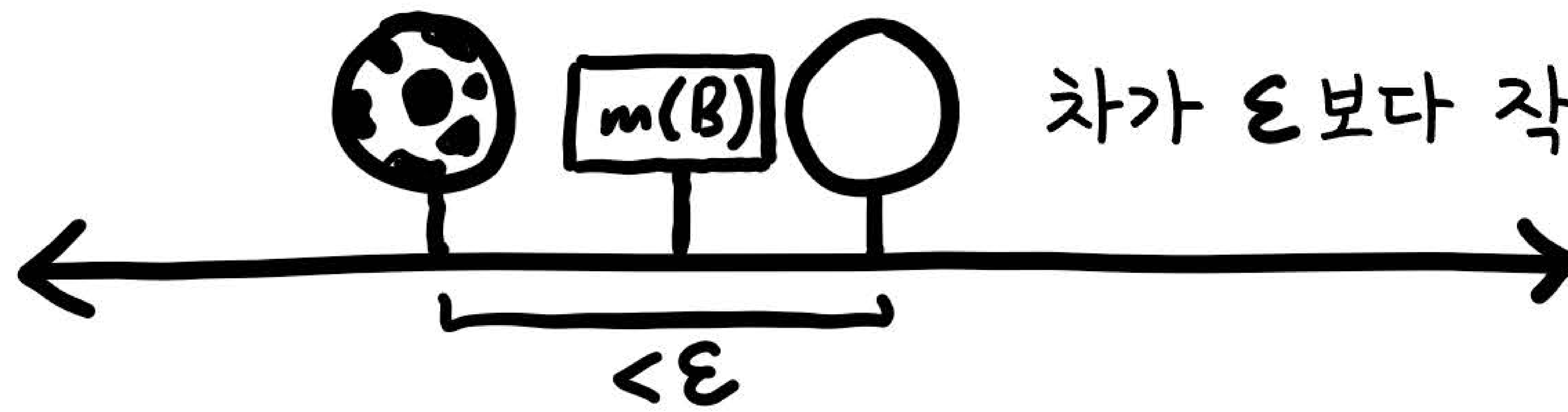
이때 $A \cup B$ 넓이가 + 보다 작다는 건 이미 설명했구요.

그러니 이렇게 생각해 봅시다. A, B가 안팎에서 직사각형 유한 개의 합집합으로 둘러싸이는 상황이고,

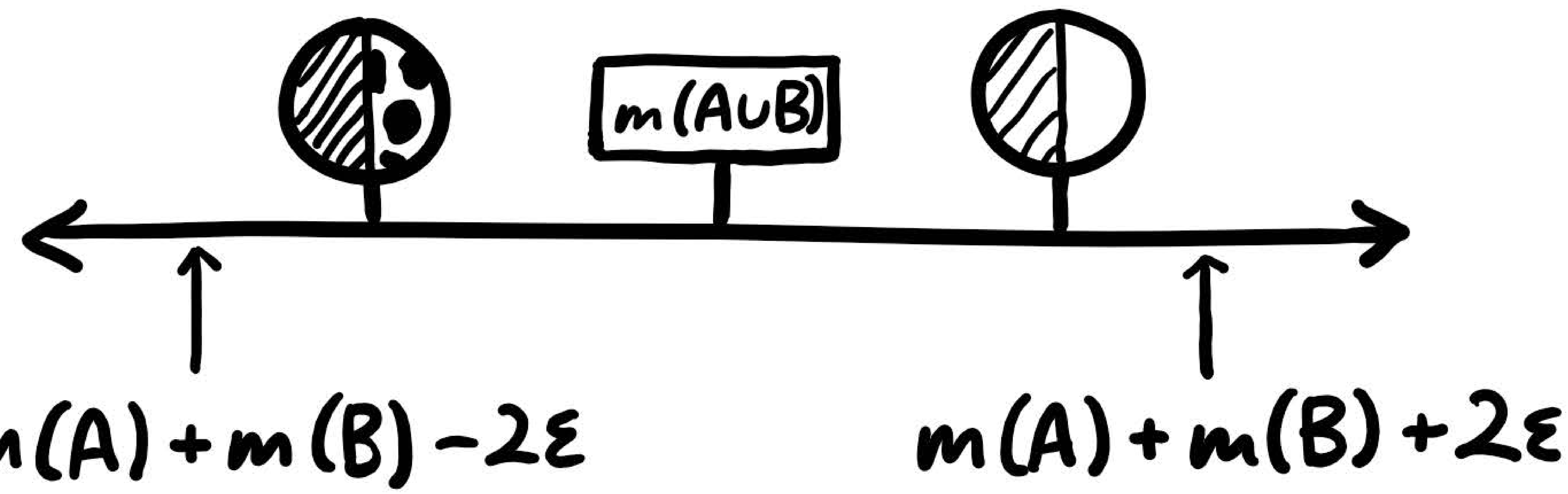




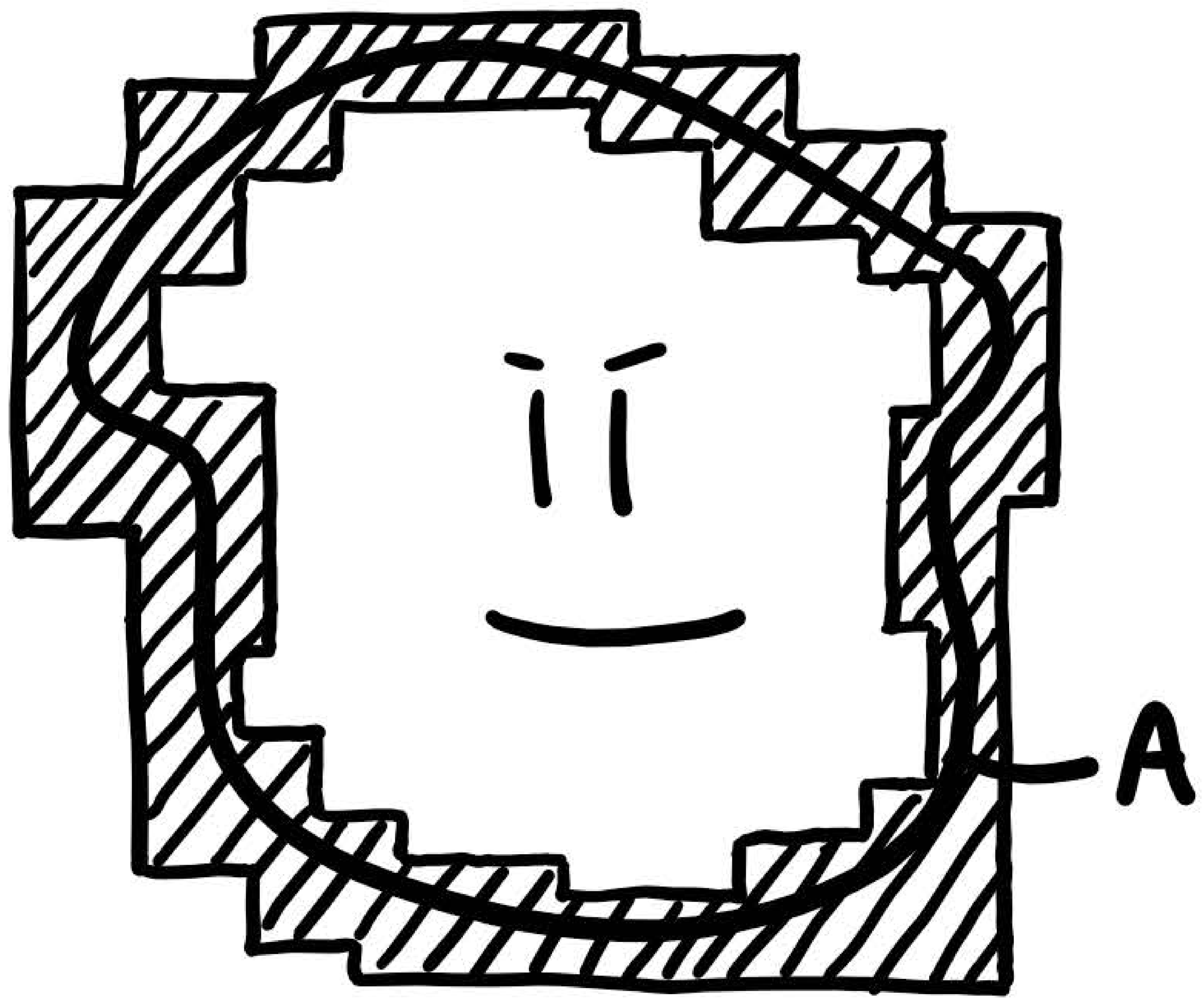
안팎 근사의 넓이 차가 ε보다 작으면,

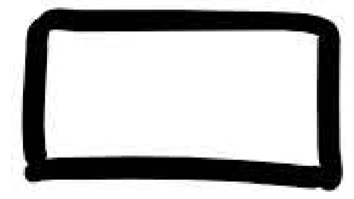
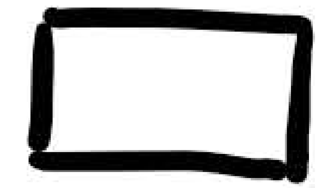
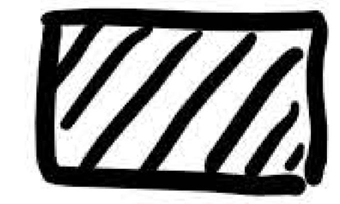


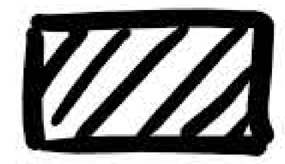
이런 부등식을 얻을 수 있죠. 여기서 ε을 0으로 보낼 수 있으면, m(A)+m(B) =m(A∪B)를 증명한 셈이 됩니다.



이런 이유에서, 우리는 다음과 같은 집합에만 집중하려고 합니다.

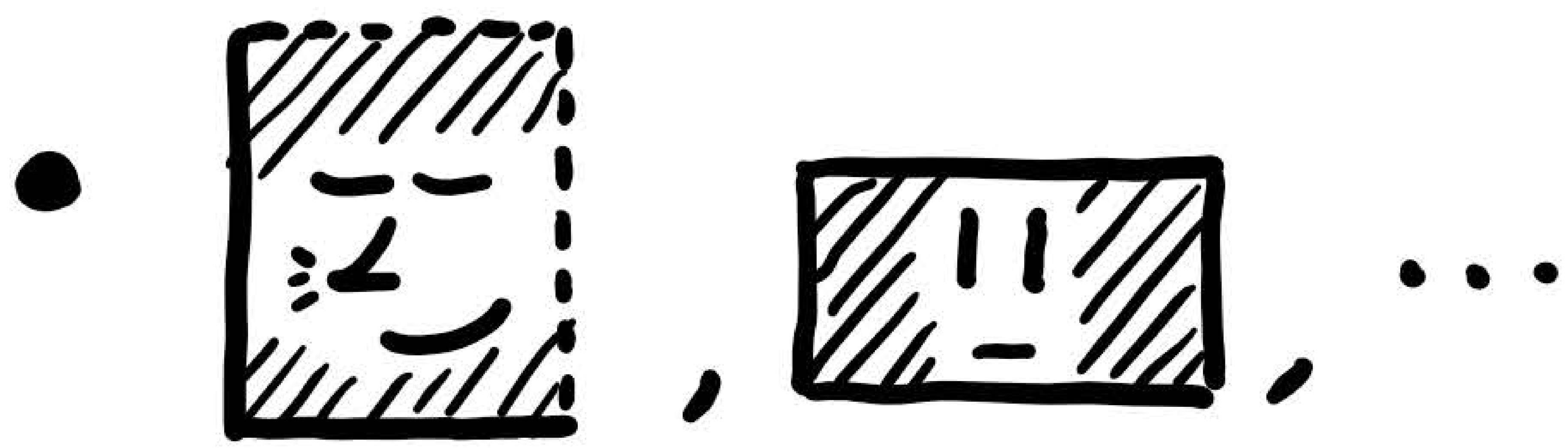


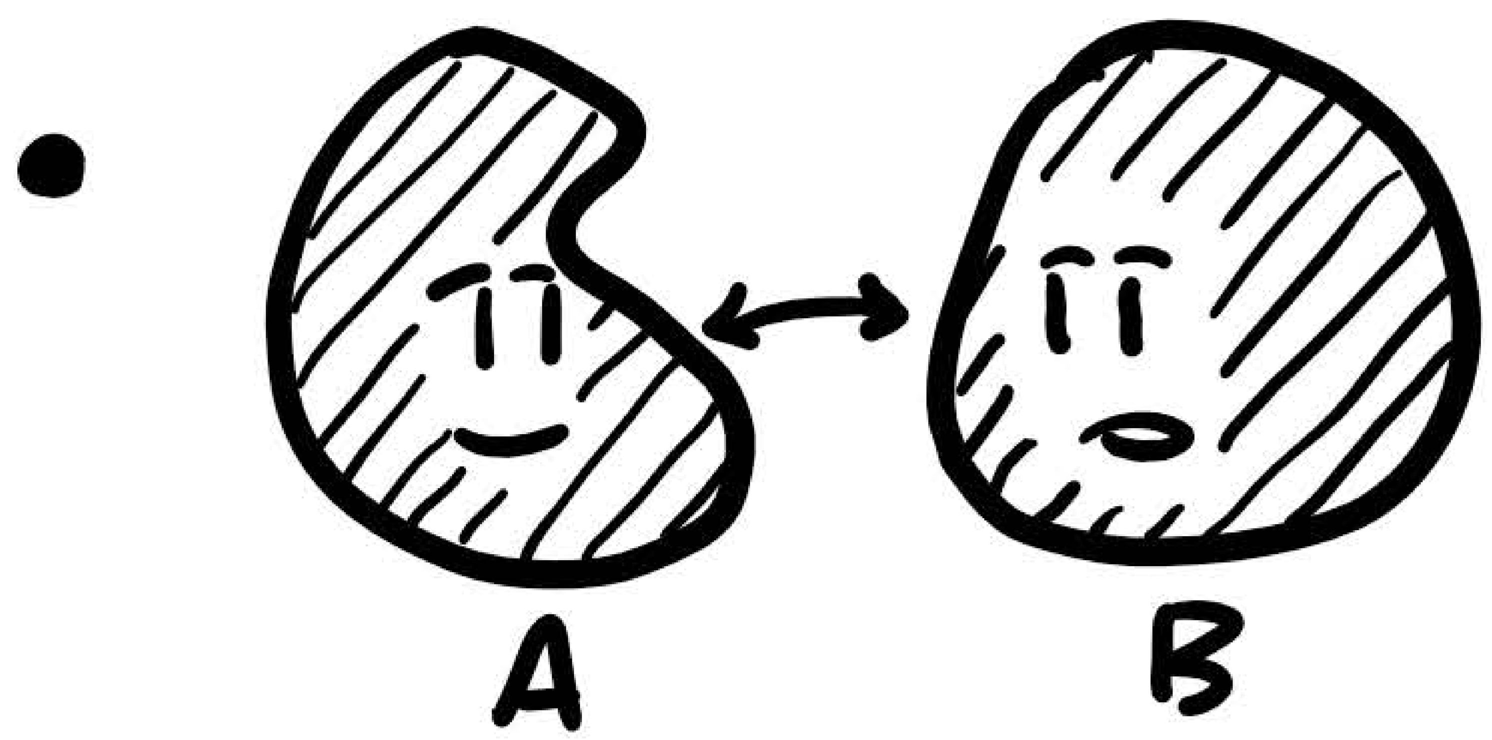
①  의 상한 =  +  의 하한인 거나,

②  → 0 인 거나 동치인데요, 이때

$\boxed{m(A)}$ 이 값을 A의 조르당 측도 (Jordan measure)라고 정의합니다.

여기서 우리는 이미 중요한 두 성질을 관찰했는데요,

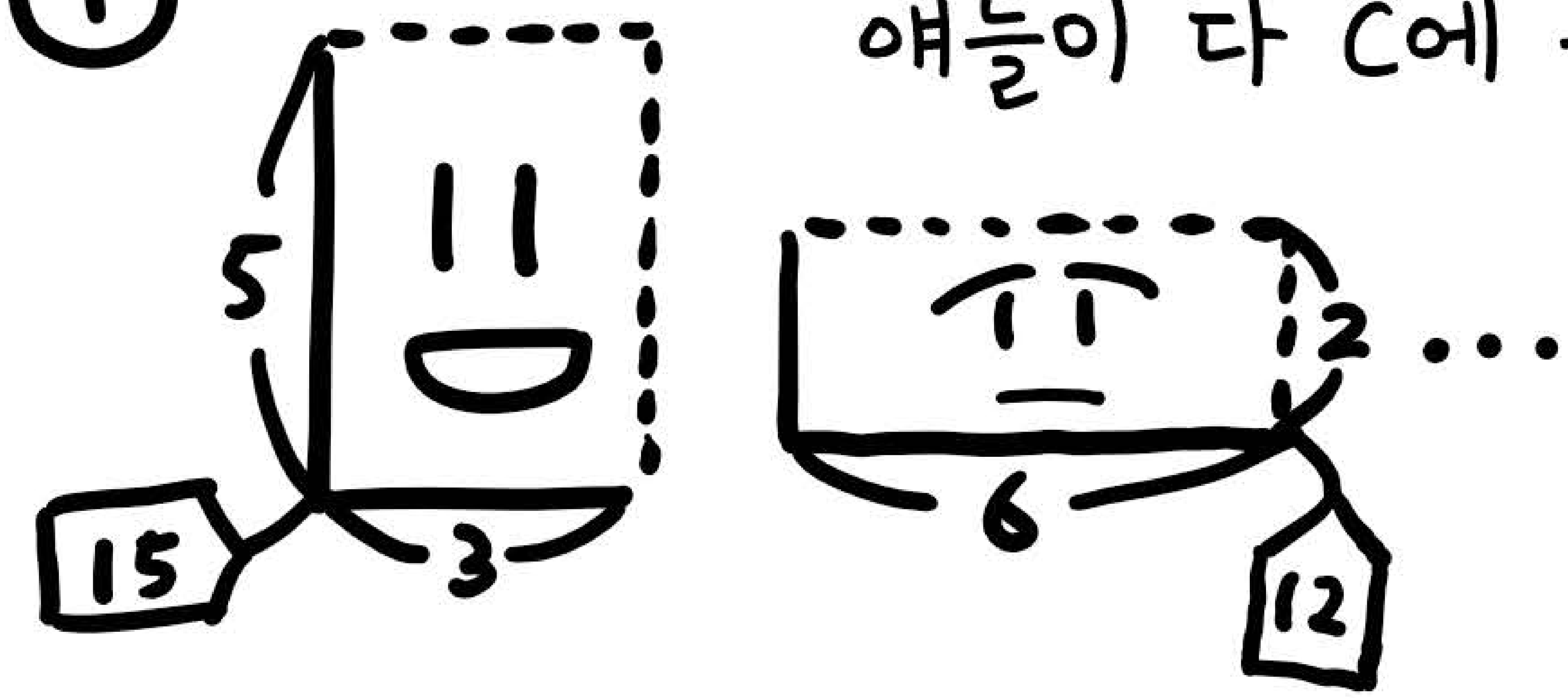
-  이런 직사각형들은 모두 조르당 센스에서 합격이고, 그 넓이는 (가로X세로)죠.

- 

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$
그리고 이렇게 유한 합 성질이 성립합니다.

사실 역으로도 생각할 수 있어요. 평면의 부분집합 중 몇몇 개를 모은 모임 C와, C의 원소 각각에 "넓이"를 주는 함수 m을 생각합시다. 만약,

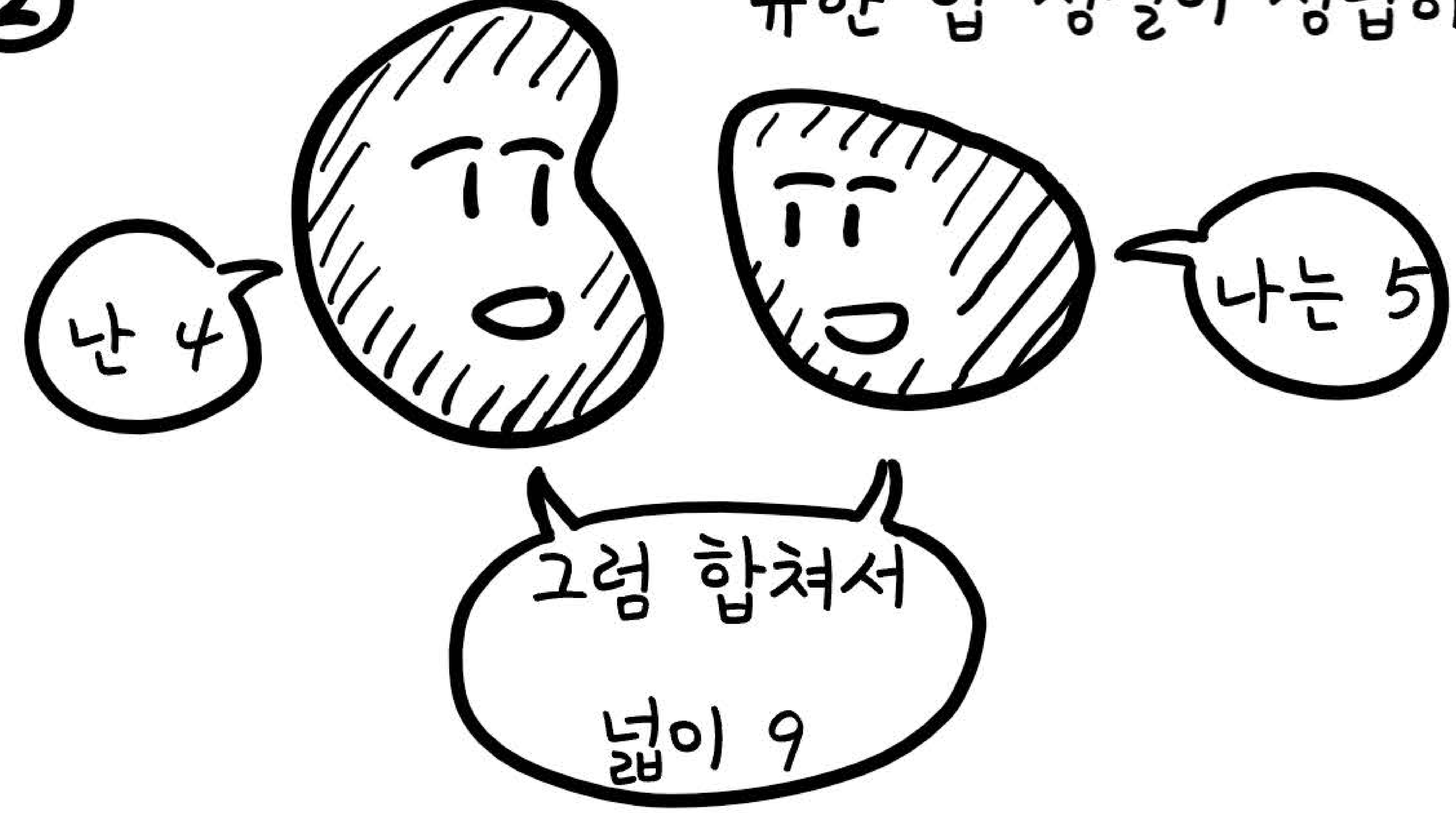
①



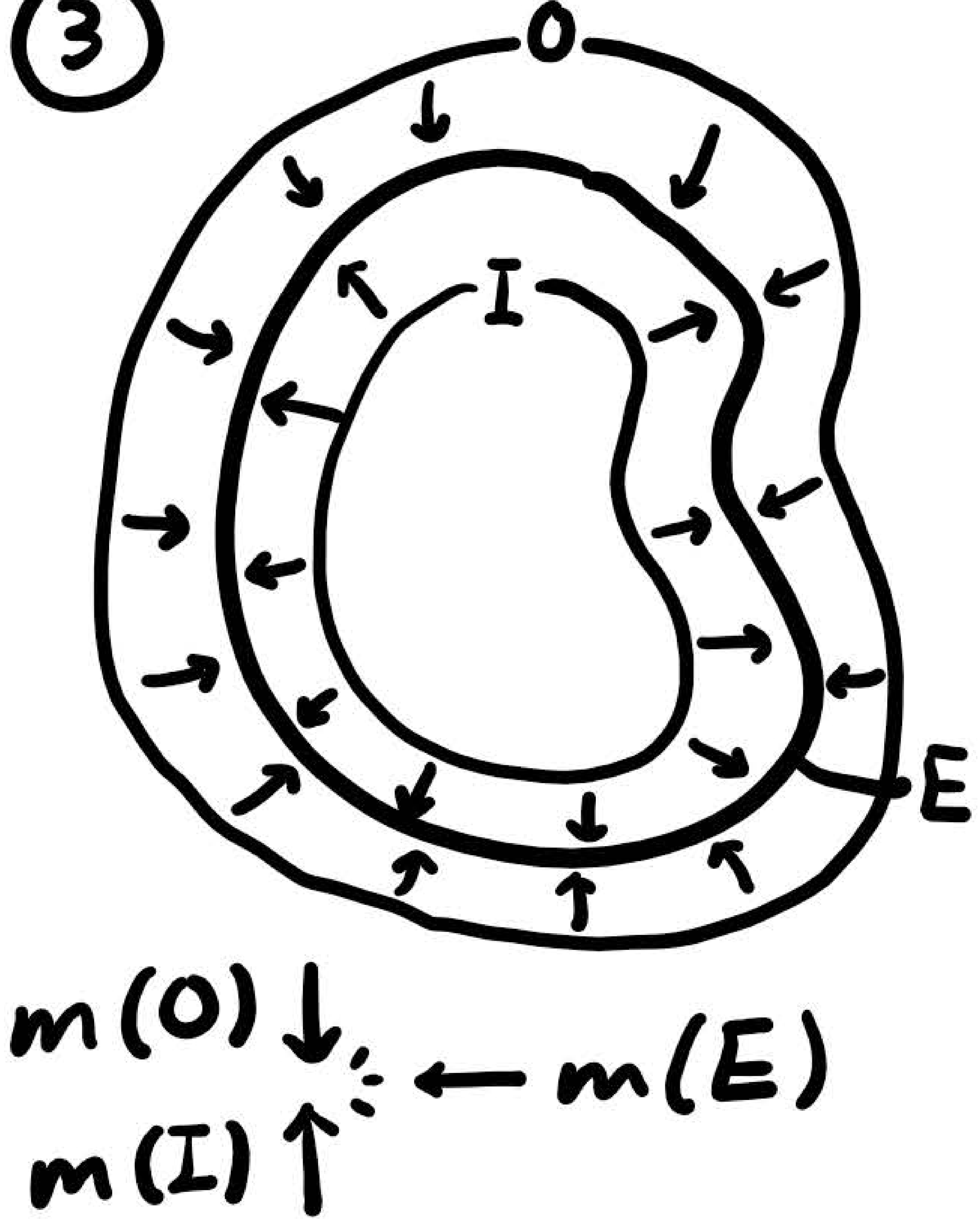
얘들이 다 C에 들어가고,

②

유한 합 성질이 성립하며,



③



안팎에서 C의 원소로 근사되는 녀석도 역시 C의 원소라고 하면,

이런 C에는 항상 Jordan 가측인 집합들이 모두 들어가 있어야 해요. 당연히 넓이 값도 Jordan 측도 값과 일치하구요.

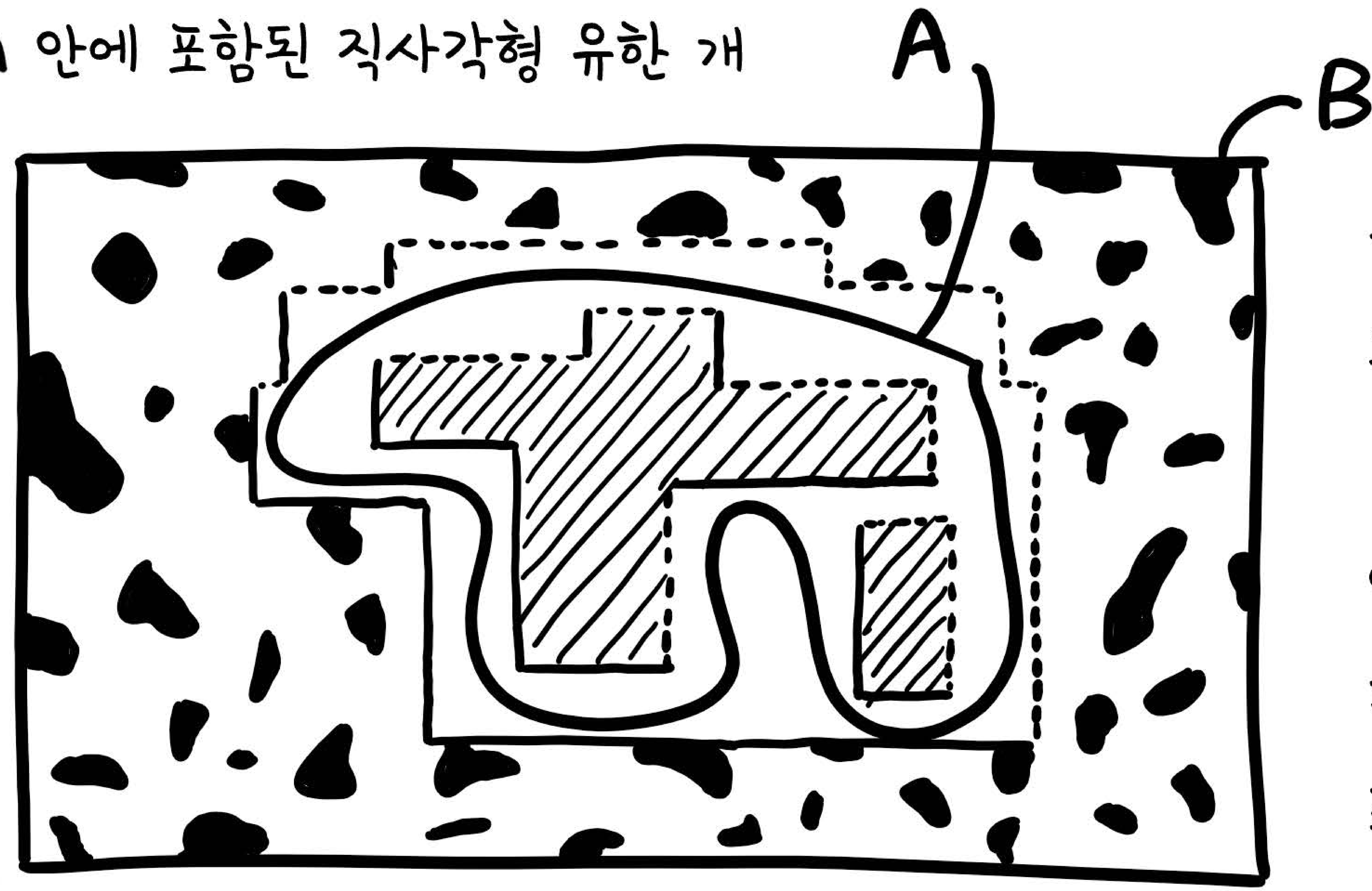
여기다가 보너스 성질을 하나 더 설명드릴게요. 만약 어떤 영역 A가 직사각형 B 안에 쏙 들어가 있다면,

: A 안에 포함된 "직사각형 유한 개"

: A, B\A 경계에 걸친 직사각형 유한 개

: B\A 안에 포함된 직사각형 유한 개

A가 조르당 가측이라는 얘기는 하얀색 완충 지대 크기를 원하는 만큼 작게 만들 수 있단 건데요,



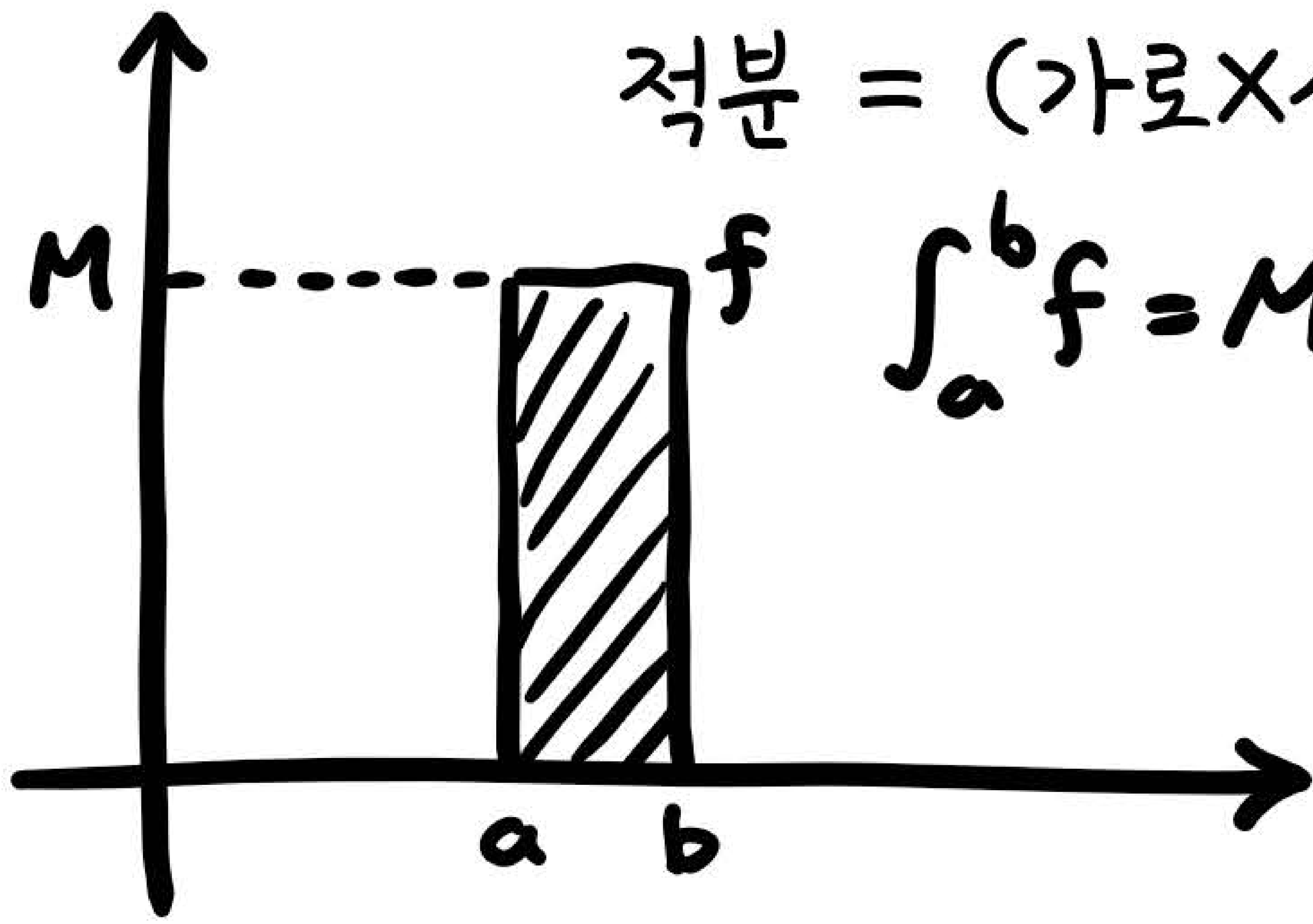
근데 B\A 입장에서도 그건 마찬가지 아닌가요?

아, 그러니까 A가 조르당 가측이라는 것과 B\A가 조르당 가측이라는 건 동치군요.

이 조르당 측도에 의거해서 적분을 하는 것이 바로 리만 적분입니다.

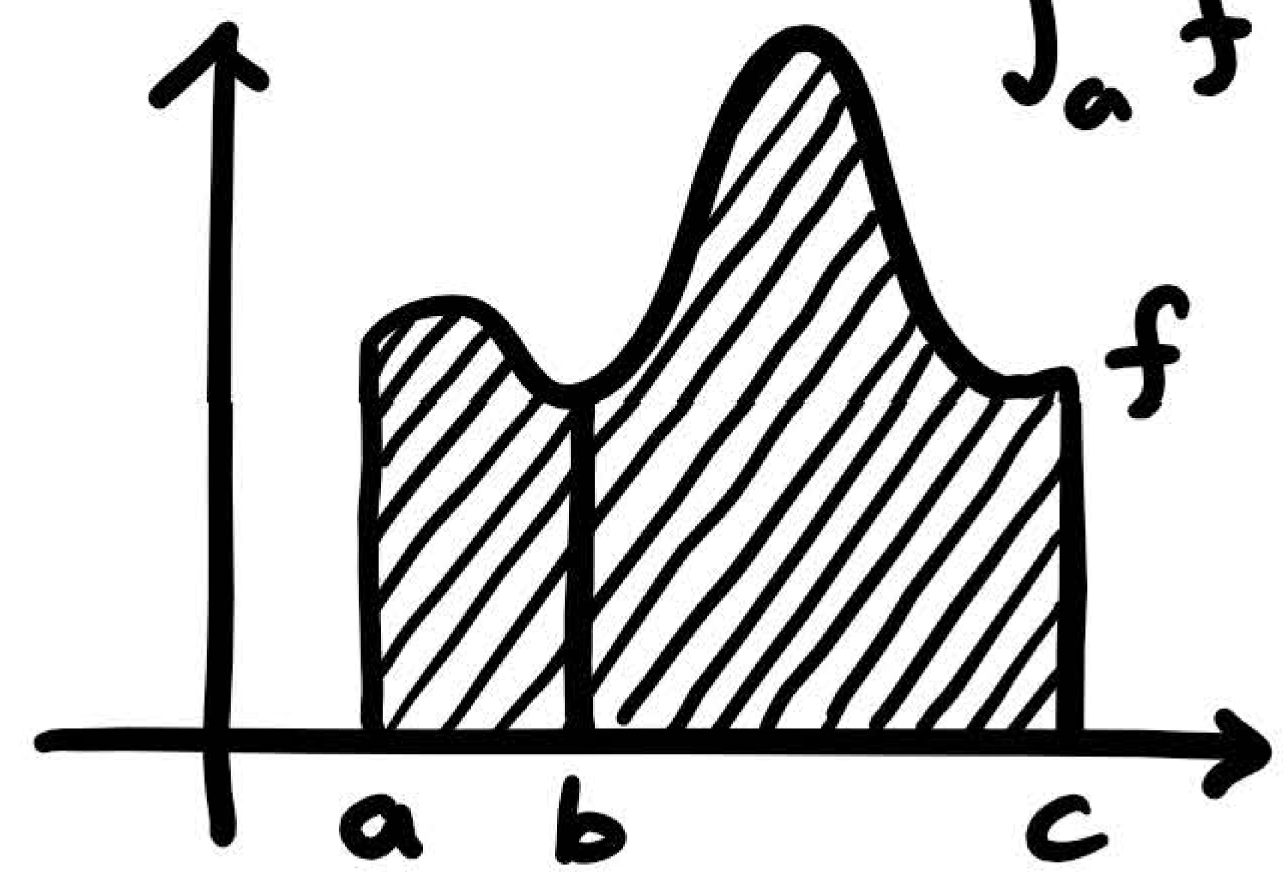
① 만약 어떤 적분 이론에서 상수함수의 적분 = (가로X세로)이고,

$$\int_a^b f = M(b-a)$$

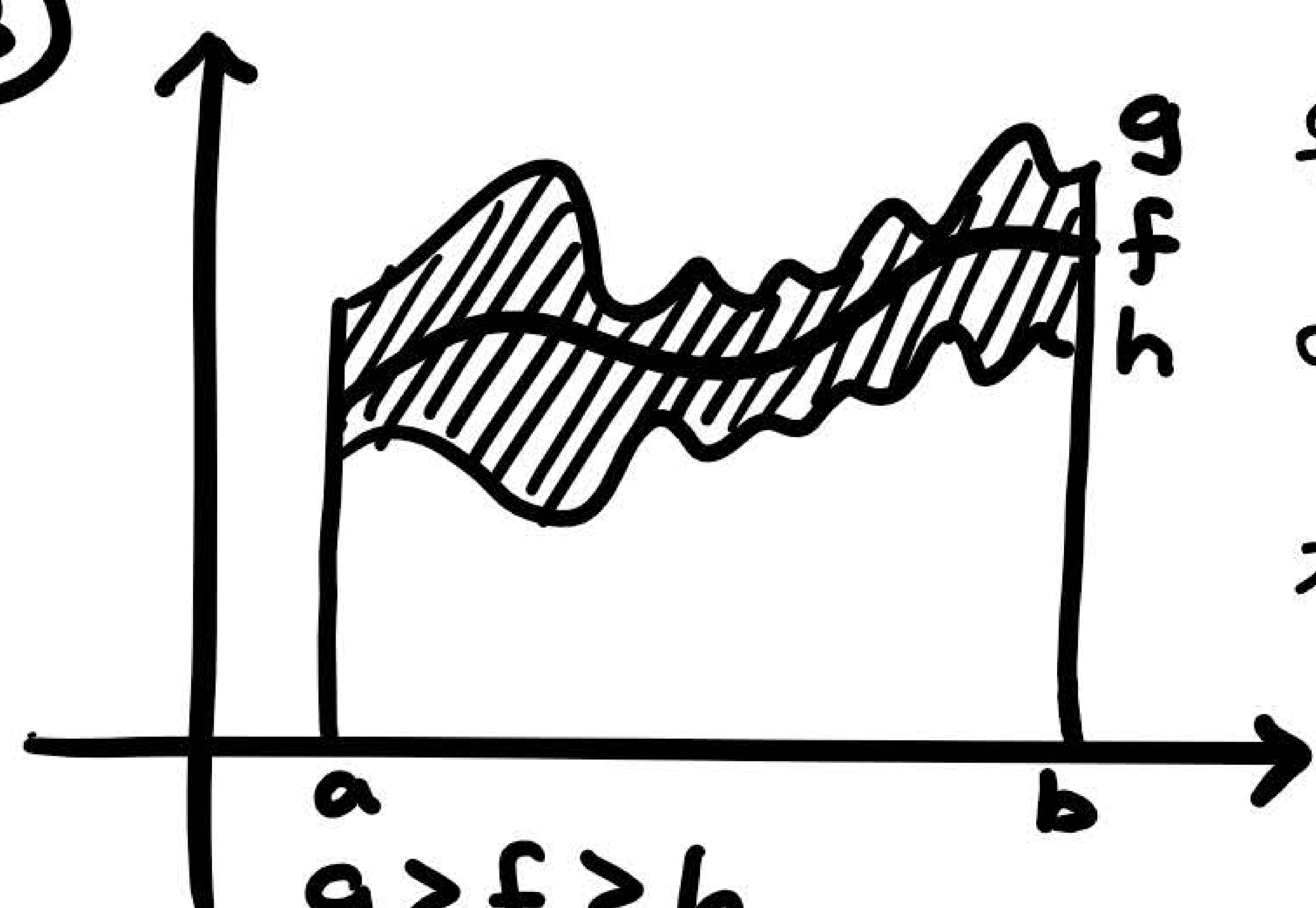


② "유한 합 공식"이 성립하며,

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$



③

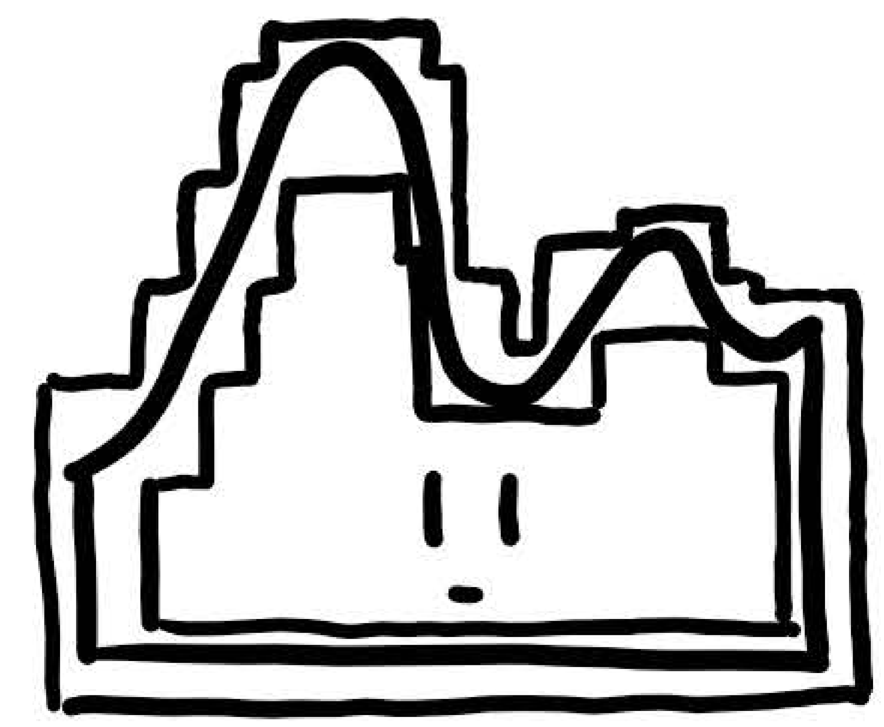


$g \geq f \geq h$,

$$\int_a^b g \downarrow \quad \int_a^b h \uparrow \quad \vdots \leftarrow \int_a^b f$$

위아래 근사의 넓이 극한값이 일치하면 사이에 낀 함수도 적분 가능하다면,

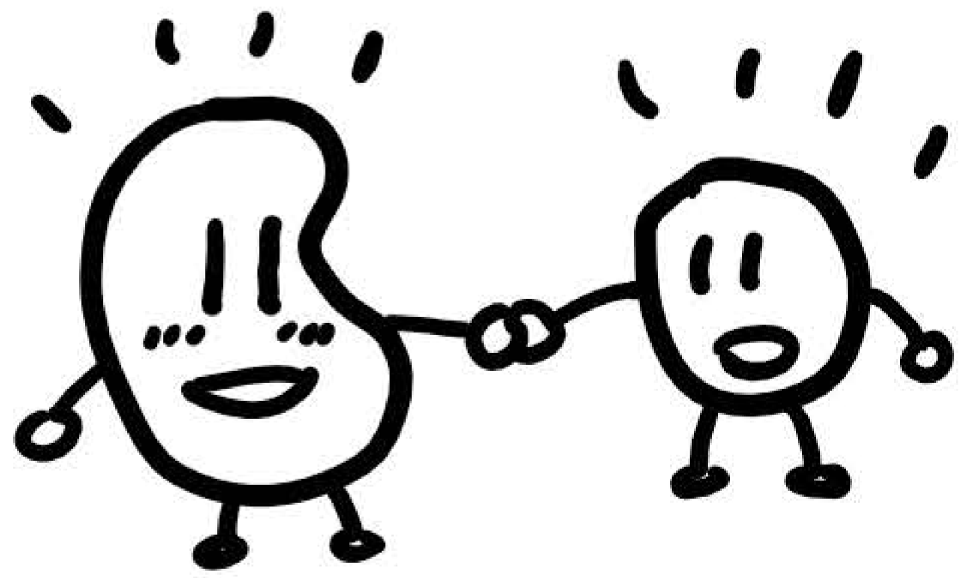
모든 리만 적분 가능 함수는 이 이론에서도 적분 가능하며,



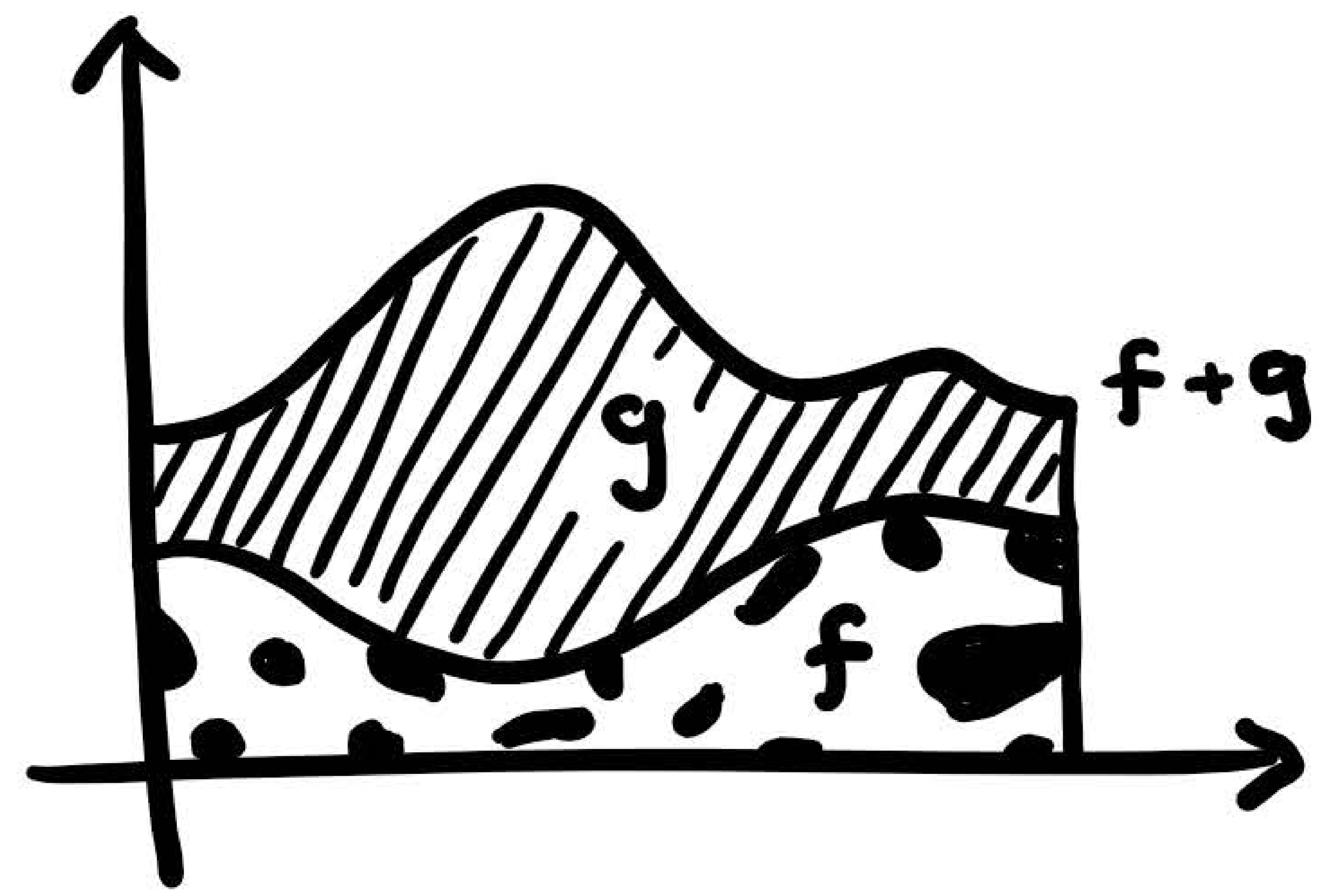
그 적분값도 리만 적분값과 일치합니다.

거기다 추가로 성립하는 보너스 성질들이 있습니다.

수평 방향뿐 아니라
수직 방향으로도
"유한 합 성질"이
성립해서,

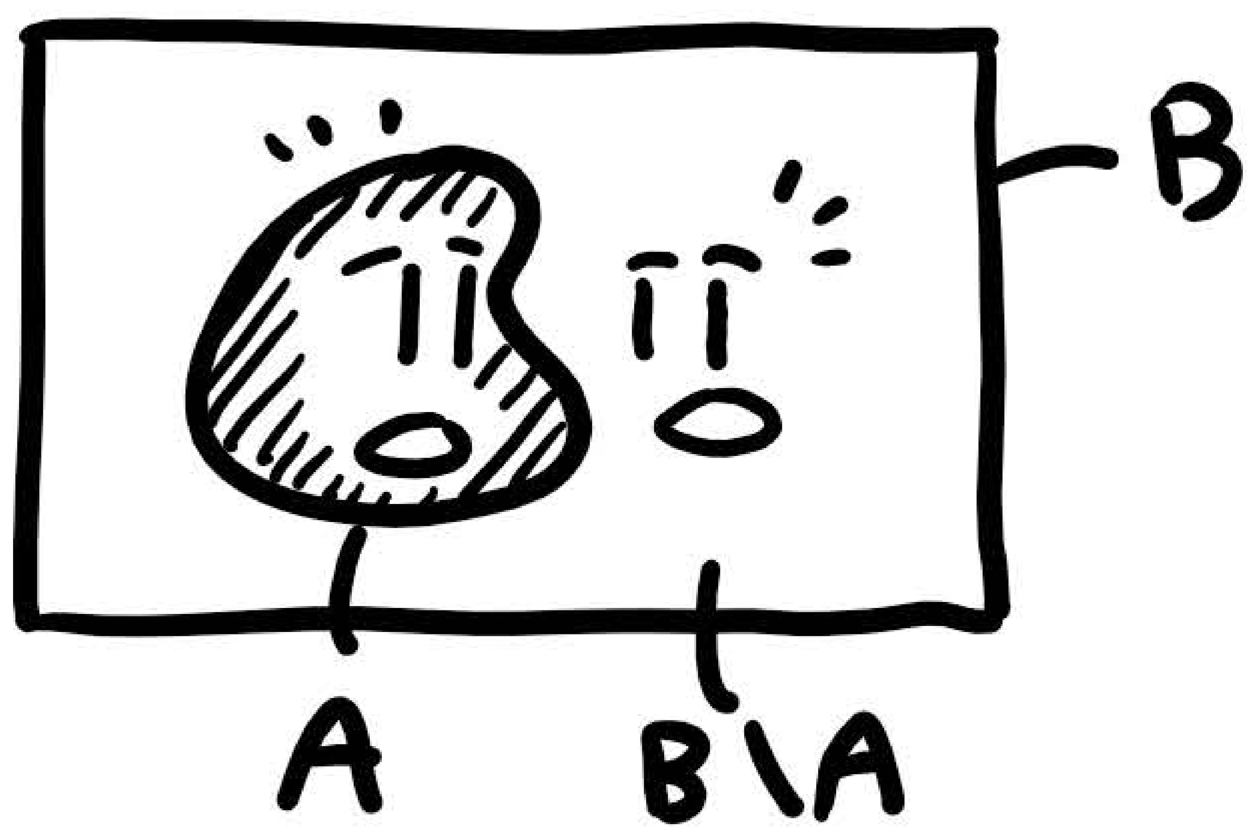


⇒

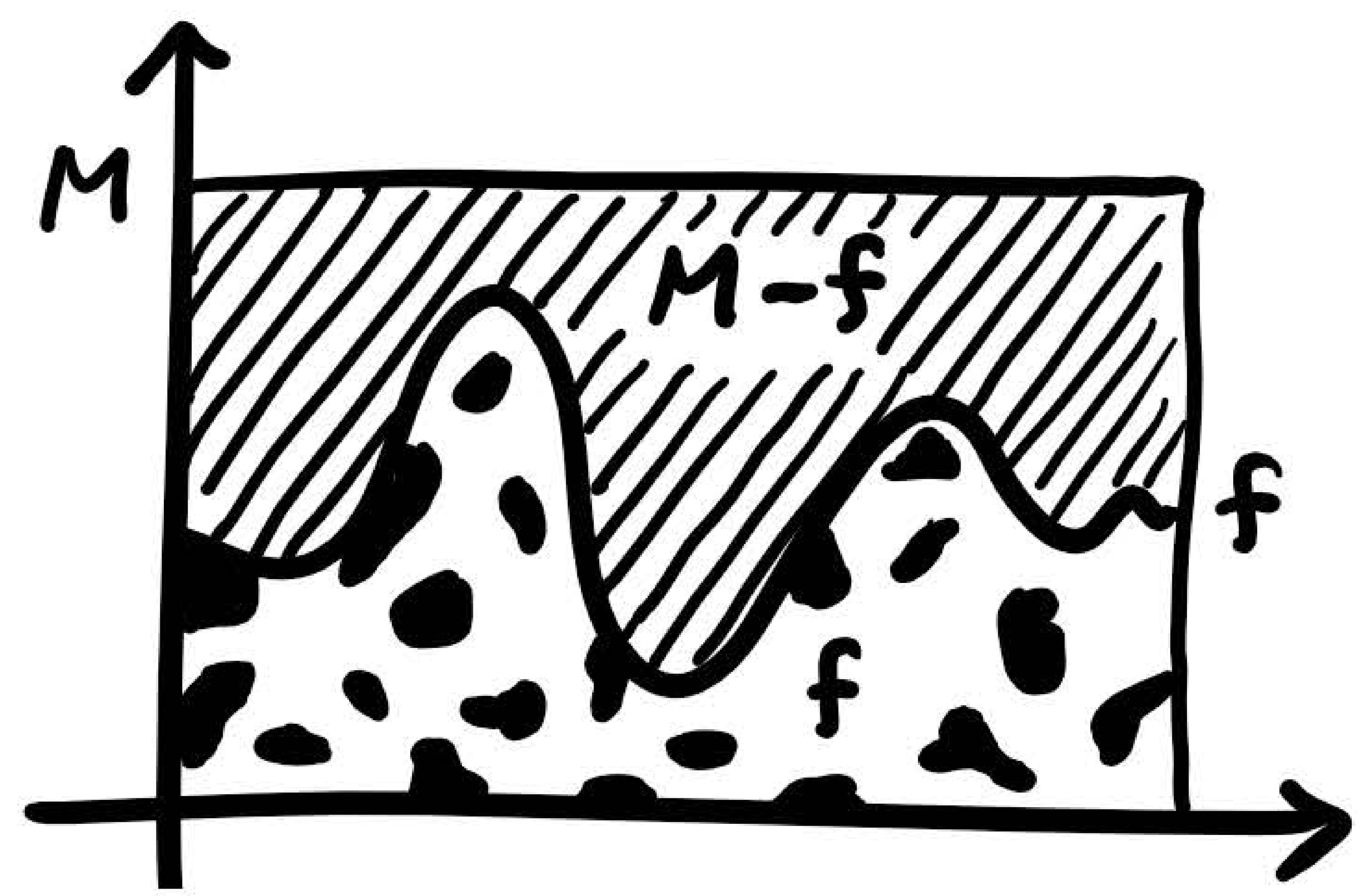


f의 적분
+g의 적분
=f+g의 적분이
성립한다는 거죠.

또 아까 관찰한
여집합에 대한
보너스 성질을
적분으로 옮겨 오면,



⇒

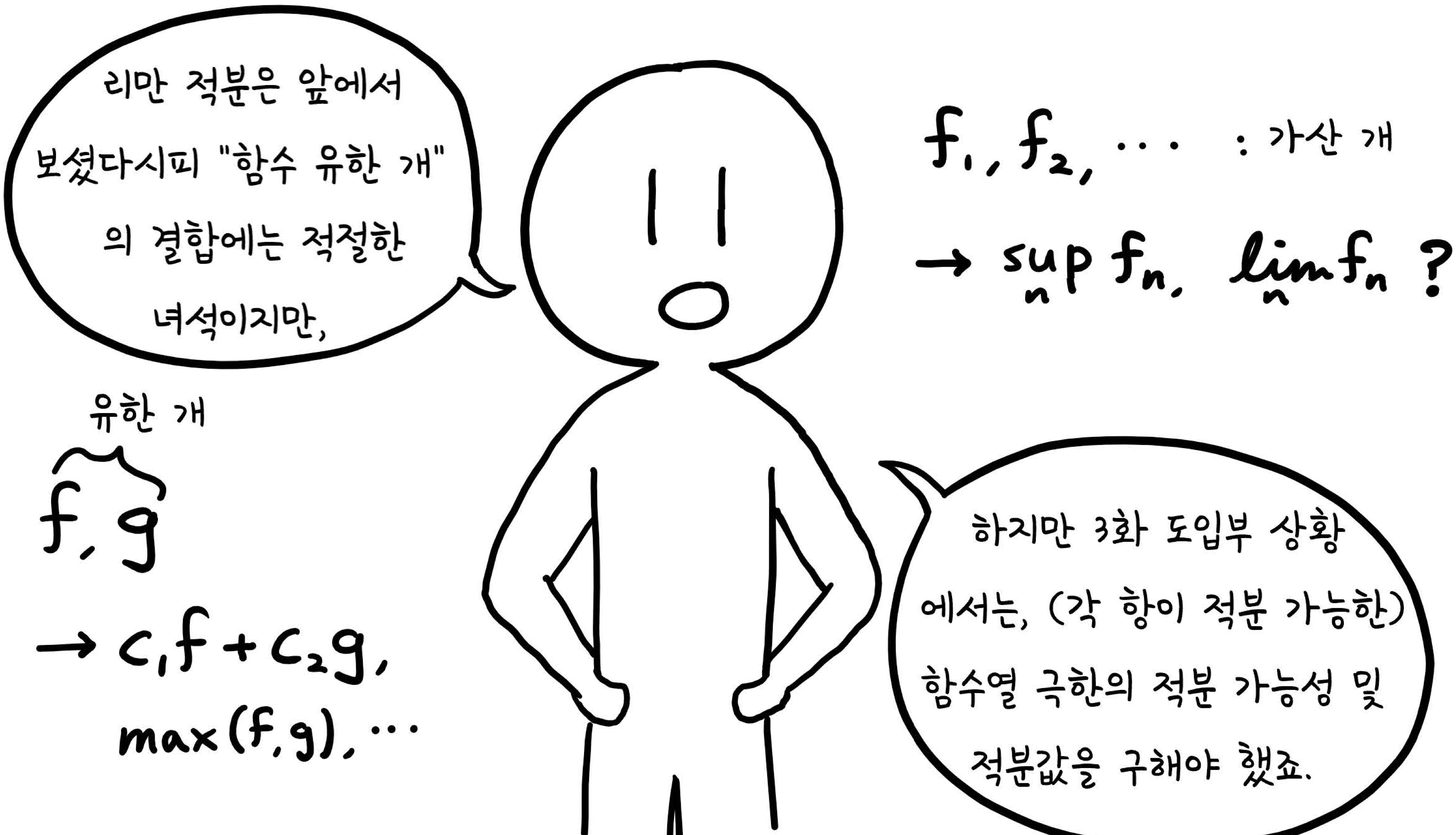


f가 적분 가능할
때 (상수)-f도
적분 가능하다는
것을 알 수 있죠.

"+, c·"

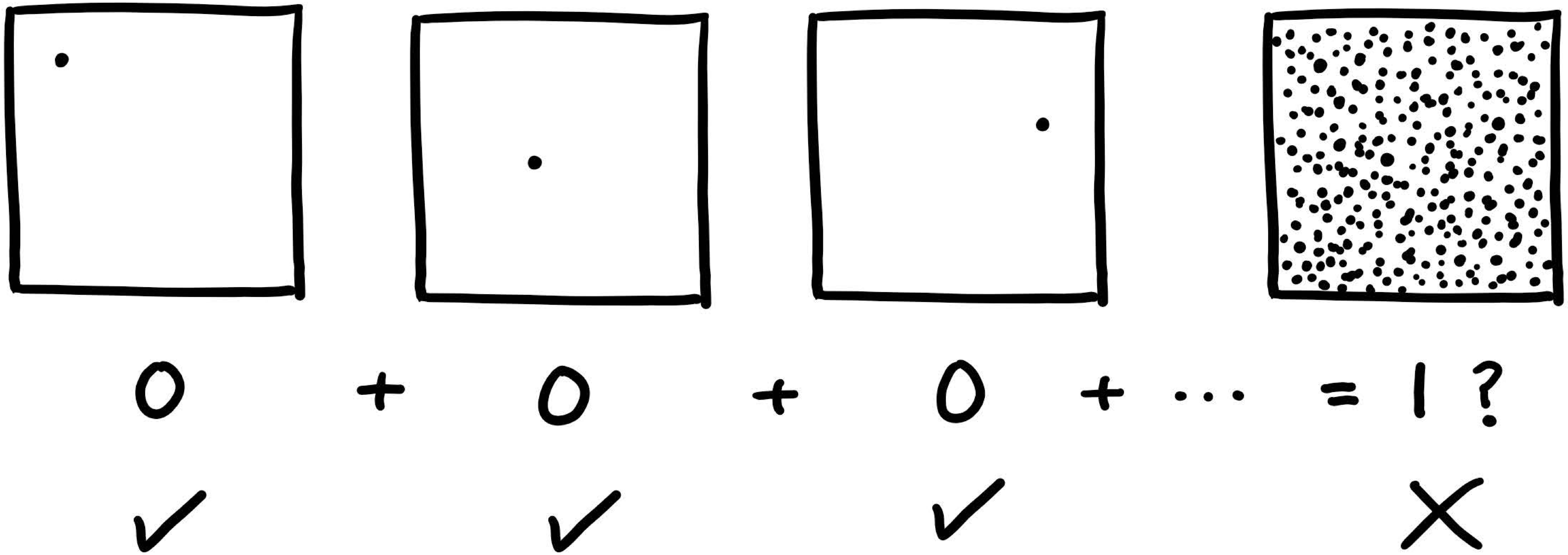
위 성질들로부터, 리만 적분이 함수의 합/스칼라배와
잘 어울린다는 것을 알 수 있습니다.

이제 세번째 방법이자 가장 핵심인 얘기를 들려드리고자 해요.



이건 자연수 개수의 함수를 결합해야 얻을 수 있는 결과이니, 리만 적분 이론과는 잘 어울리지 않아요.

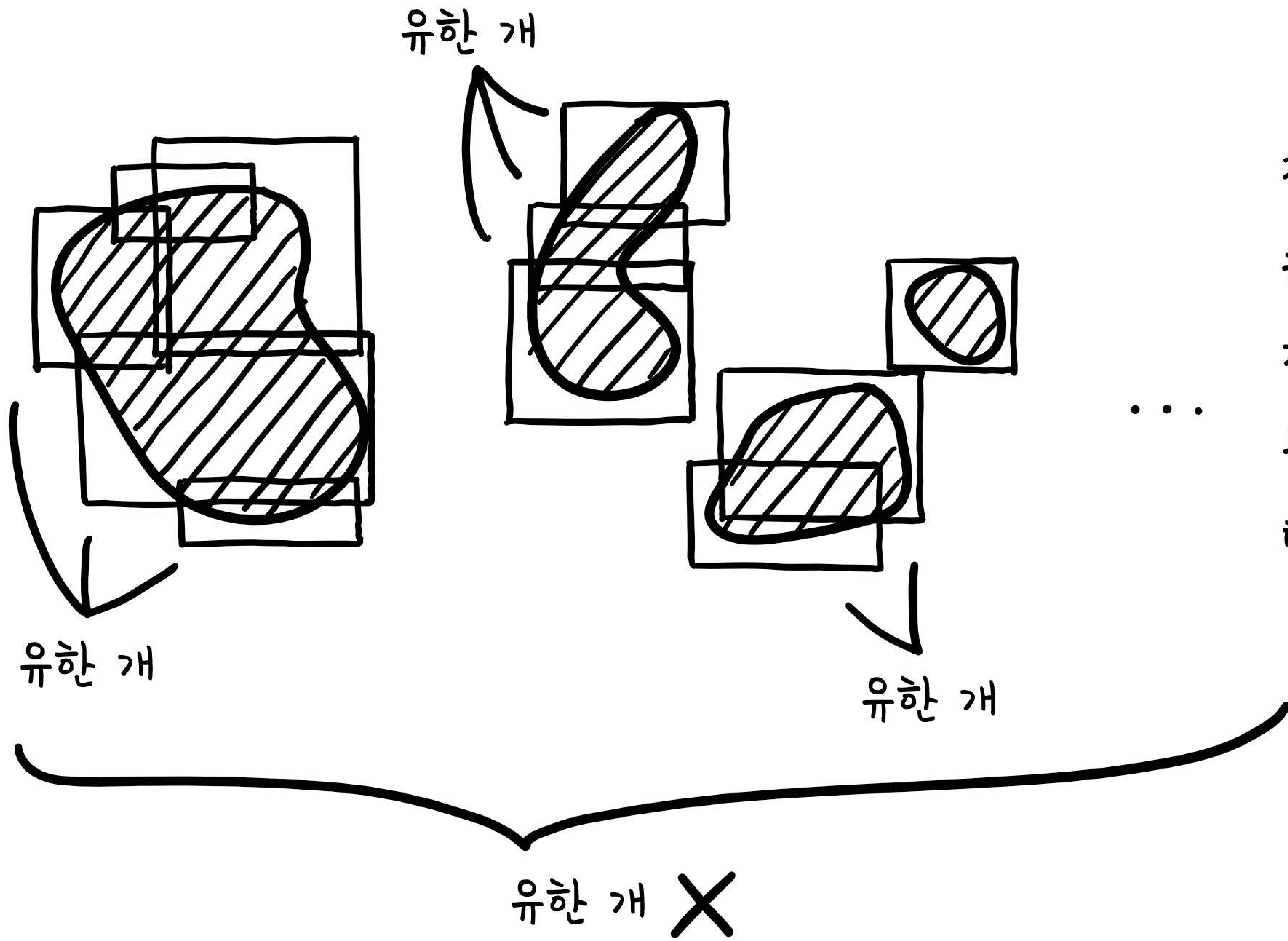
다르게 얘기하면, 조르당 측도와 자연수 개수의 집합 합집합이 잘 어울리지 않는다는 거죠. 예를 들어,



각 유리수 점은 조르당 가측인 집합이고 그 크기는 0인데, 이 집합들 하나하나를 다 모으면 조르당 외측도가 1인 집합이 나오니 합 공식이 성립하지 않겠죠. 조르당 가측인 집합도 아니구요.

이건 다르게 말해서, 조르당 측도가 집합 자연수 개의 합집합 과정과

어울리지 않기 때문이죠.



직사각형 유한 개짜리

커버를 자연수 개수만큼

가져다 놓으면 더 이상

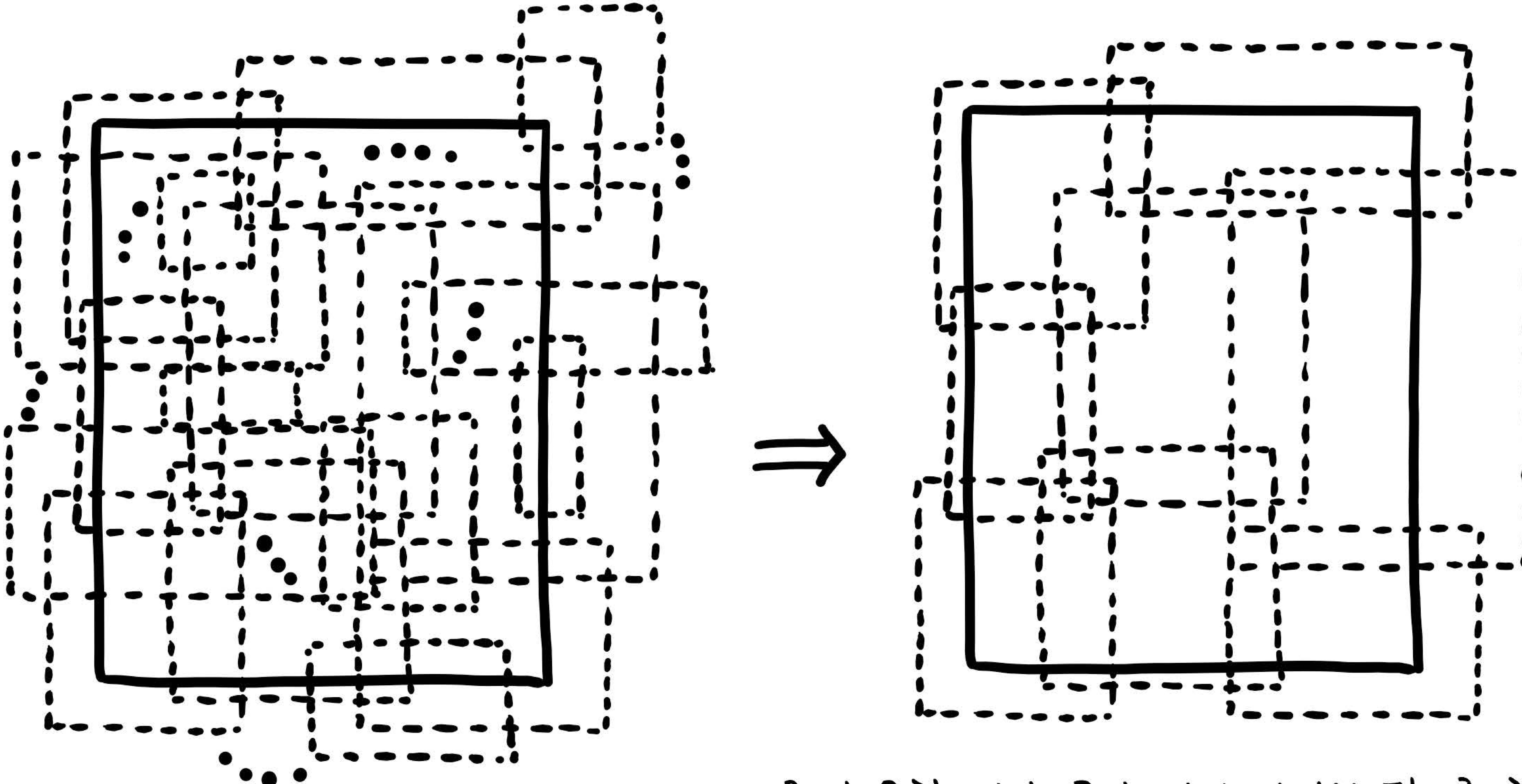
유한 개가 아닐

테니까요.


그러면 자연스레, 직사각형 "자연수 개"로 덮어서 넓이를 측정하는 방법이 떠오르죠.
S
R_1
R_2
R_3
$\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j)$
$m^*(S)$ = (자연수 개) 직사각형 커버 넓이 합의 하한
이 방식으로 잰 넓이를 S의 르벡 외측도 (Lebesgue outer measure)라고 부르겠습니다.
잠시만, 그렇게 측정해도 우리 넓이는 그대로 (가로X 세로) 맞아?
아하, 저번처럼 "기존 측정 방법"에 위배되지 않는지 체크해야겠군요!


그러니까 제 말은, 이런 상황이 발생하지 않냐는 거죠.
어떤 직사각형을 다른 직사각형 "자연수 개수"로 덮어서 넓이를 재면,
0
직사각형 "한 개" 혹은 "유한 개"로 덮어서 잰 것보다 혹여나 작게 측정되지는 않느냐는 거죠.
< 1
?
0
1
에밀 보렐
이런 고민을 처음 한 사람이 바로 에밀 보렐입니다. 보렐은 이 문제를 어떻게 해결했을까요?

여기서 보렐이 사용한 정리가 그 유명한 하이네-보렐 정리입니다. 즉,



(닫힌) 직사각형을 덮는 (열린) 직사각형 무한 개가 주어졌대도,

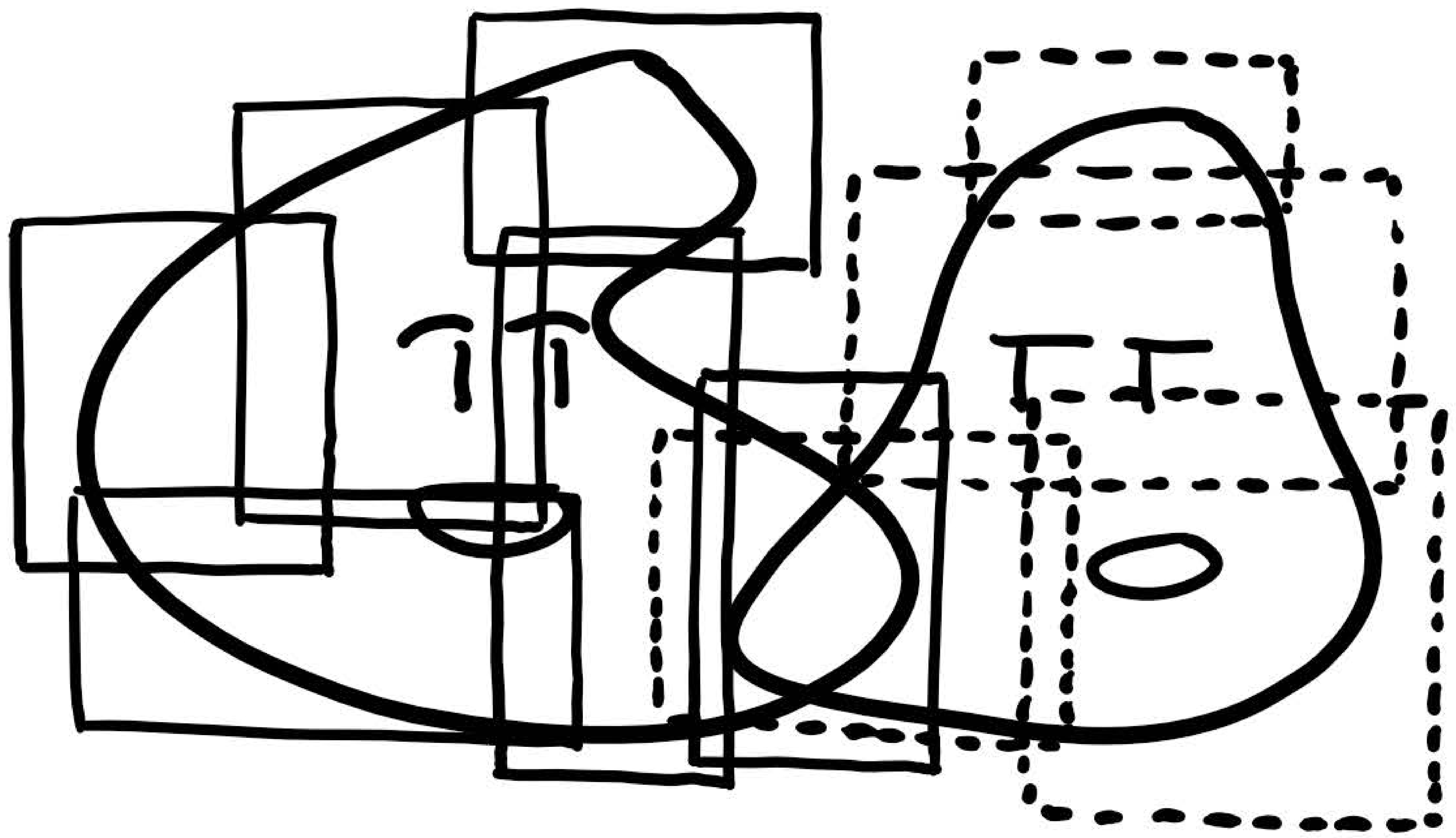
그 중에 유한 개만 골라 내어 여전히 덮도록 할 수 있고,

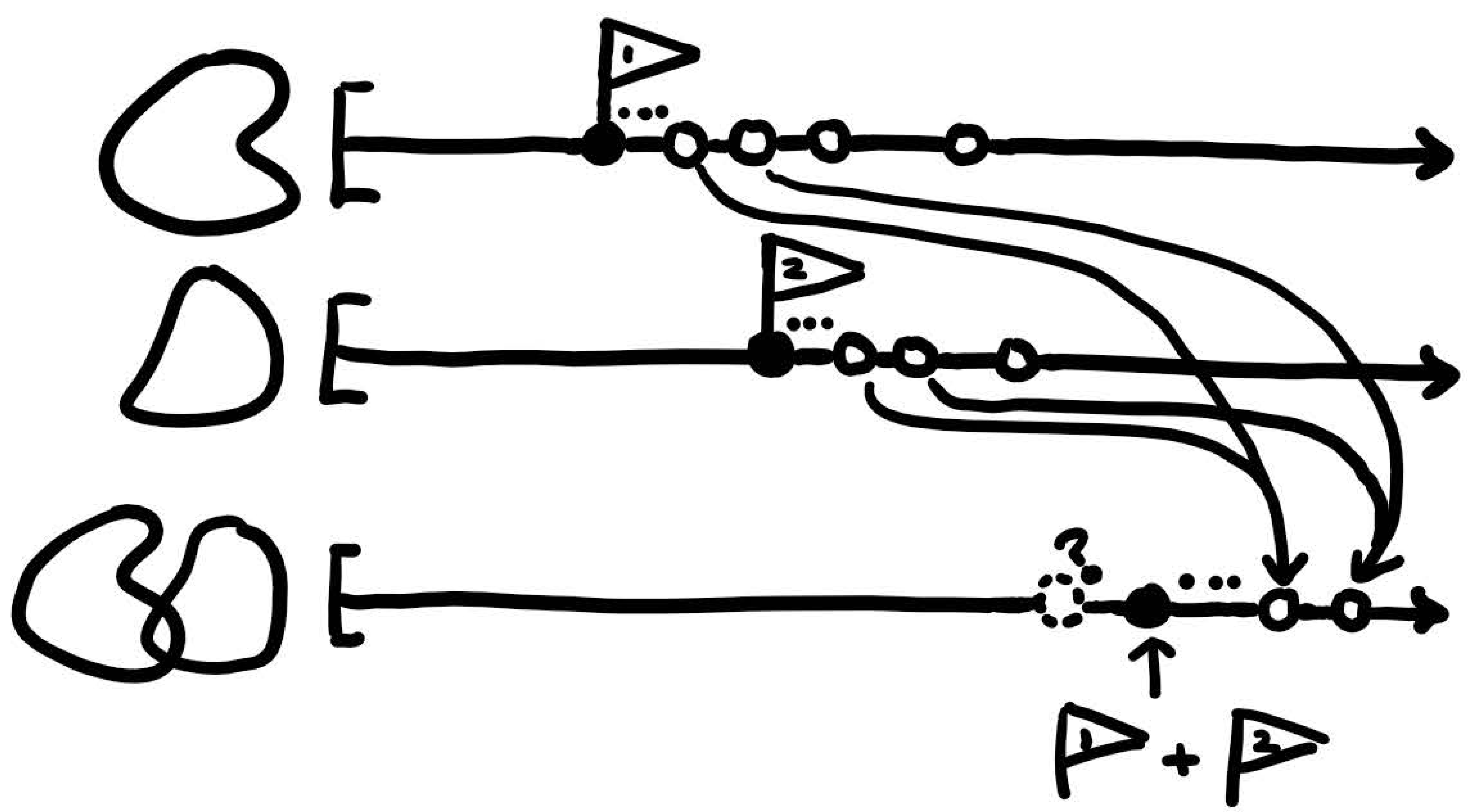
$$\Rightarrow m(\square) + \cdots + m(\square) \geq m(\square)$$

유한 개에 대해서는 저번에 부등식을 증명했으니 끝이죠.


그러니 이 방식으로 넓이를 잰다고 해도 문제는 없겠어요.
그럼 이 측정 방식이 가지는 기본 성질 두 가지를 살펴봅시다.
첫 번째는 "전체는 부분보다 크거나 같다"예요. 전체를 덮는 커버는 부분도 분명 덮을 테니까 말이에요.

두번째 성질은 합집합의 넓이에 대한 것인데요,





조르당 측도 때와 마찬가지로, 이번에도 각 집합을 덮는 커버를 합하면 전체 합집합의 커버가 되겠죠.

사실 이번에는 집합 두 개만 합하는 게 아니라, 자연수 개를 합해도 괜찮습니다.

즉,

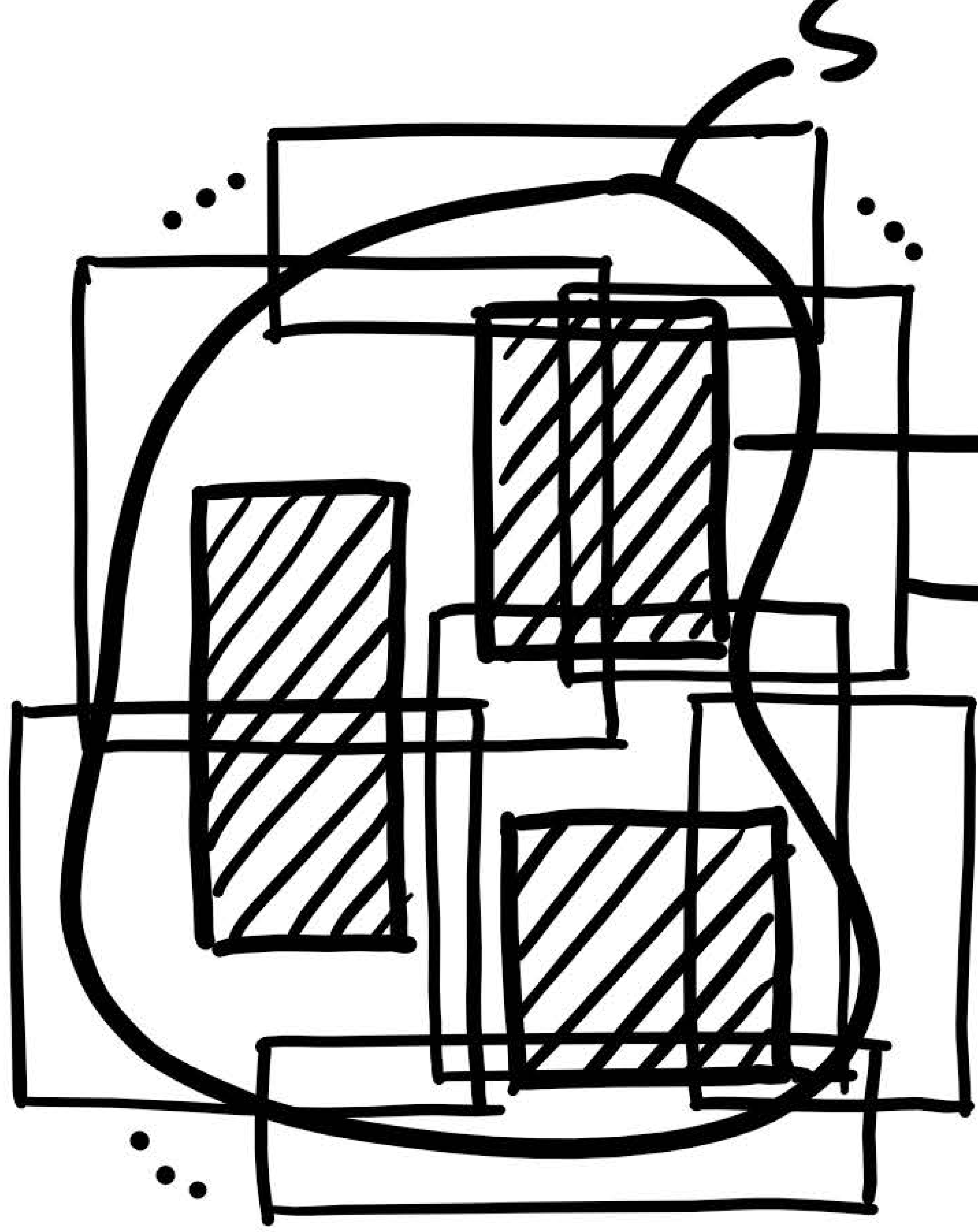
$$m(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \leq m(A_1) + m(A_2) + \cdots$$

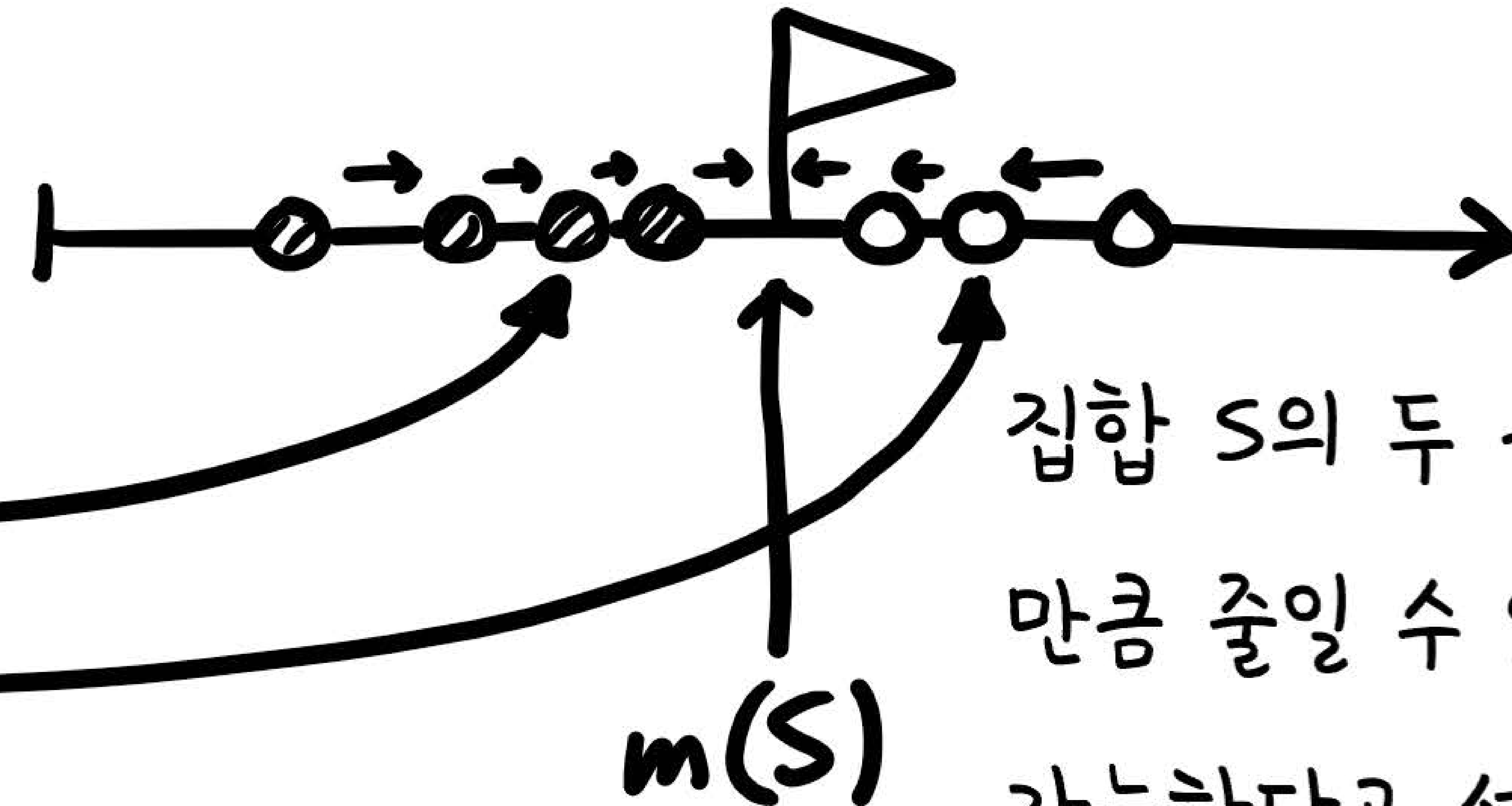
가 성립한다는 것이죠.


하지만 이번에도, 부등호를 등호로 바꾸는 건 간단하지 않아요.
겹침!
이렇게 각 집합 커버들끼리 겹치는 부분이 있을 수 있으니까요. 이런 걸 방지 하려면 어떻게 해야 할까요? 조르당 측도 때의 아이디어를 다시 빌어와 봅시다.

바로 "안에 포함되는 근사"와 "밖에서 감싸는 근사"가 일치하는지 보는 거예요.

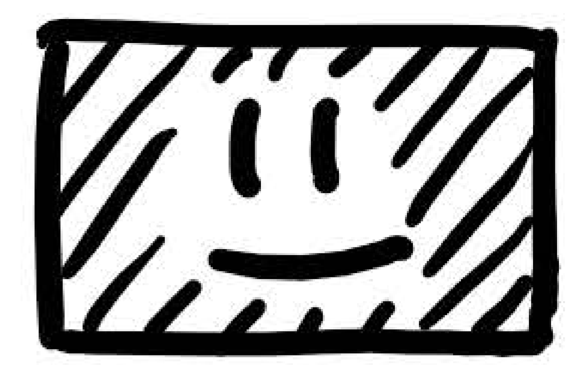
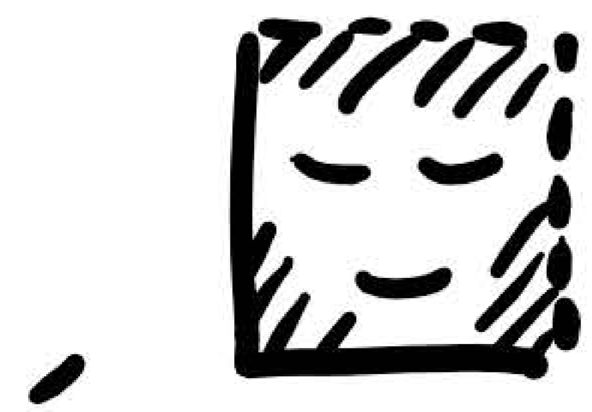
즉,



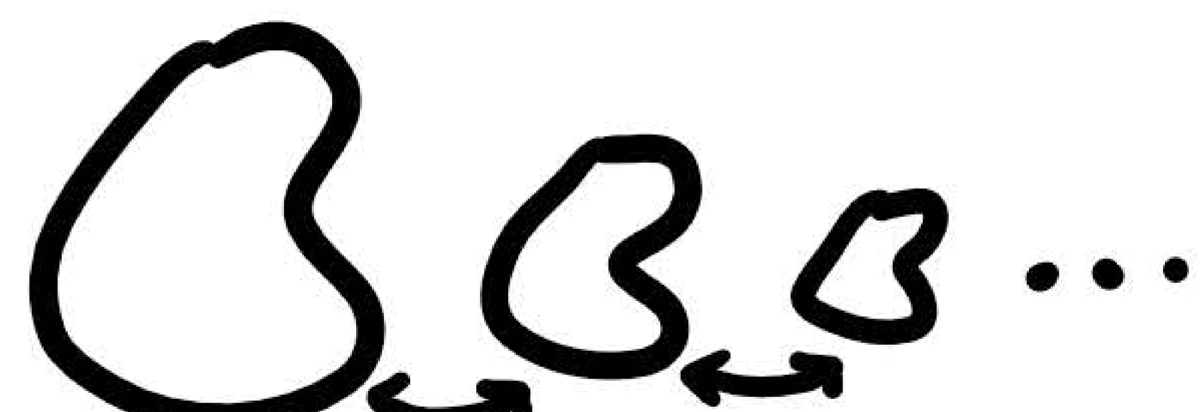


집합 S의 두 근사의 차이를 원하는 만큼 줄일 수 있다면 S가 측정 가능하다고 선언하는 거죠.

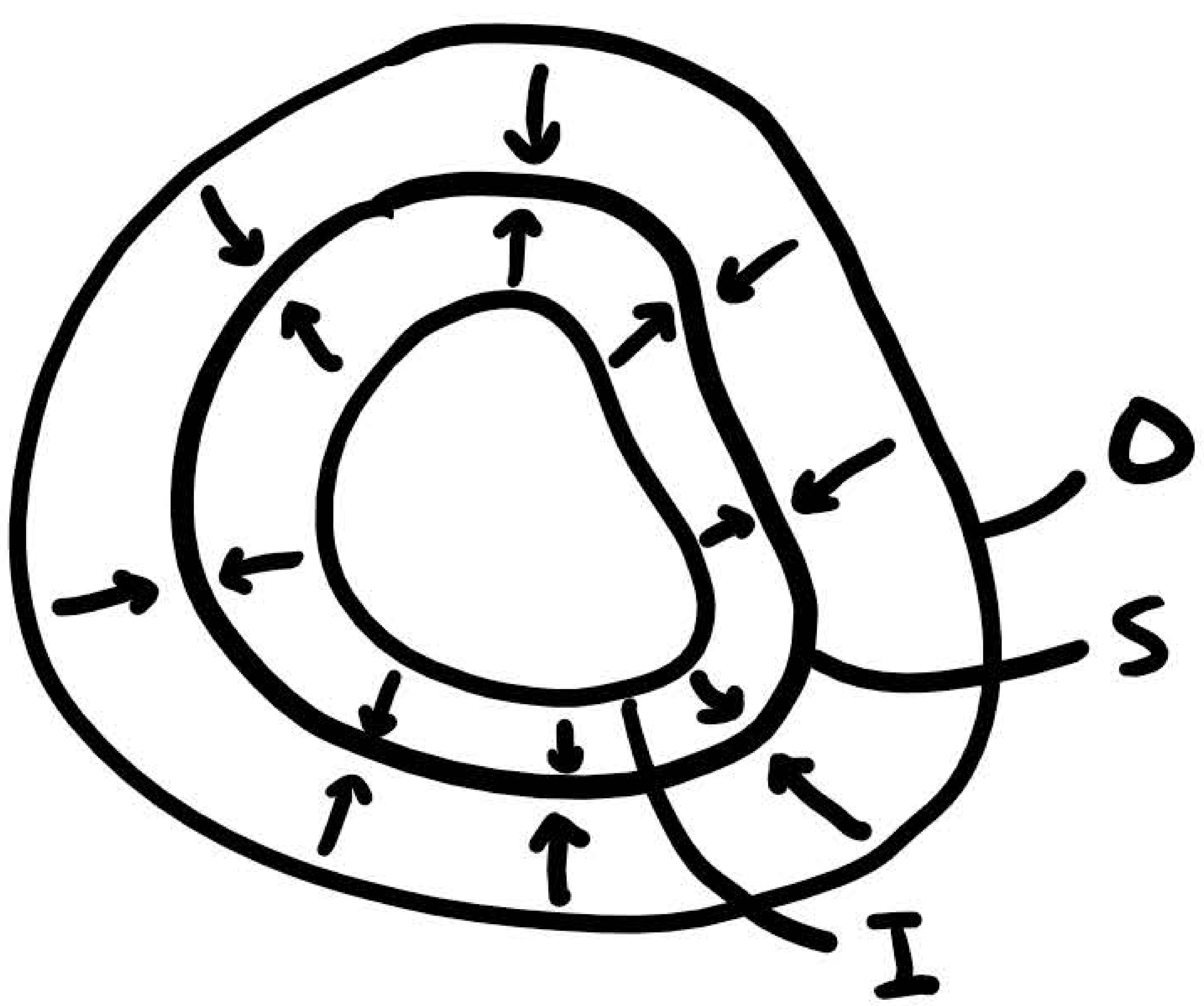
그러면,

: ①  ,  0

직사각형들은 여전히 넓이가 (가로X세로)고,

② 

가측 집합 자연수 개의 합집합도 가측이고, 넓이 합 공식도 성립합니다.

③ 

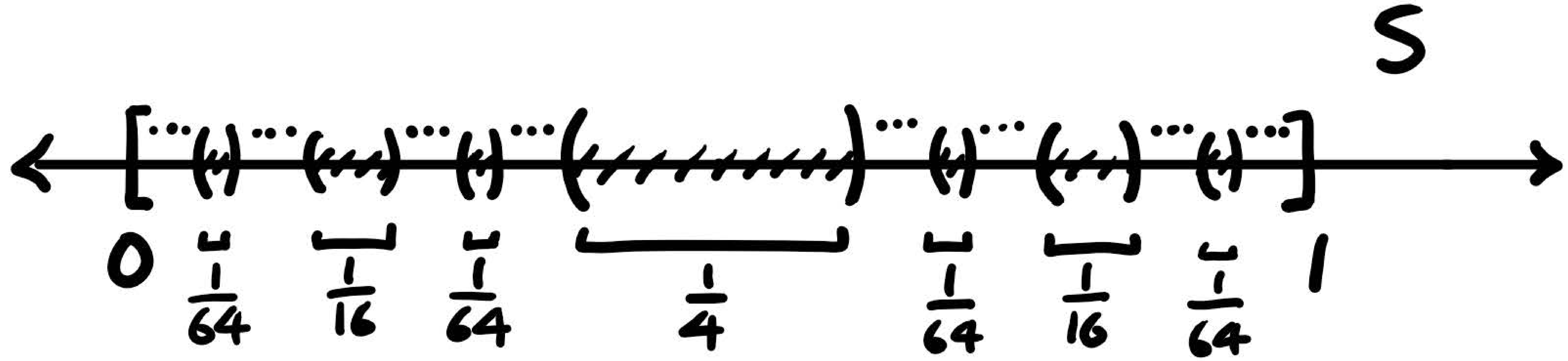
$m^*(O \setminus I) \to 0$

$\Rightarrow S : O$

마지막으로, 안팎에서 가측 집합으로 근사되는 집합은 그 또한 가측이죠.

하지만 아쉽게도, 저 기준은 르벡이 정의한 것과 조금 달라요.

어떤 점이 부족한 걸까요? 아래 예시를 보면 좀 이해가 될 거예요.



구간 [0,1] 안의 부분집합 S를 옆 그림과 같이 생각합시다.

$$\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{2}$$

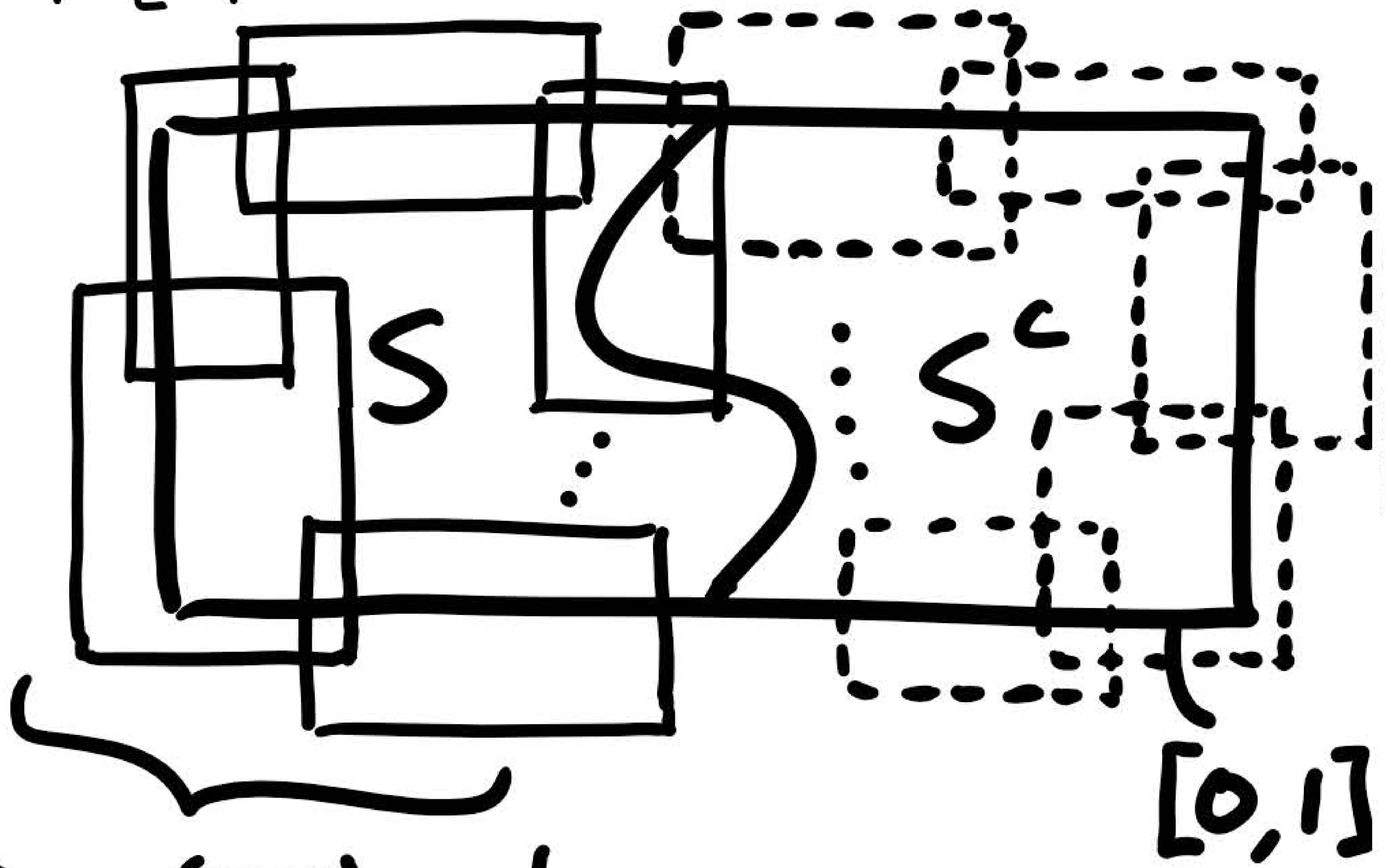
이 S라는 집합은 안팎에서 구간 자연수 개로 근사했을 때 두 근사가 잘 일치해요. S는 자연수 개의 "조각" = 열린 구간으로 이루어져 있는데, 이 각각의 열린 구간이 안팎에서 잘 근사되니 말이에요.

그러니 S는 가측, 즉 "길이를 재도 되는" 집합이고, 그 길이는 보시다시피 1/2이죠.

여기까지는 괜찮아요. 그러면, S의 여집합은 어떨까요?

① 바깥에서 근사

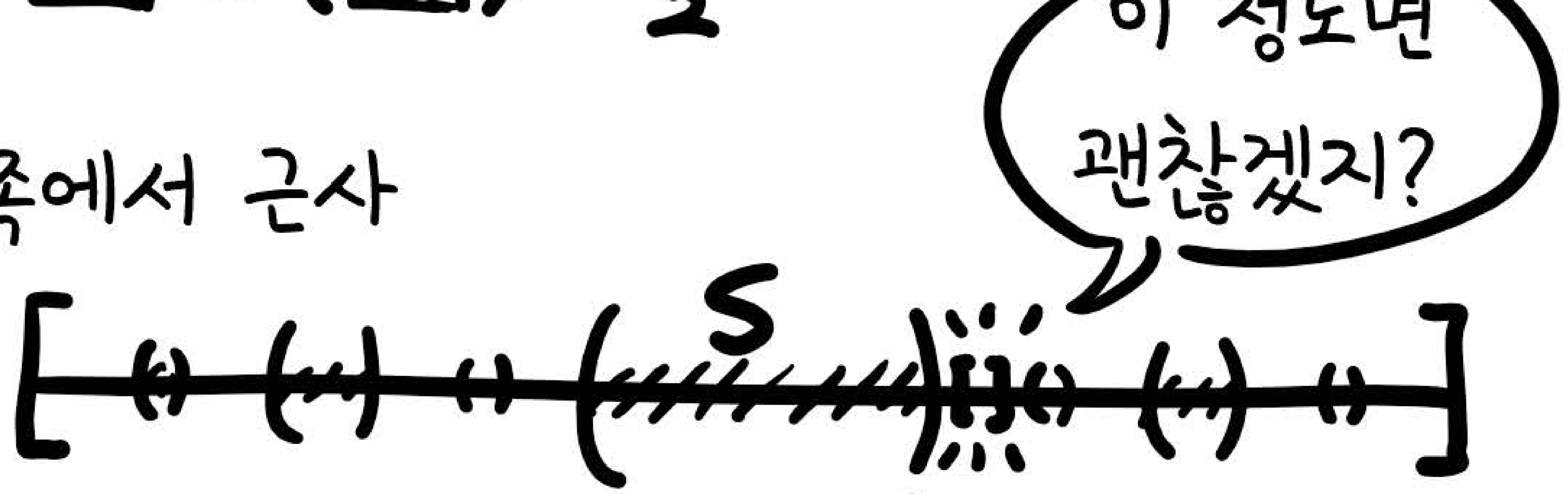
먼저, S는 길이 총합이 1/2인 구간들로 잘 덮을 수 있었죠.



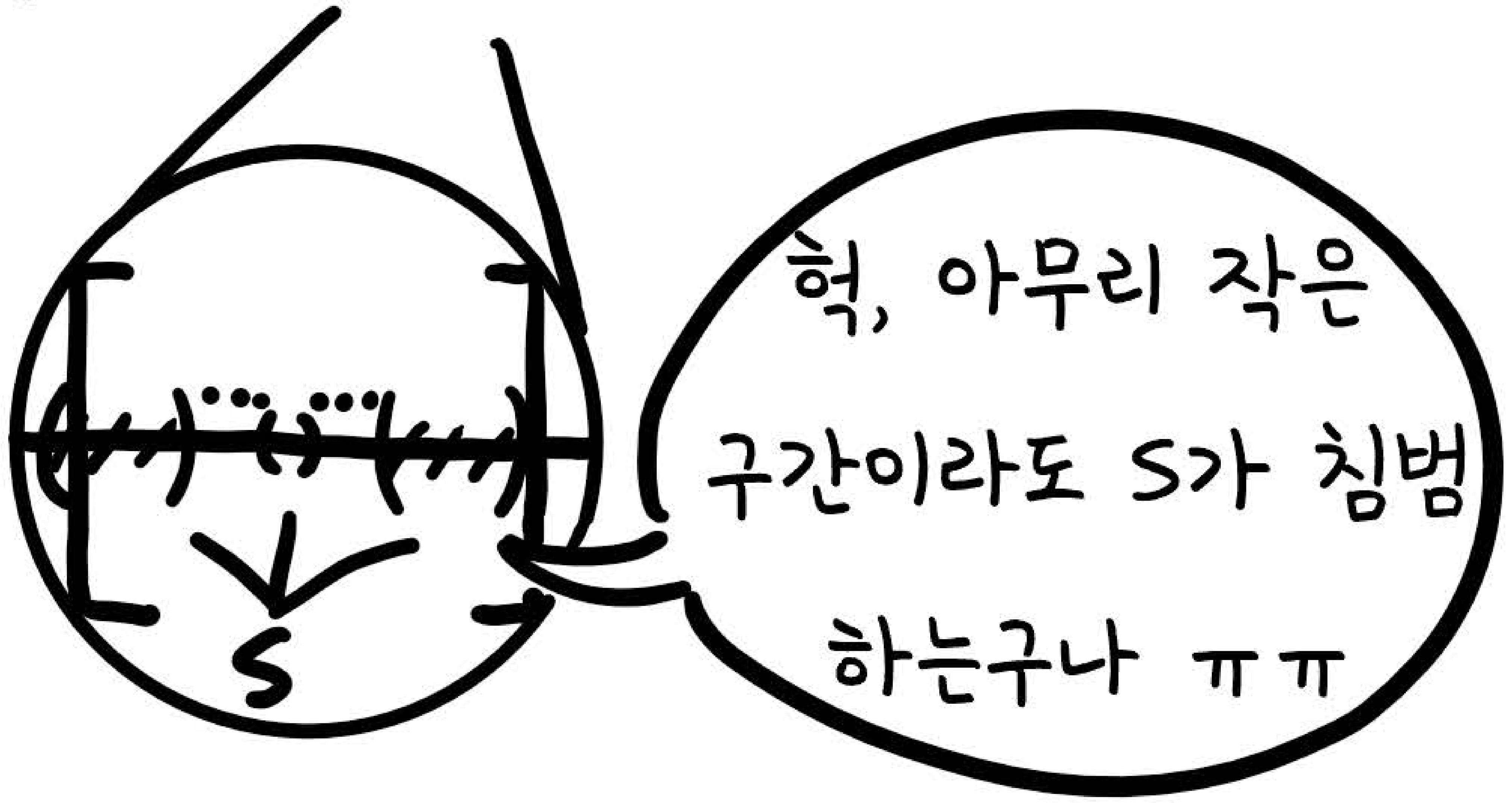
$$\sum m(\square) = \frac{1}{2}$$

그럼, S^c를 덮는 구간 총 길이가 최소 1/2이겠군요.

② 안쪽에서 근사

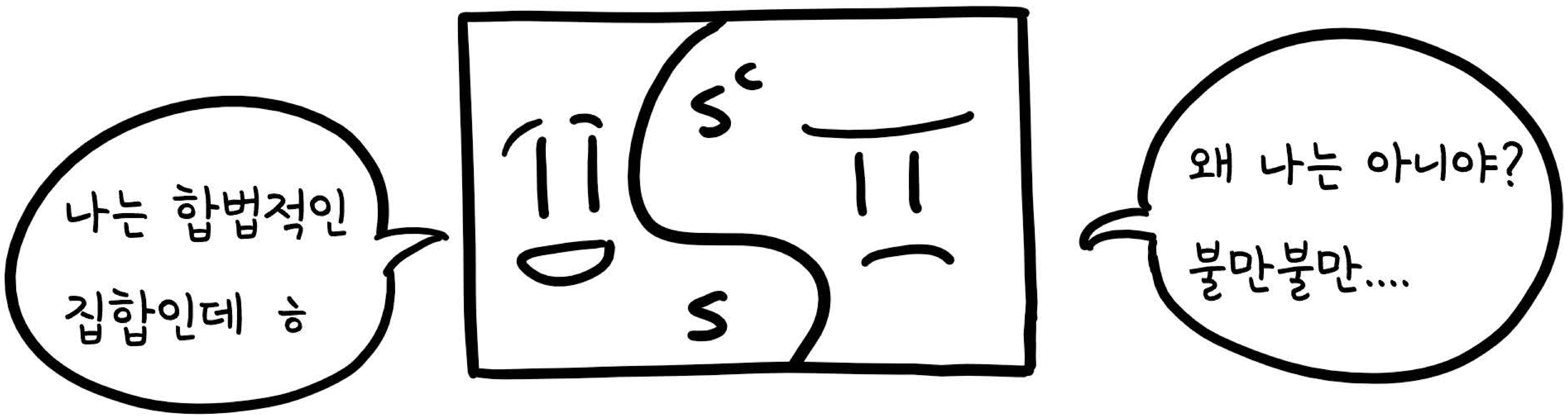


어, S^c 안에 직사각형을 넣으려고 하니... S가 [0,1] 위에서 조밀해서 도저히 넣을 수가 없어요!

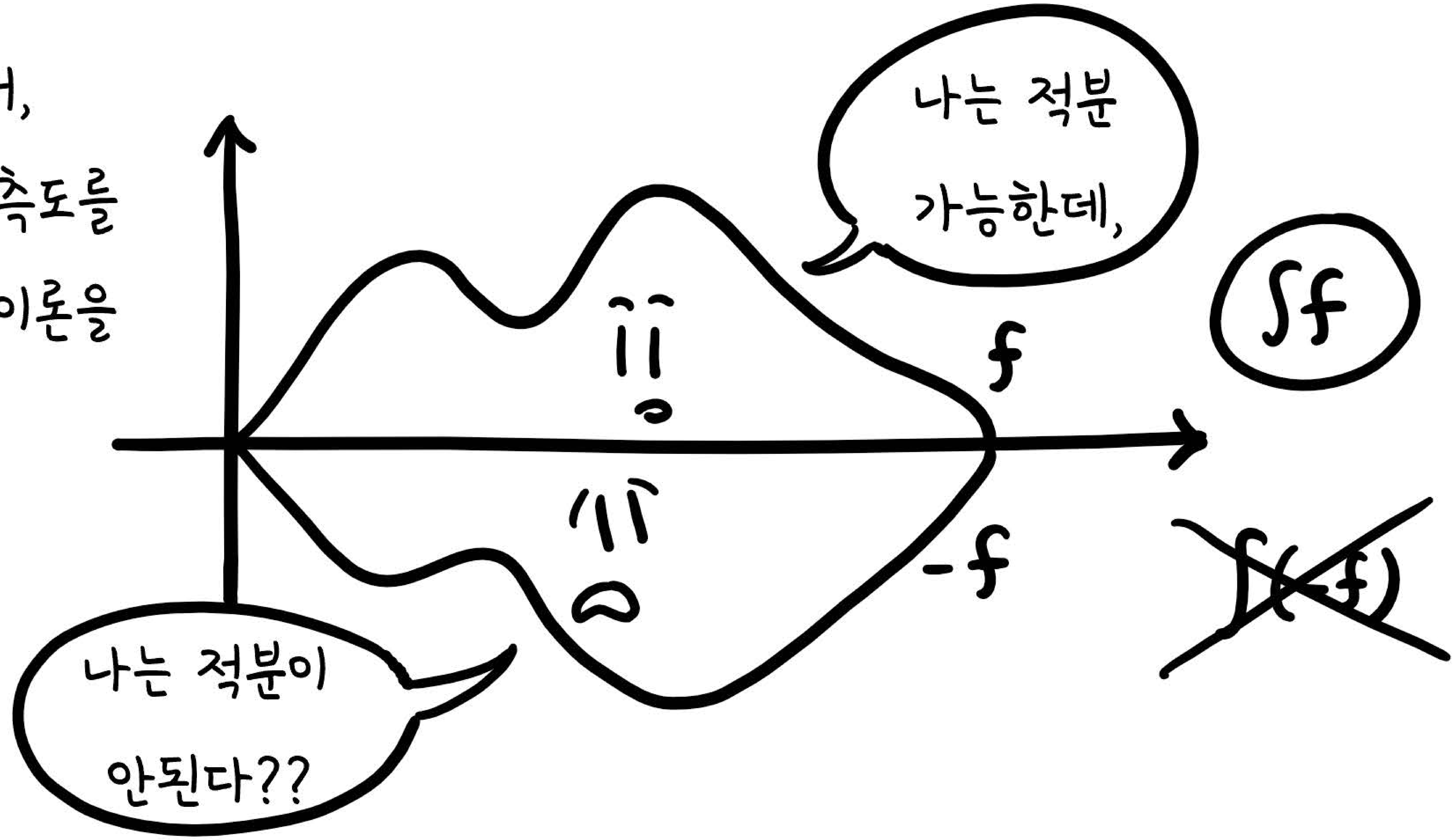


즉, S^c 안에서 근사했을 때는 넓이가 0이 나오네요. 어, 두 근사 값이 다르니 S^c는 측정 가능한 집합이 아니네요!

이 말인즉슨, 조르당 측도 때와는 달리, 가측 집합의 여집합=가측이라는 조건은 자동으로 따라나오지 않아요.



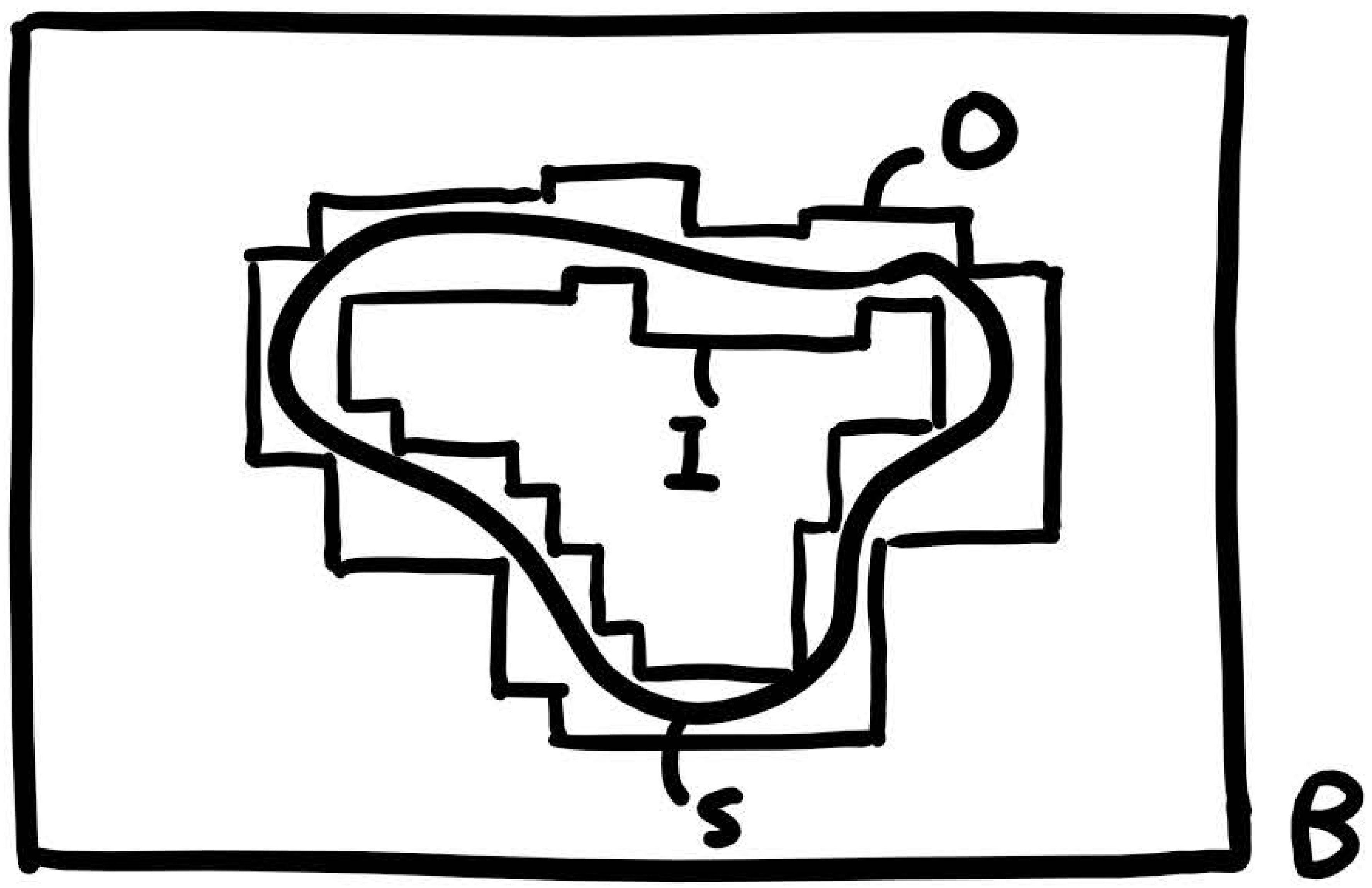
다르게 얘기해서, 우리가 정의한 측도를 바탕으로 적분 이론을 만들면....



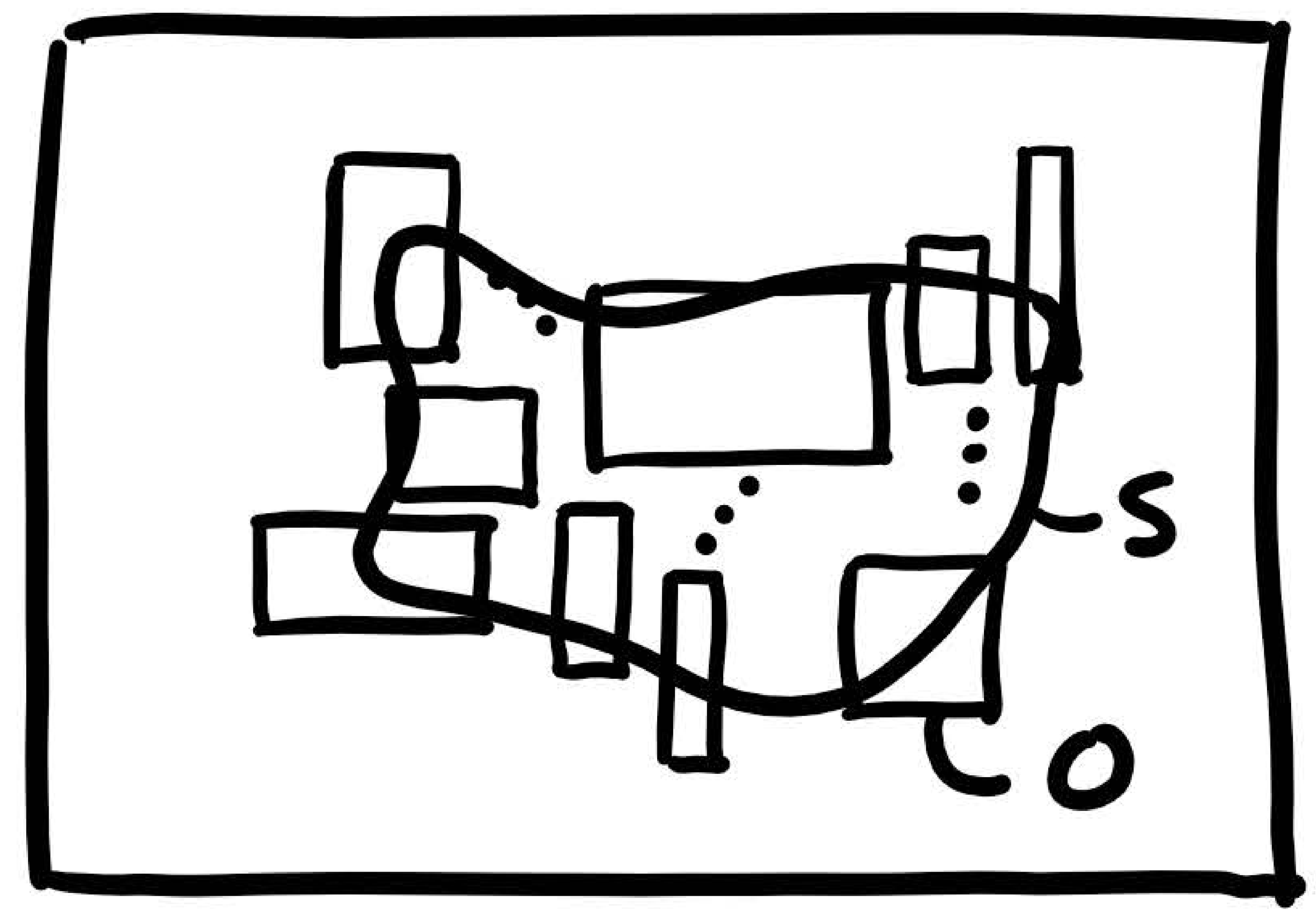
한마디로, "뺄셈"이 불가능한 적분 이론이 만들어집니다.

이런 비대칭이 생기는 이유는 다음과 같아요.

조르당 센스에서 안팎에서 근사할 때에는,



하지만 방금 상황에서는,



$I \subseteq S \subseteq O$

I, O가 직사각형 유한 개의 합집합이면,

$B\setminus O \subseteq B\setminus S \subseteq B\setminus I$

요 녀석들도 직사각형 유한 개의 합집합이기 때문에, S에게도 B\S에게도 동등한 상황인 거죠.

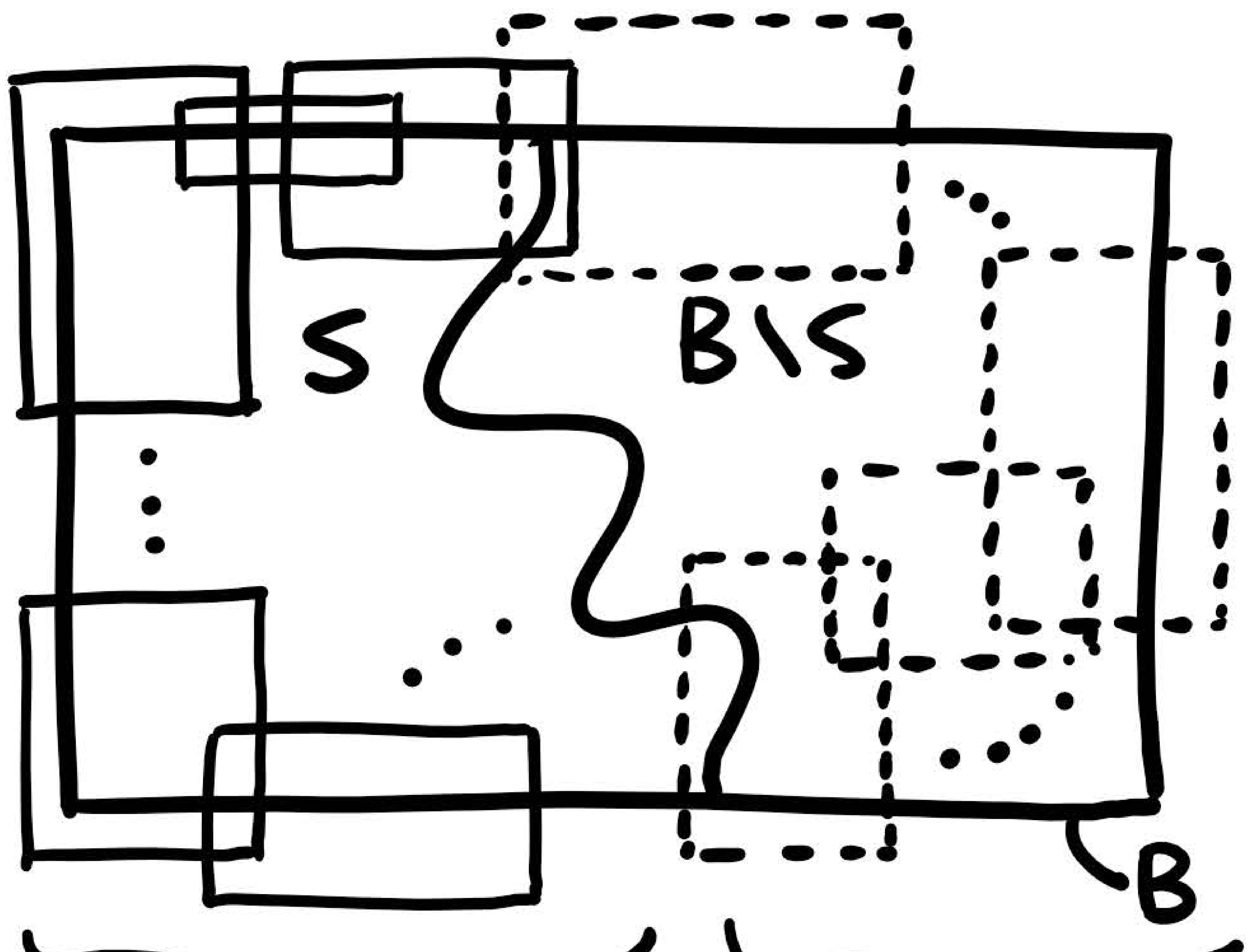
$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} \boxed{i} \;\not\Leftrightarrow\; O^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} \boxed{j} \;?$$

이 O가 직사각형 "자연수 개"의 합집합이라 해서,

O의 여집합 또한 그렇진 않아요. 이 부분이 대칭적이지 않은 거죠.

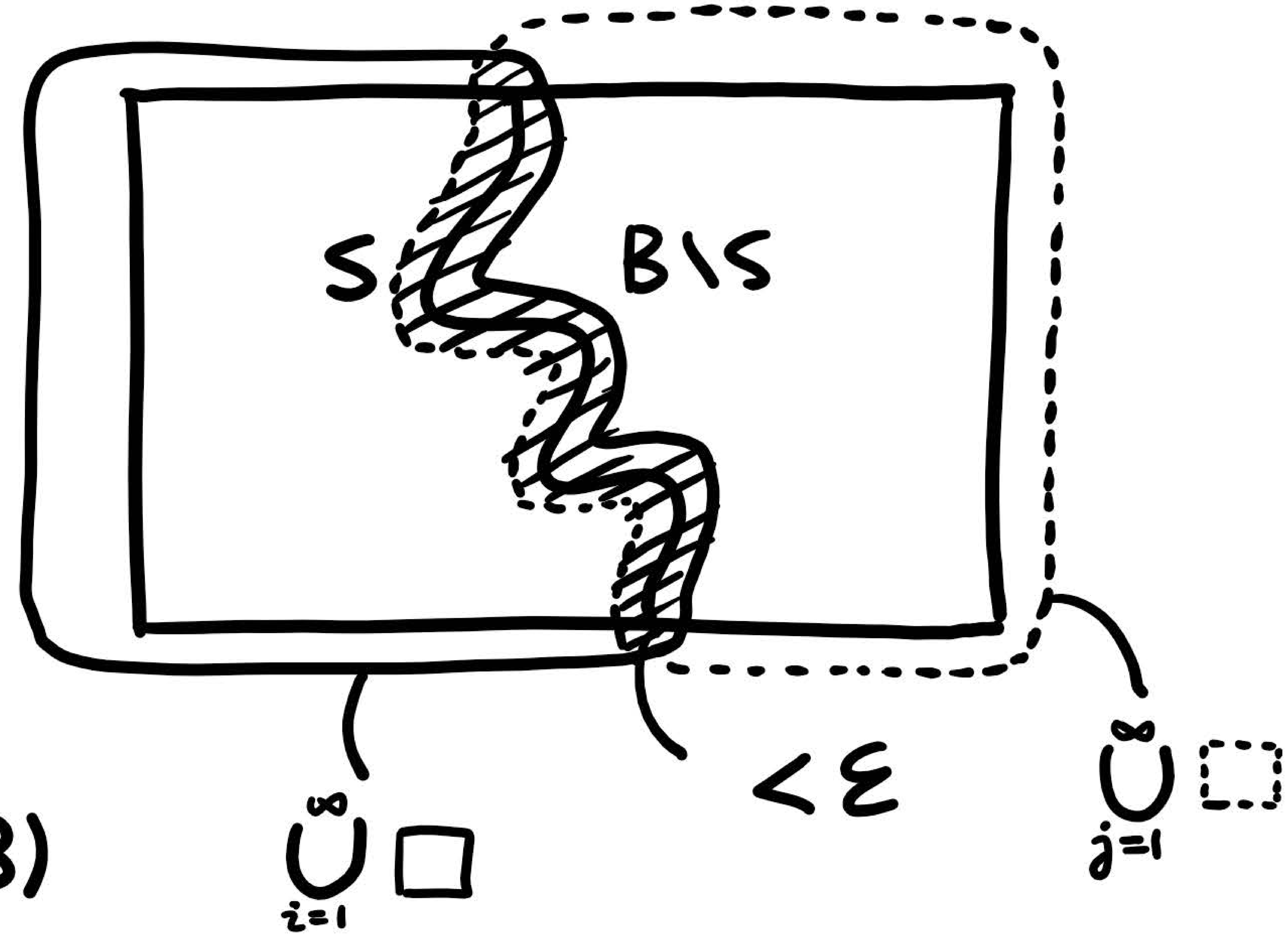
그러니, 처음 시도한 정의는 버리고 새로운 방법을 시도해 봐야 합니다.

S에게도 S의 여집합에게도 동등한 조건을 찾아야 한단 거죠. 이를테면,



$$\underbrace{m^*(S)}\ +\ \underbrace{m^*(B\setminus S)} \geq m(B)$$

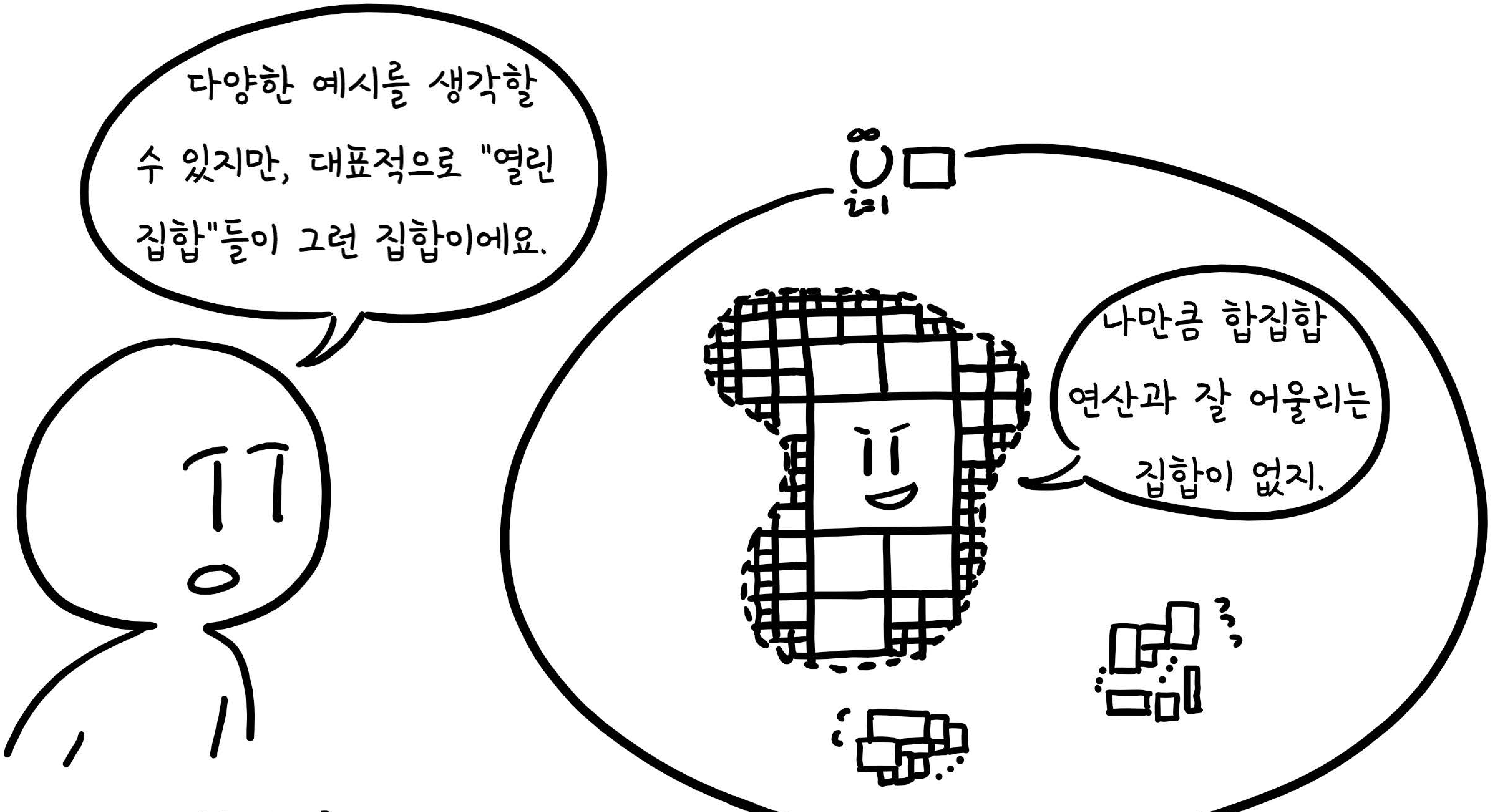
$\Longleftrightarrow$



위 부등식의 "등호"가 성립하는 경우 S를 좋은 집합이라고 선언하면, S가 좋다는 것과 B\S가 좋다는 게 동치가 되겠죠.

다시 말해, S와 S의 여집합을 각각 직사각형 자연수 개로 덮어서, 두 덮개가 겹치는 부분의 르벡 외측도를 충분히 작게 할 수 있다는 거예요.

그런데, 직사각형 "자연수 개"의 합집합은 어떻게 생긴 집합인가요?

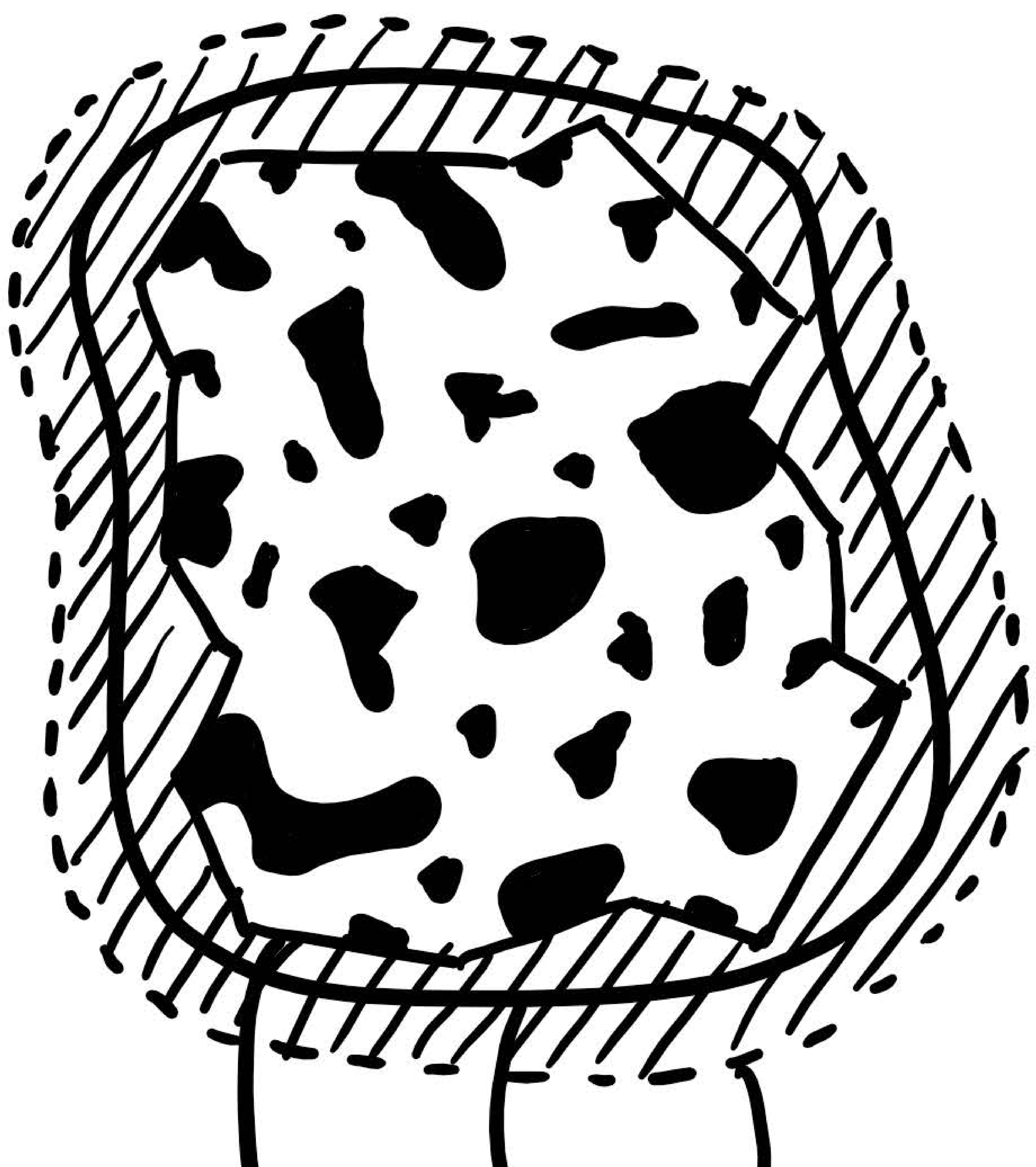


특히 우리는 가산 합 공리를 증명해야 하니, 이런

"열린 집합"만 커버로 사용하는 게 유리할 수도 있겠네요.

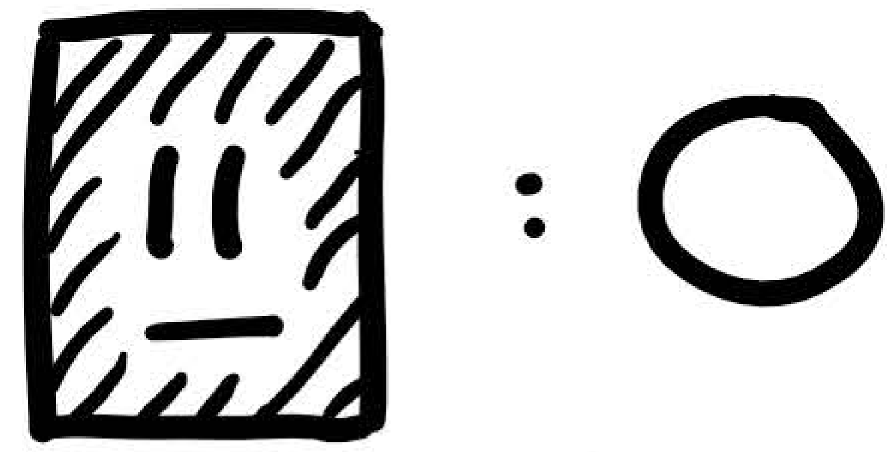
그리고 열린 집합의 여집합은 닫힌 집합이니, 결국 다음과 같은 기준을 생각할 수 있습니다.

집합 E를 열린 집합 O와 닫힌 집합 F로 안팎에서 감싸되, 그 둘의 차이 부분을 얼마든지 작게 만들 수 있다면 E를 르벡 가측이라고 부르겠습니다.

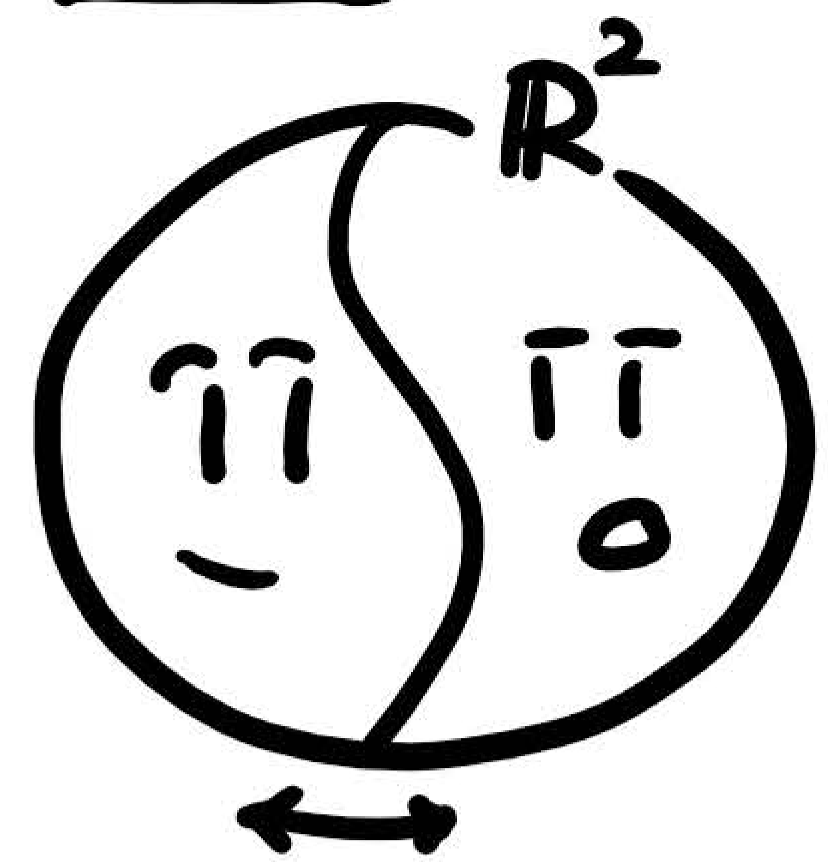


$F \subseteq E \subseteq O$, $m($  $) \le \varepsilon$

이 기준에 따르면,

① 

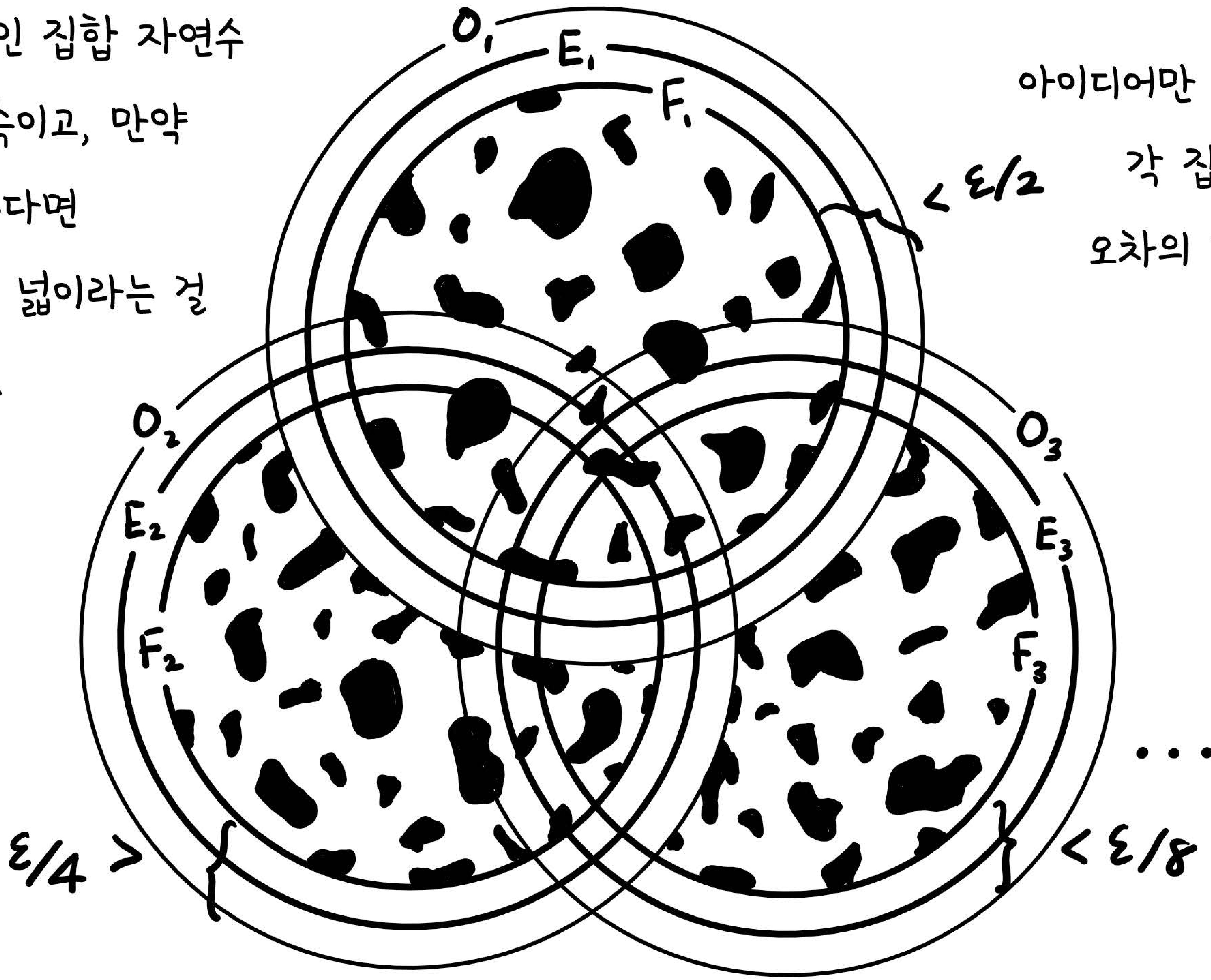
직사각형들은 당연히 르벡 가측으로 분류되고,

② 

어떤 집합과 그 여집합의 르벡 가측성은 동치 조건이 되죠. 판단 기준이 여집합에 대해 대칭적이니까요.

이제, 르벡 가측인 집합 자연수 개를 합해도 가측이고, 만약 서로 겹치지 않는다면 넓이 합 = 합의 넓이라는 걸 보여야 하는데요.

아이디어만 보여 드리겠습니다. 각 집합에서 발생하는 오차의 합이 목표 오차보다 작도록 설정하면,



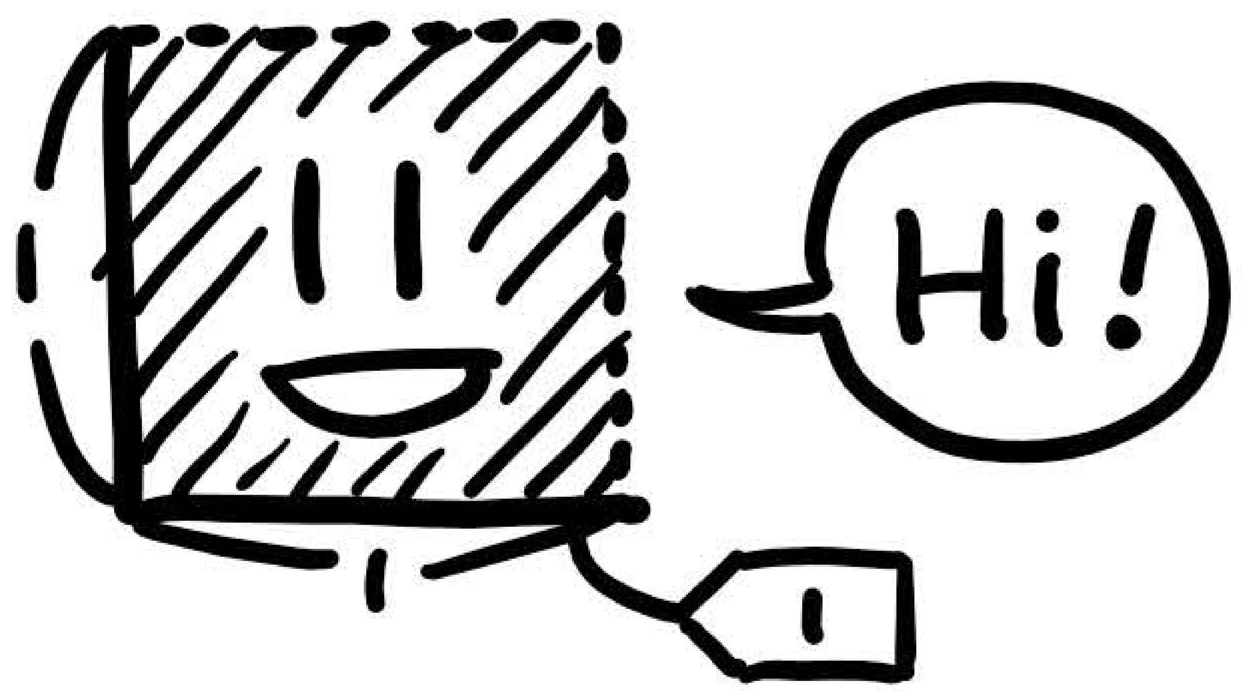
$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \le m(O_1 \setminus F_1) + m(O_2 \setminus F_2) + \cdots < \varepsilon$$

이런 식이 성립하죠.


하지만 벌써 눈치채신 분도 계실 텐데요, 이걸로 증명이 끝난 건 아니에요.
안에 포함된 닫힌 집합의 합집합이 닫힌 집합이라는 보장은 없으니까요.
뽀...
$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$
$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$
밖에서 덮는 열린 집합의 합집합은 열린 집합이 맞는데...
이건 각각의 닫힌 집합 F_i를 "살짝 깎아내는" 작업을 하면 해결되는데, 좀 테크니컬한 부분이라 여기서는 생략하겠습니다.
여기다 더해 만약 집합들이 겹치지 않았다면 넓이 합 공식도 증명할 수 있는데, 역시 생략하겠습니다.

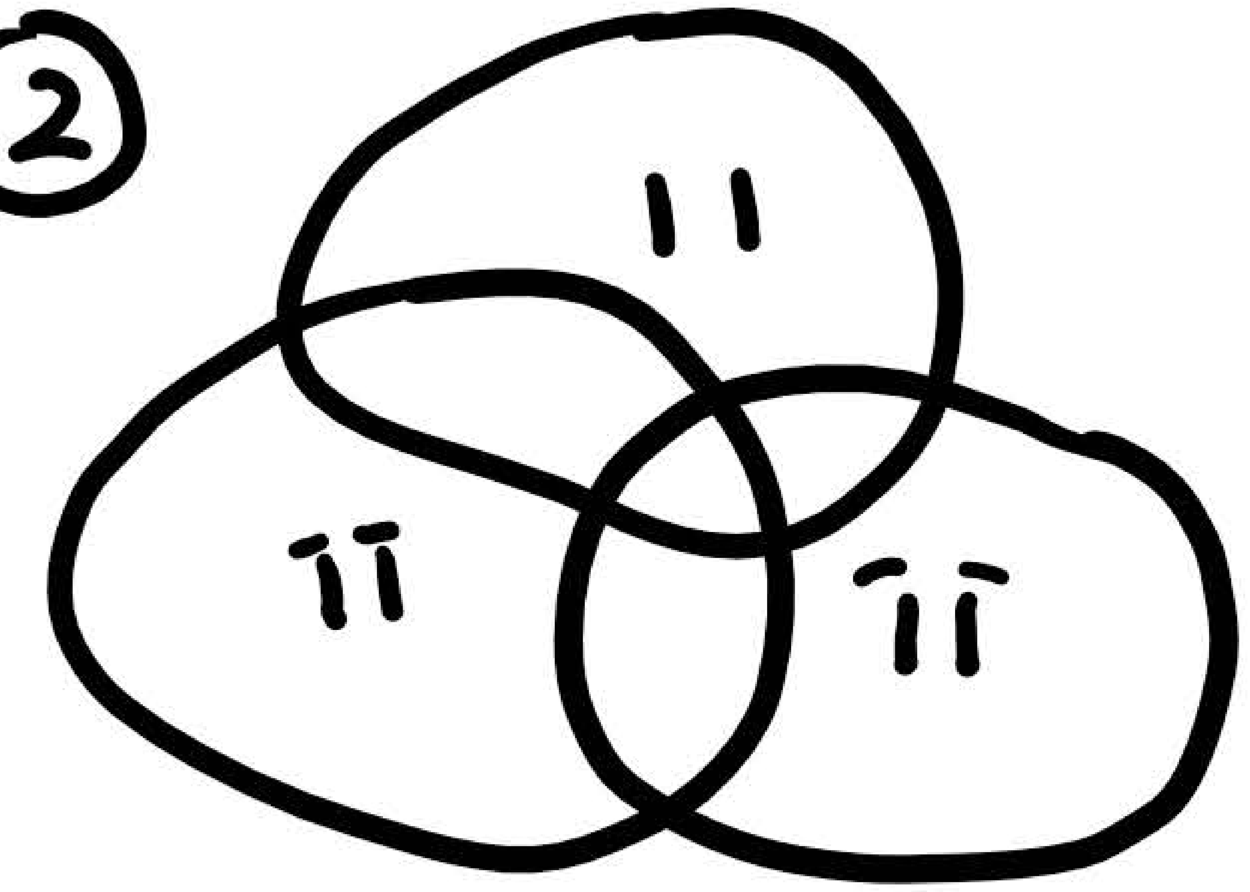
중요한 건 이거예요. 만약 평면의 부분집합들의 컬렉션 C에서 "넓이 함수"를 정의하고 싶은데,

①

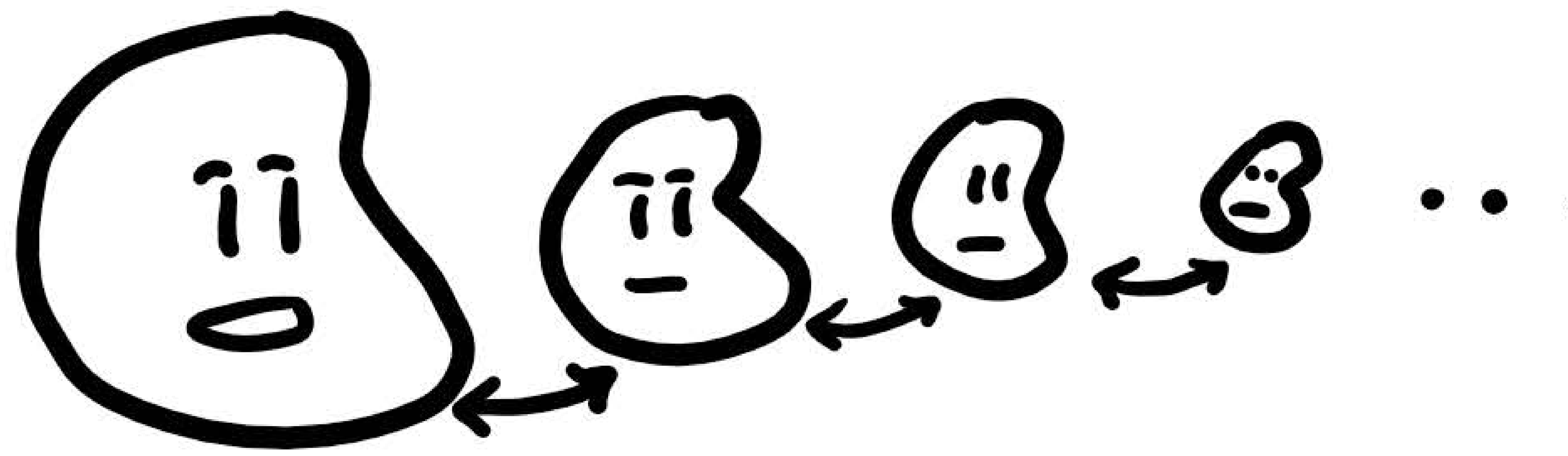


직사각형들은 당연히 포함해야 하고 그 넓이는 (가로X세로)로 줘야 해요.

②

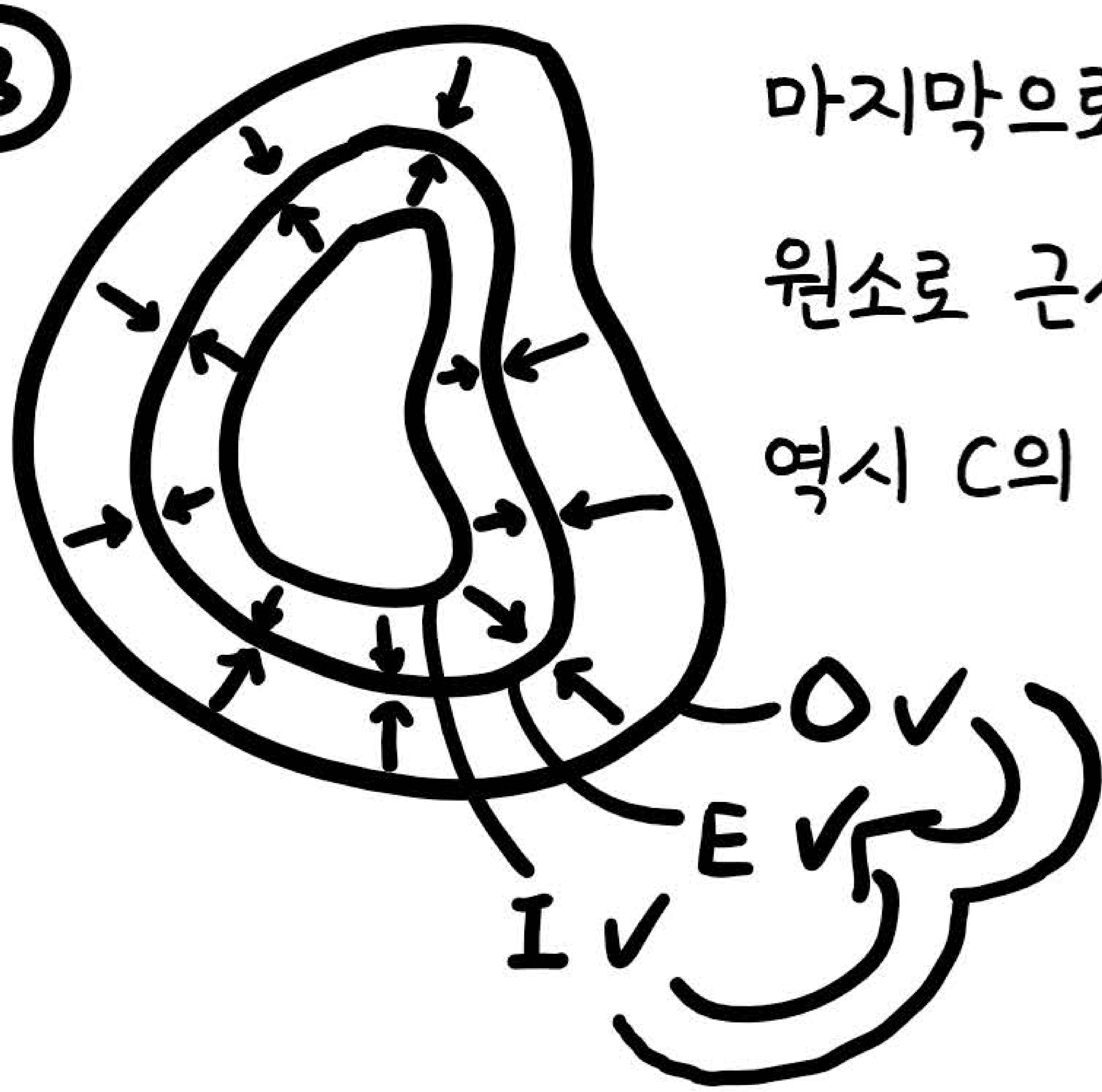


C의 원소 "자연수 개"를 합집합해도 여전히 C의 원소여야 하구요, ...



특히 서로 겹치지 않는 집합들이었다면 넓이 합 공식도 성립했으면 해요.

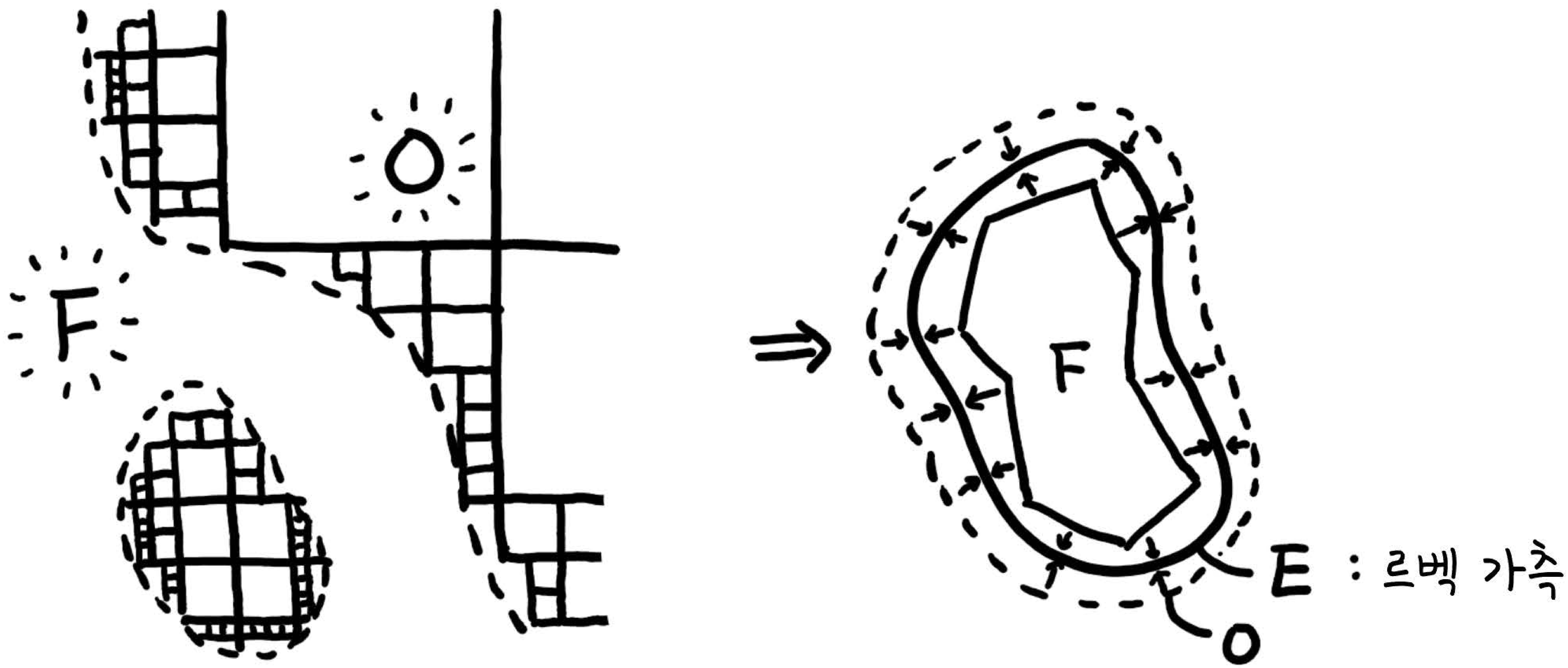
③



마지막으로, "안팎에서 C의 원소로 근사되는" 집합은 역시 C의 원소였으면 합니다.

그리고 C의 원소의 여집합도 C의 원소였으면 좋겠구요.

만약 저 목표를 달성하려면, 일단 직사각형 자연수 개의 합집합으로 나타나는 집합들은 모조리 측정 가능해야 합니다. 특히, 열린 집합들에는 모조리 르벡 외측도 값을 주어야겠죠.



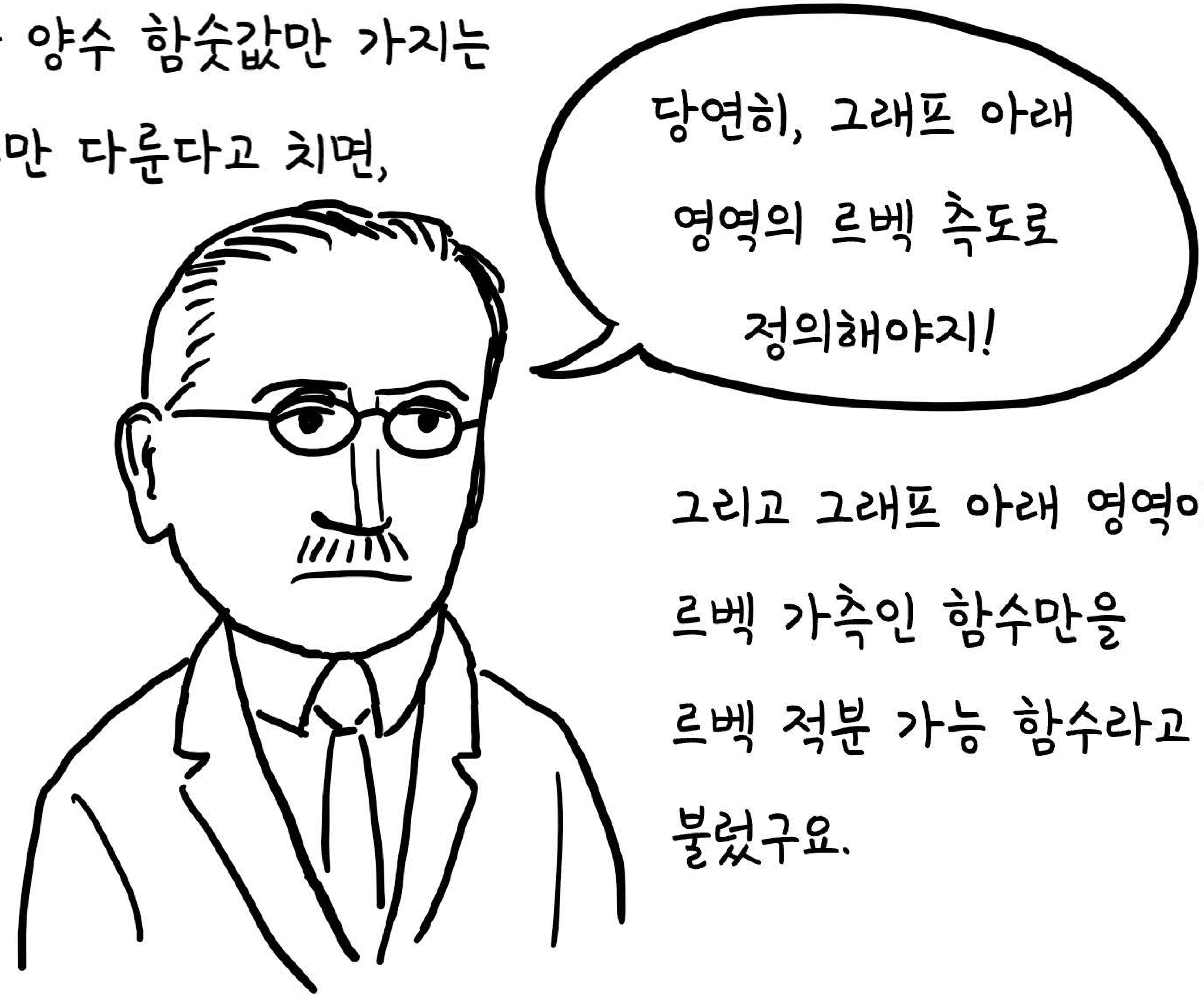
그러면 그 여집합인 닫힌 집합도 모두 측정 가능하다고 분류되고, 그 둘로 안팎에서 근사되는 집합들도 가측이라고 선언해야 합니다. 즉, 르벡 가측 집합들에는 모조리 (그것도 르벡 외측도로) 넓이를 줘야 하죠. 이렇게 보면, 르벡 측도는 매우 자연스러운 넓이 측정 방법이라 할 수 있습니다.

이름에서부터 알 수 있듯, 이런 넓이 측정 기준을 제시한 사람은 르벡입니다.

그러면 르벡이 적분을 어떻게 정의했을지는 자명하죠?

일단 양수 함숫값만 가지는

함수만 다룬다고 치면,

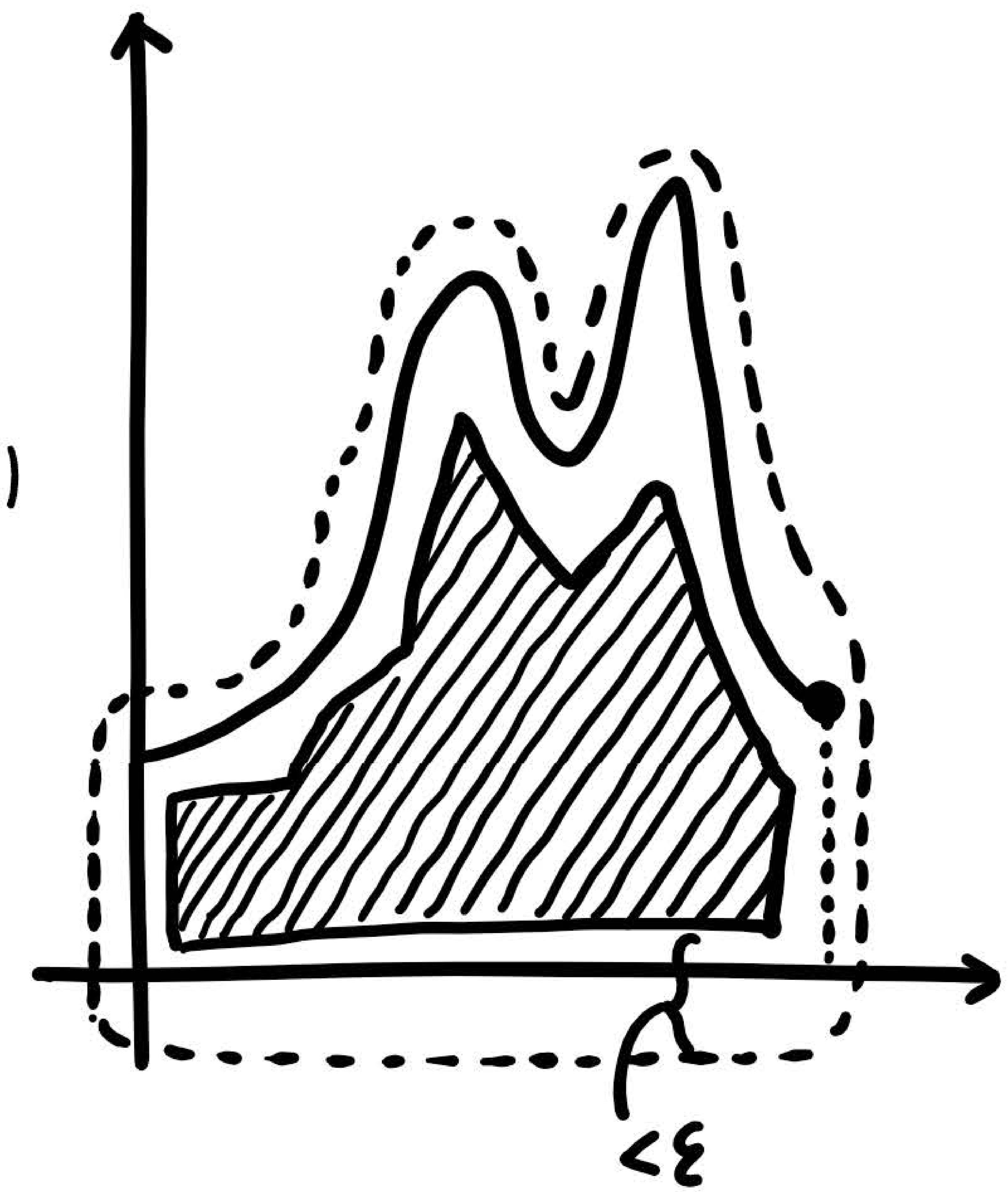


그리고 그래프 아래 영역이

르벡 가측인 함수만을

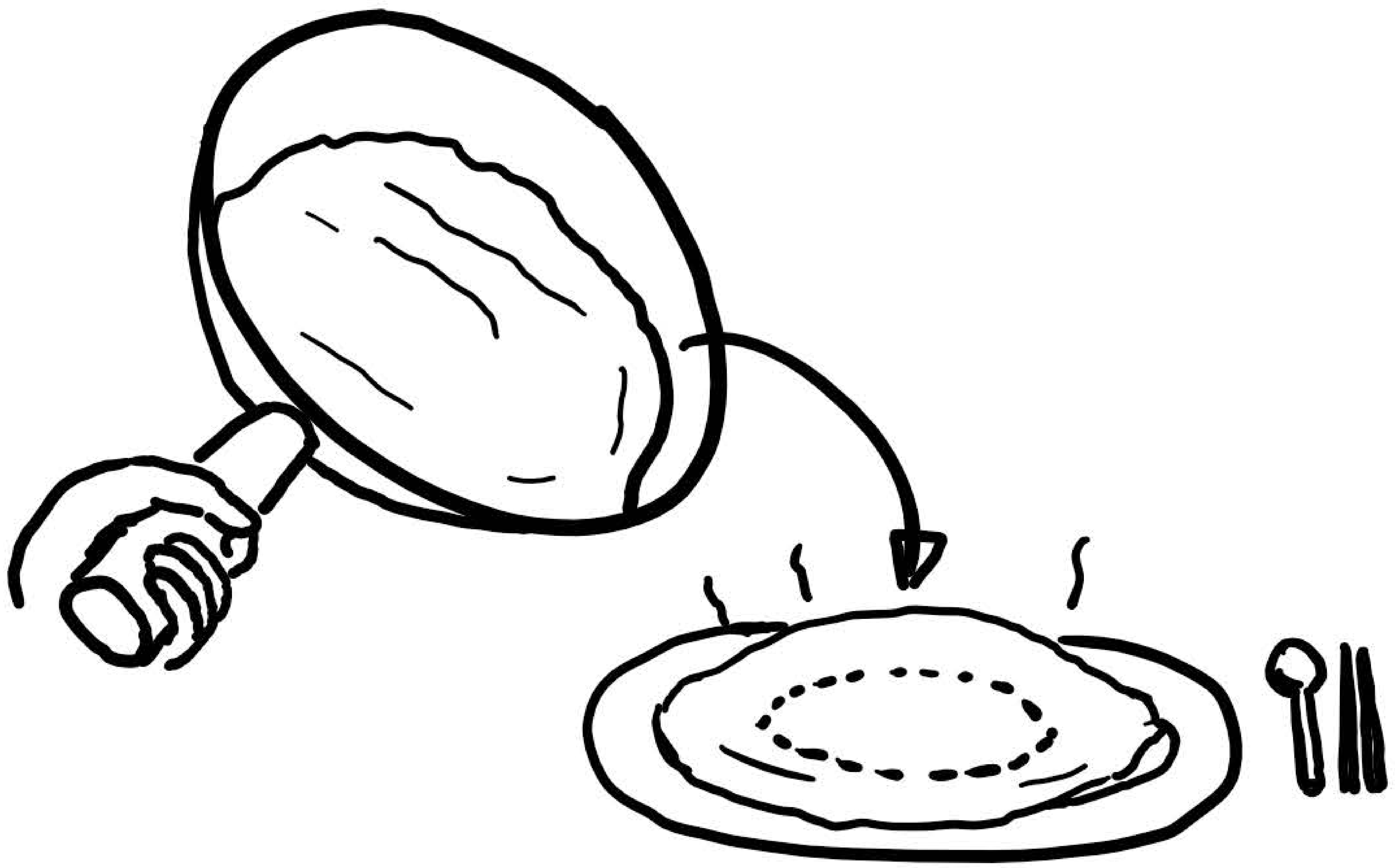
르벡 적분 가능 함수라고

불렀구요.

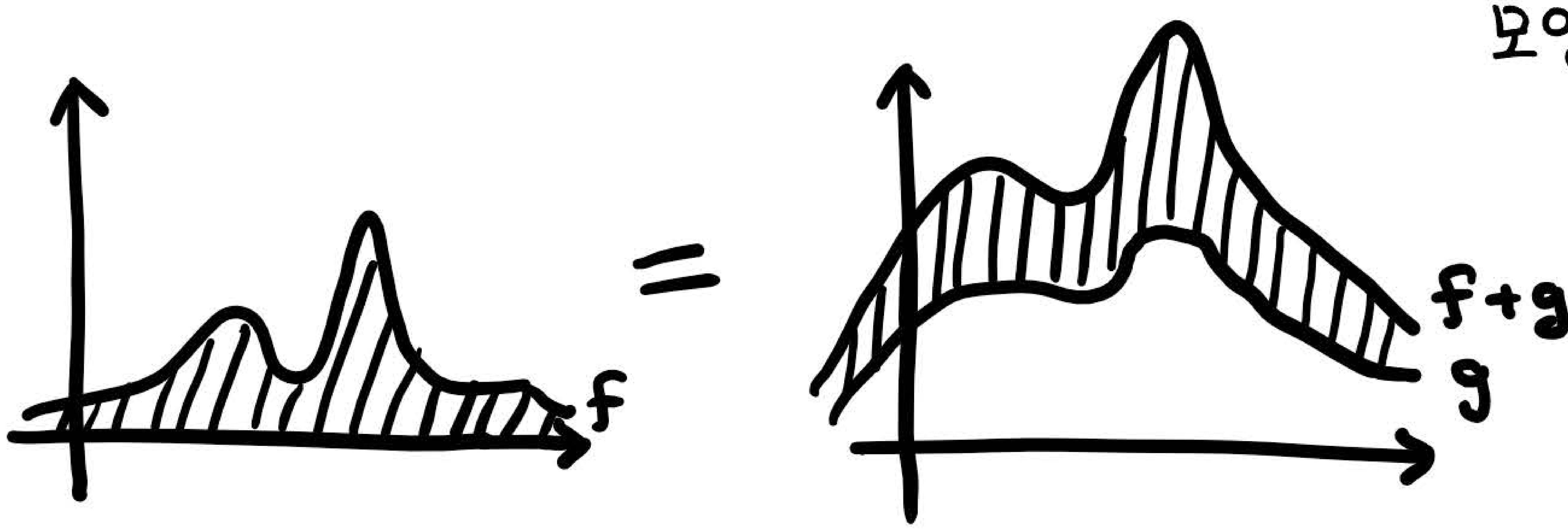


*르벡의 원래 방식에서는 정의역 범위 및 함숫값 범위가 유계인 경우만 다뤘지만, 저희 방식에서는 그런 가정이 필요하지 않습니다. 자세한 것은 [L1]을 참고하세요.

이렇게 정의하면, 다음과 같은 사실을 증명할 수 있어요. 유도 과정은 다소 길고 지루하니, 역시 생략하고 나중에 따로 설명드리겠습니다.



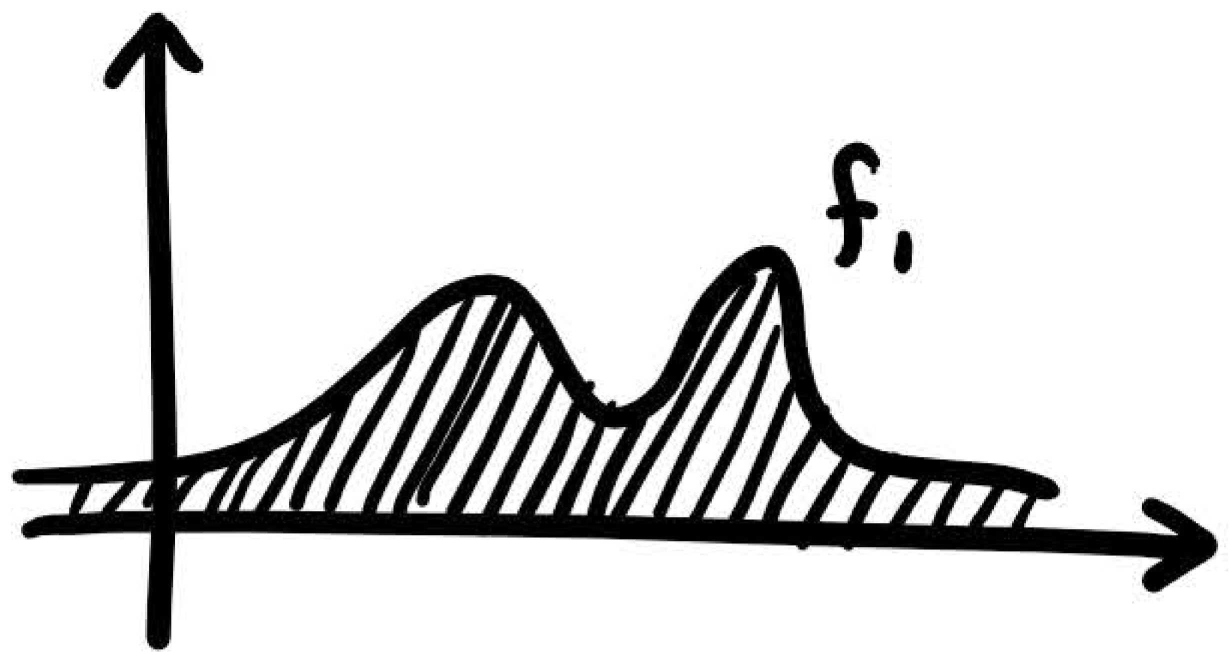
f와 g라는 르벡 적분 가능한 함수가 있다면,
(비록 g의 그래프가 울퉁불퉁할지라도)
$f+g$ 그래프와 g 그래프 사이 넓이는
f 자체의 적분값과 일치해요.
모양은 변하더라도 크기 그대로 얹히는 거죠.

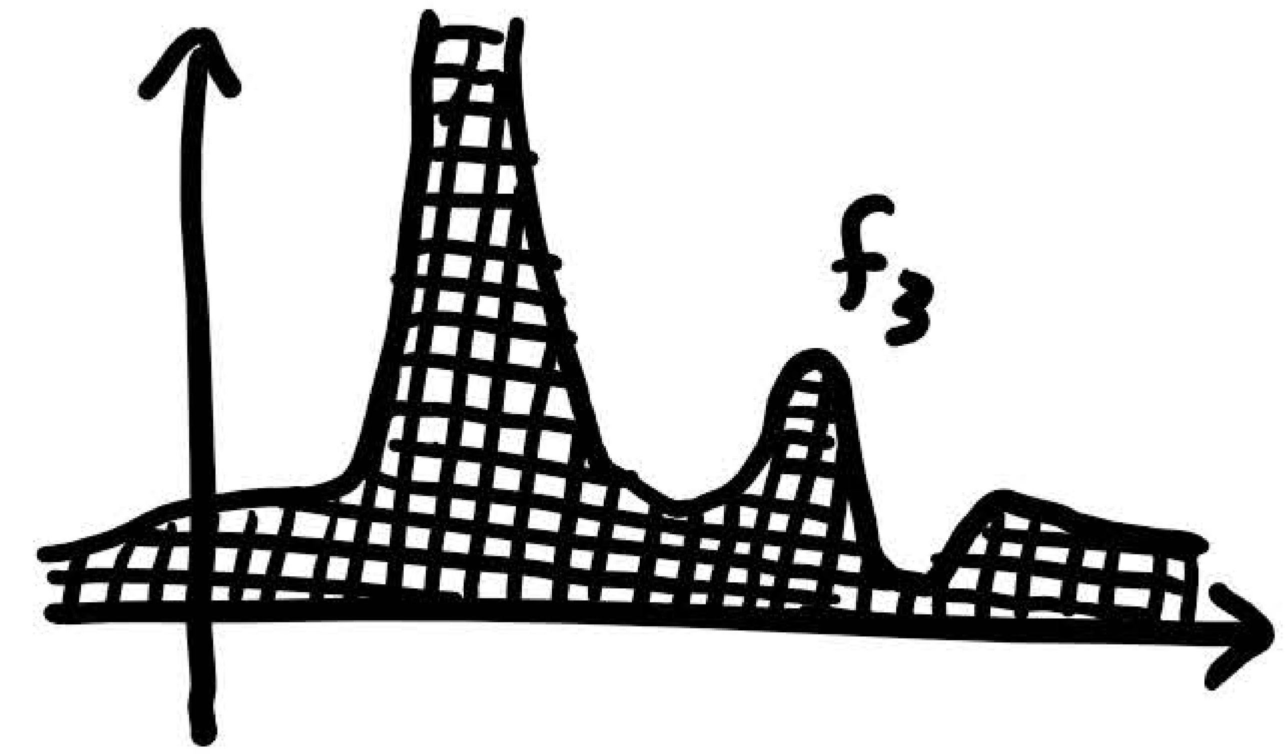


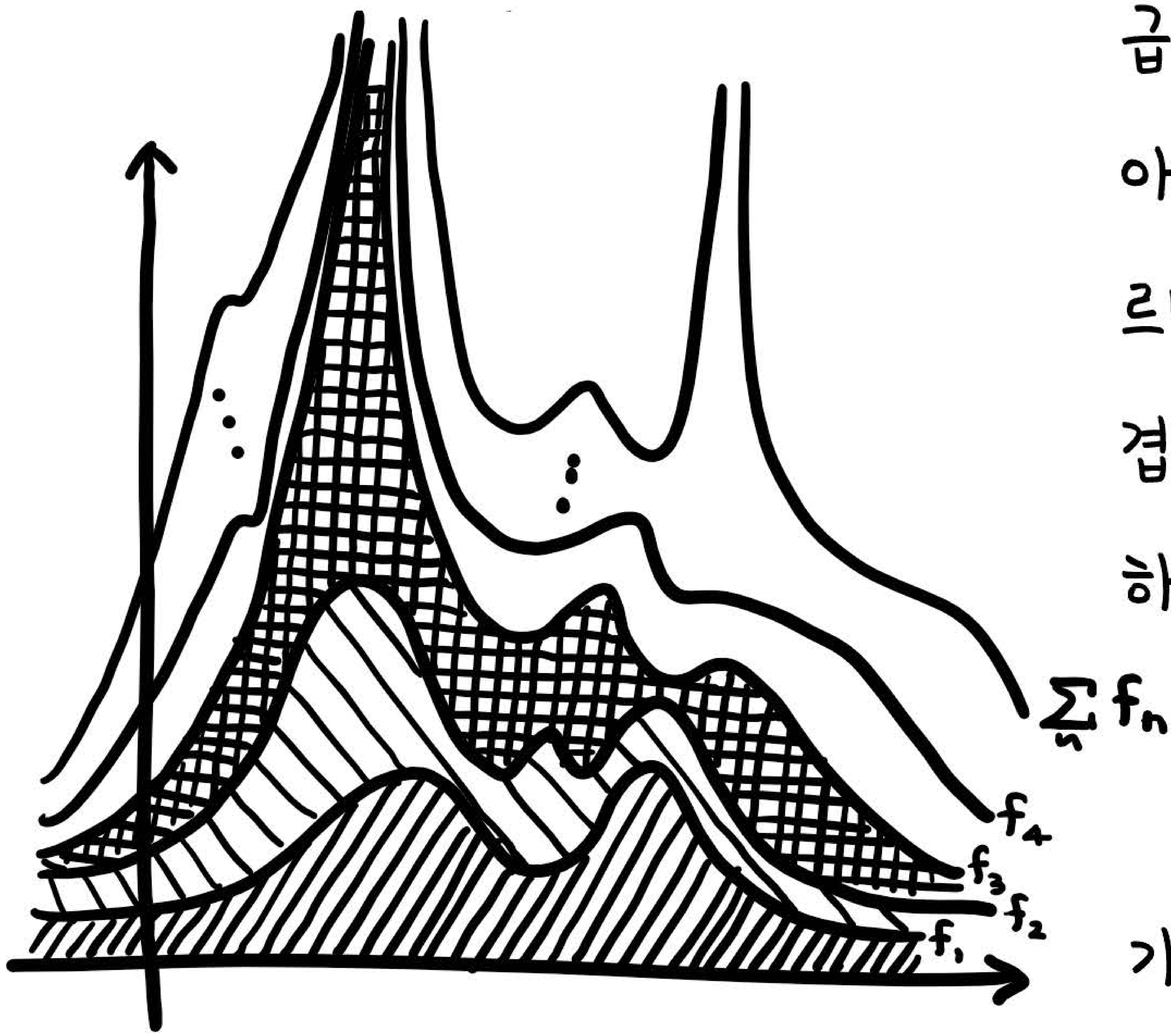
다시 말해서, 리만 적분 때처럼
르벡 적분 이론 또한 함수의
덧셈과 잘 어울린다는 거죠.

하지만 르벡 이론에서는 조금 더 나아갈 수 있어요.

르벡 적분 가능한 함수들이 자연수 개 주어져 있을 때,







급수의 합 함수 그래프 아래 영역은, 각 함수 그래프 아래 영역을 차곡차곡 포갠 거겠죠.

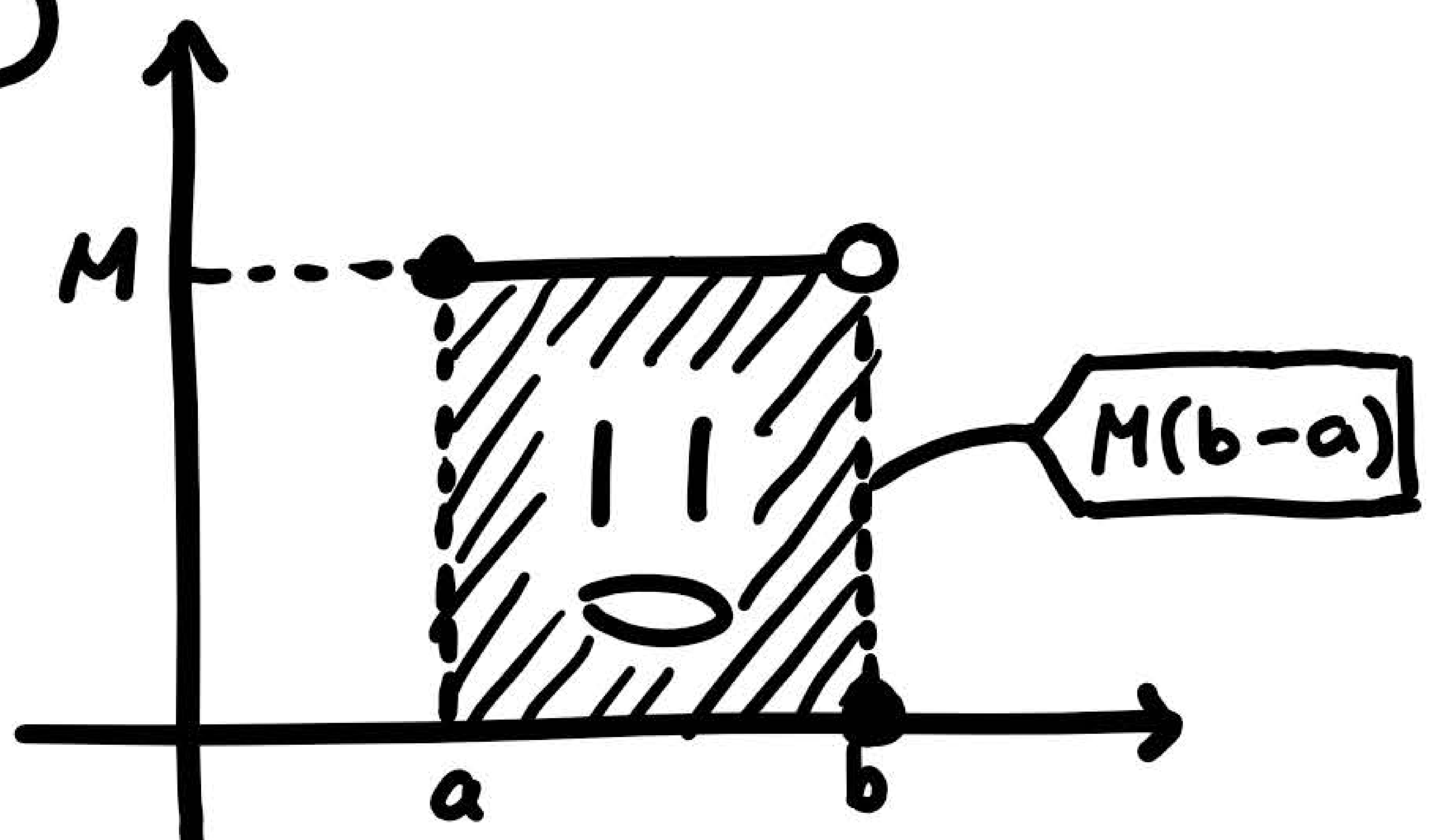
르벡 이론에서는 (측정 가능한) 영역 자연수 개를 겹치지 않게 포갰을 때, 그 극한 영역 또한 측정 가능하고 각 넓이의 합 = 전체 넓이가 된댔죠. 한 마디로,

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int f_1 + \int f_2 + \cdots$$

가 성립합니다. 적분 연산과 무한합 연산을 교환하는 첫 번째 정리예요! (단조 수렴 정리라고 합니다)

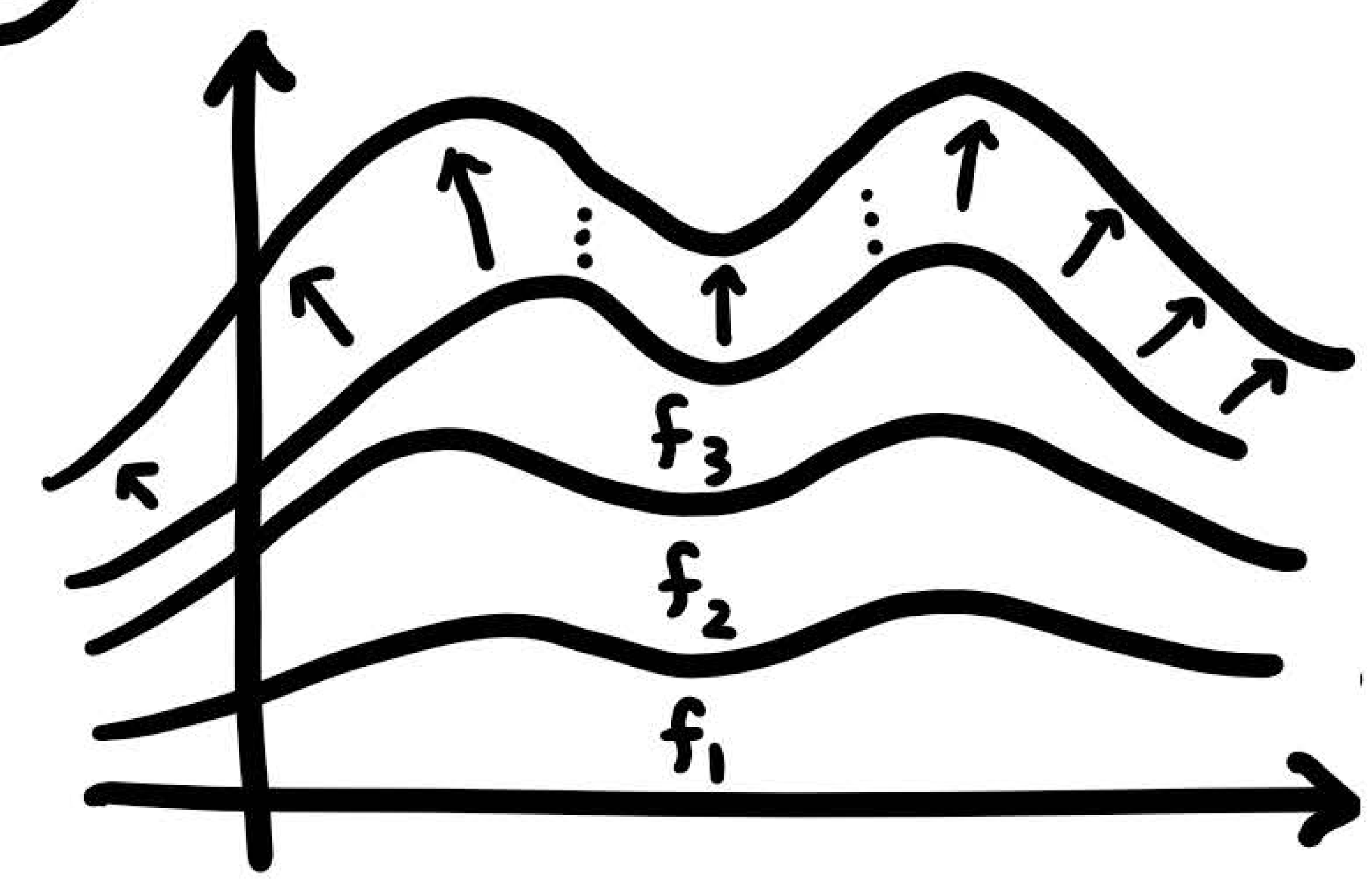
이런 관찰에 힘입어 다음처럼 얘기할 수도 있습니다. 만약 어떤 적분 이론에서,

①



상수함수 적분은 당연히 되고,

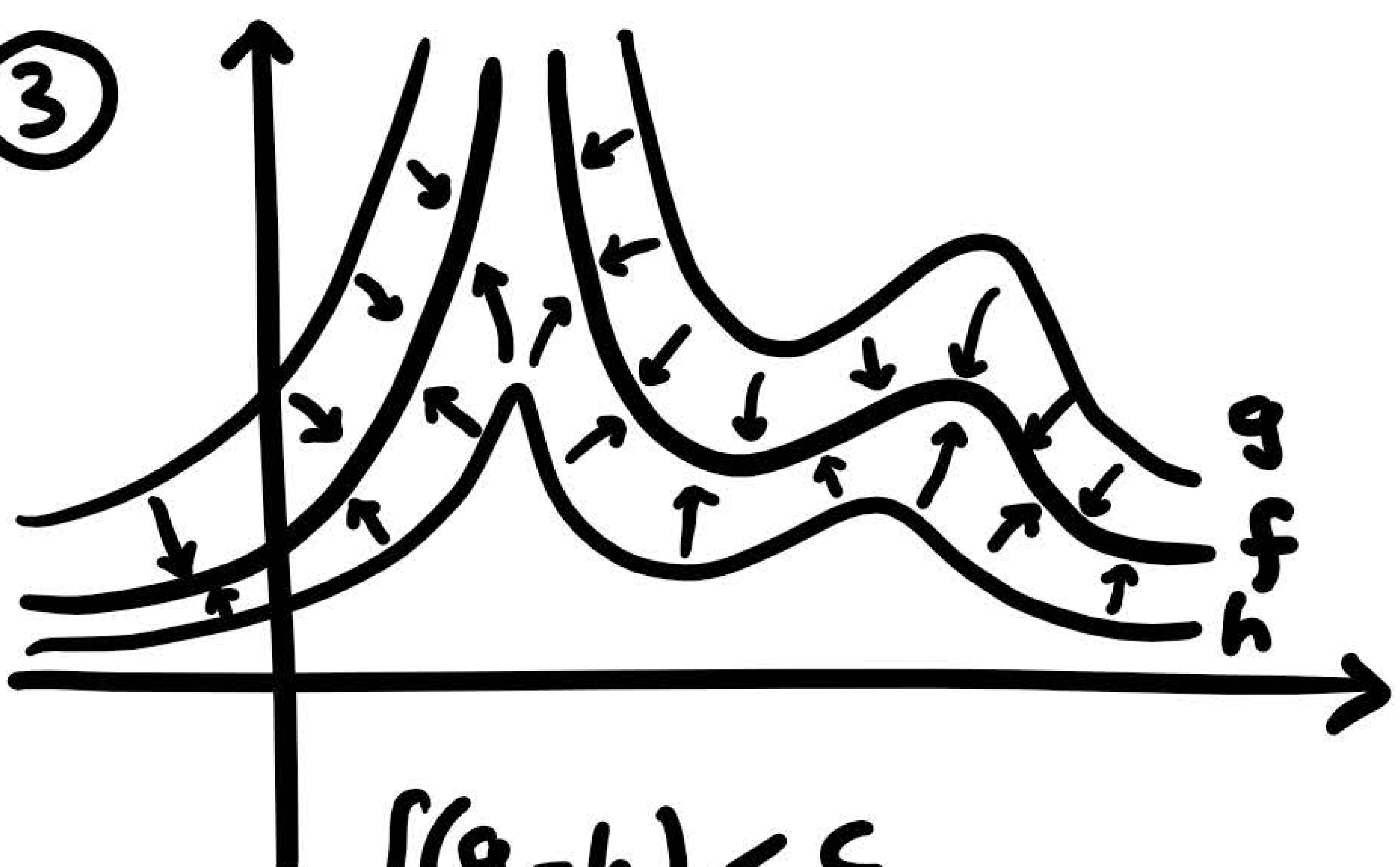
②



$$\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$$

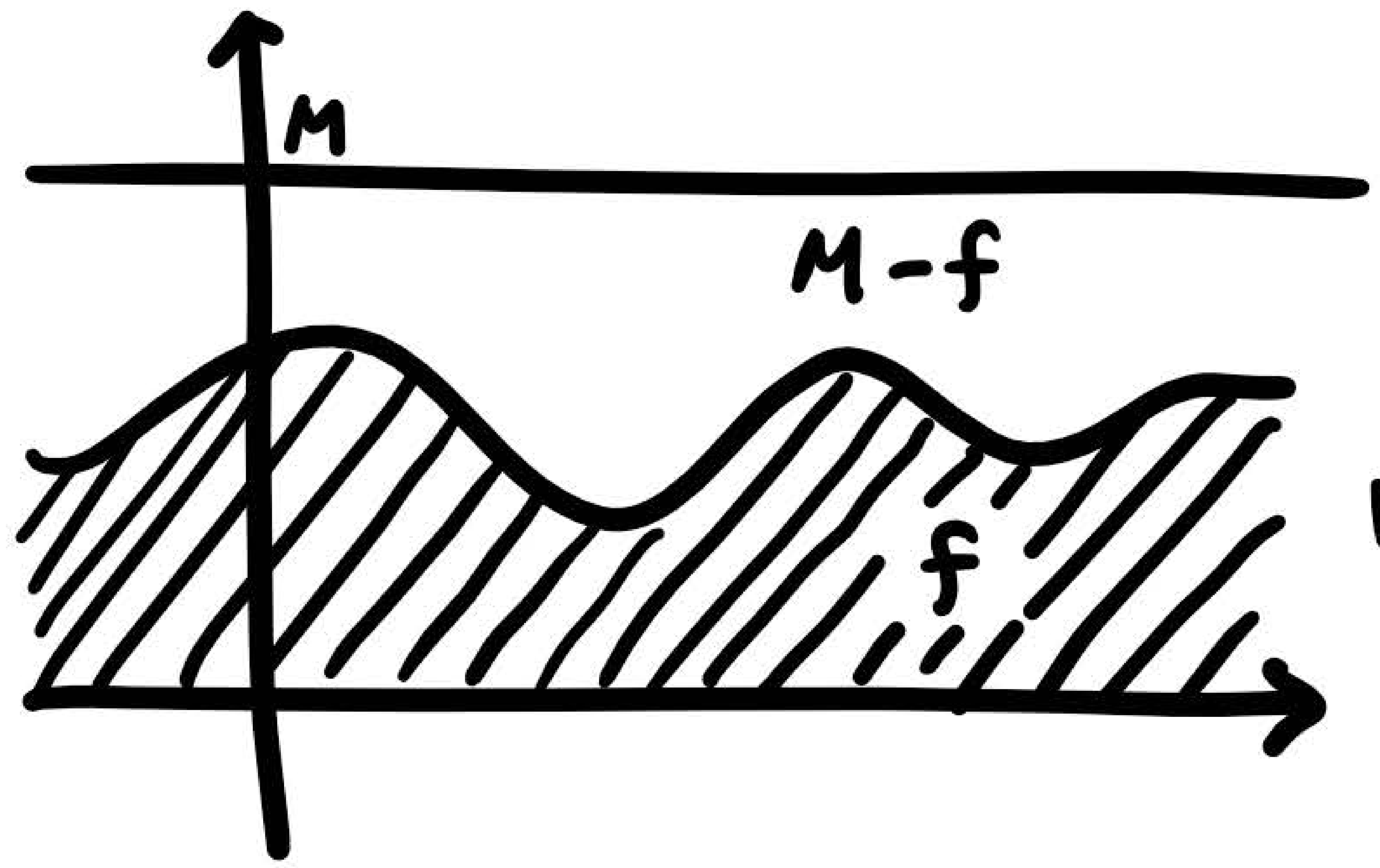
무한합과 적분 연산을 교환할 수 있고,

③



$$\int (g-h) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int g = \lim_{\varepsilon \to 0} \int h$$



f가 적분 가능하면

(상수)−f도

적분 가능한

함수로 치며,

위아래에서 적분 가능 함수로 근사되는

함수도 적분 가능하다고 보려면,

이 이론은 적어도 르벡 적분 이론을 포함해야 합니다.

이제 이 이야기의 마무리가 거의 다가왔네요. 방금 관찰한 정리를 응용해서, 다음 시간에는 푸리에 급수와 르벡 이론이 만들어내는 아름다운 그림을 같이 감상해 보겠습니다.
f
-f
$\mathcal{L}^2[a,b]$
그러면 다음 시간에 다시 만나요!

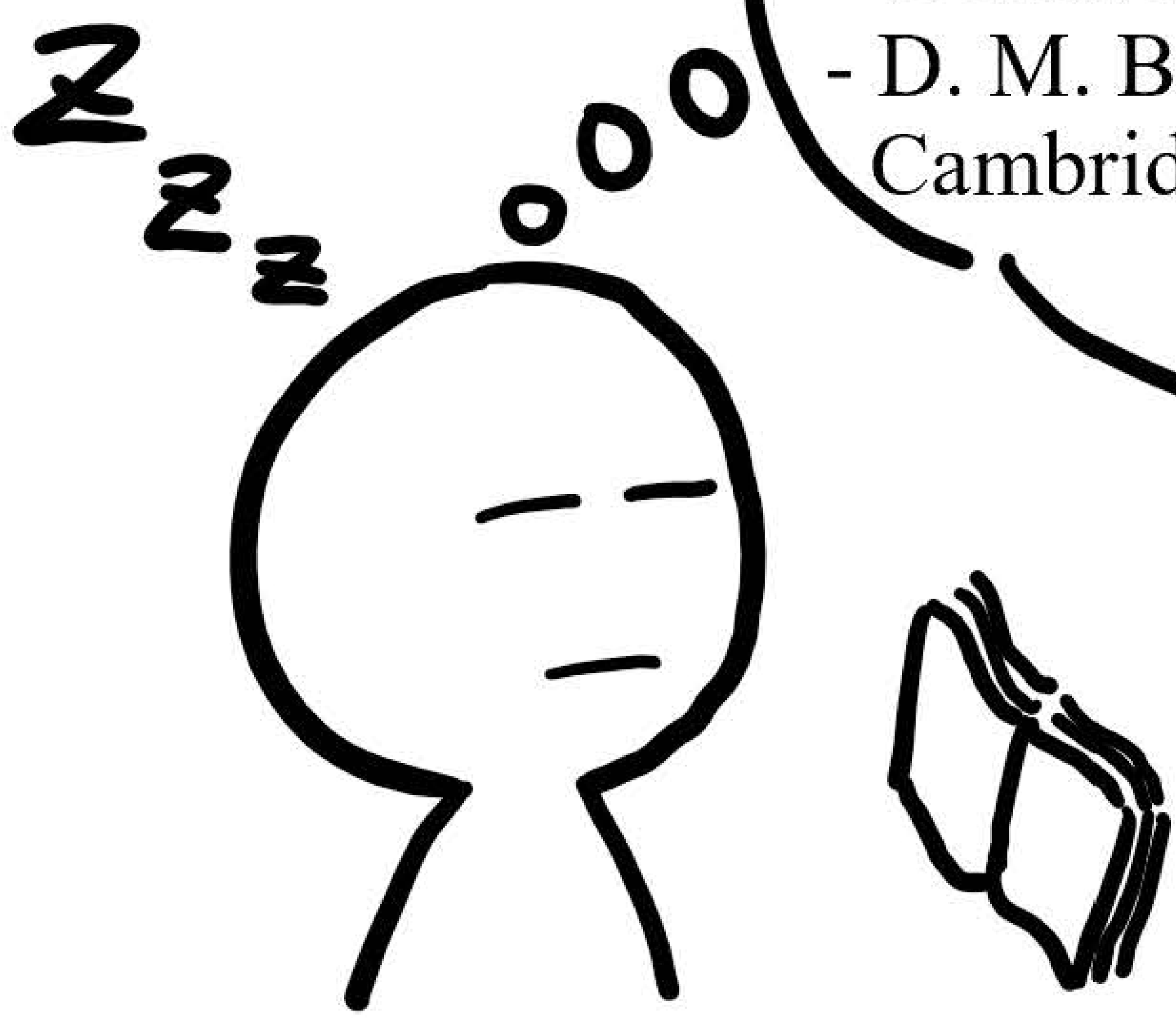
<참고문헌>

Primary Source:

- C. Jordan, *Cours D'Analyse de l'École Polytechnique*, 1894(2nd ed.), tome 2: Calcul Intégral.
- E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, 1895, Paris, École Norm. Ann. (3) 12, 9-55
- E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898. Paris, Gauthier-Villars.
- [L1]H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, 1902, Ann. Math. (3) 7, 231-359.
- H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. 1904. Paris, Gauthier-Villars.

Secondary Source:

- A. Wheeden, R. L. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis* (1st ed). 1977, CRC Press.
- G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed). 1999, Wiley.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis Vol 1)*. 2003, Princeton University Press.
- T. Tao, *An Introduction to Measure Theory*, 2011, AMS.
- T. Hawkins, *Lebesgue's Theory of Integration*, 2000, AMS Chelsea Publishing
- D. M. Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration. 2008*, 1st ed., Cambridge University Press



참고문헌은 이전 화와 크게 달라지지 않았습니다. 보렐과 르벡이 어떤 맥락에서 새로운 측도론을 생각해 냈는지 궁금하신 분은 원 논문 혹은 Hawkins 책을 살펴보시길 바라요!


Z Z Z
해석학하는 만화 4
~ 하나, 둘, 많이 ~