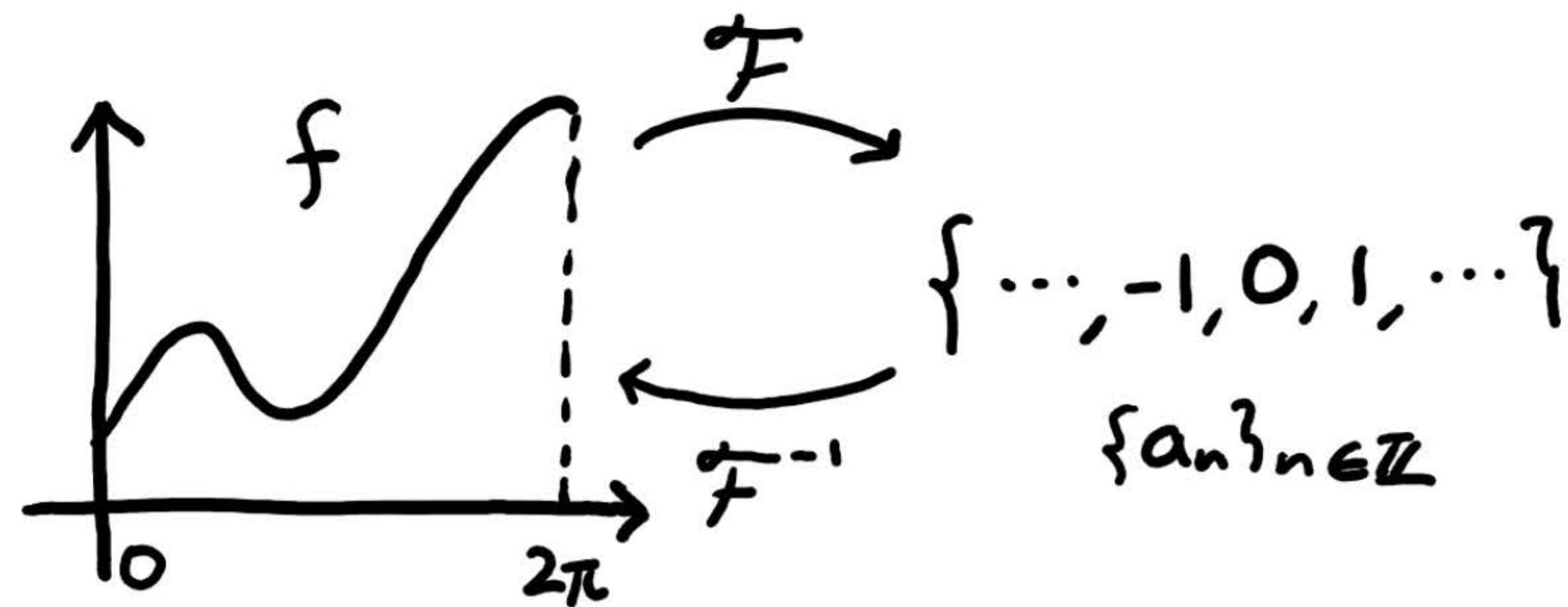
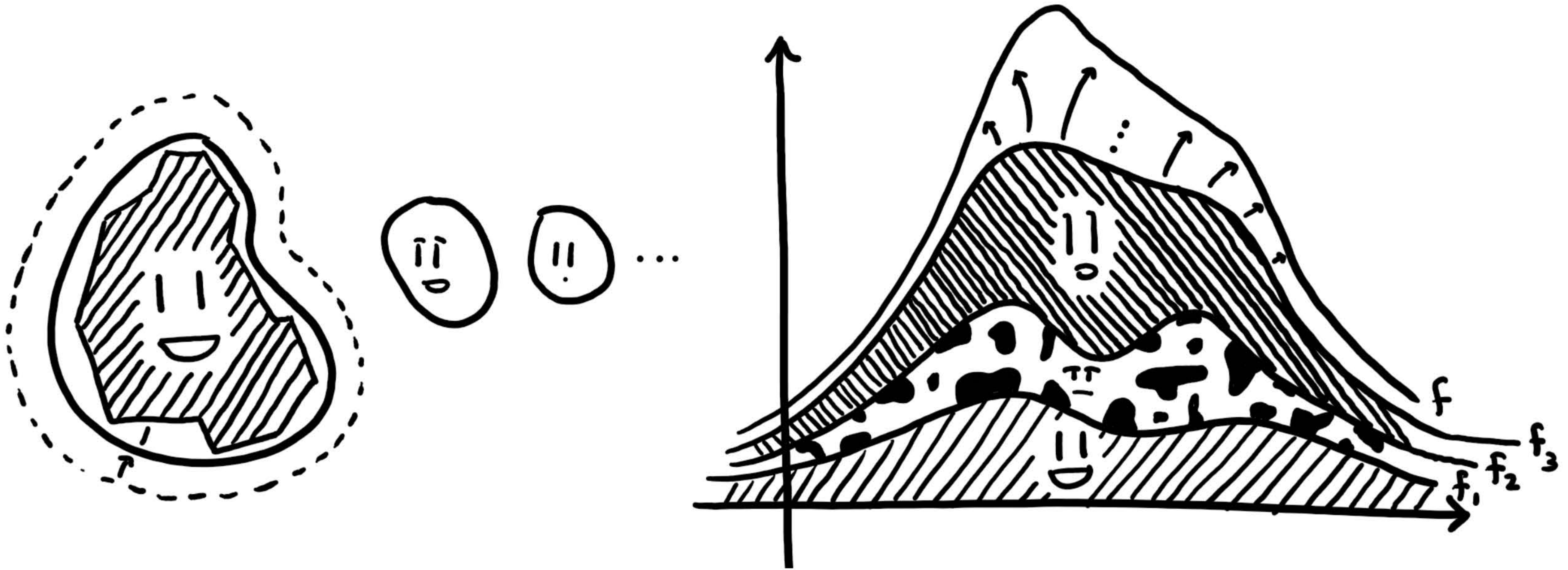




해석학하는 만화 5

- 르벡 이론의 승리! -

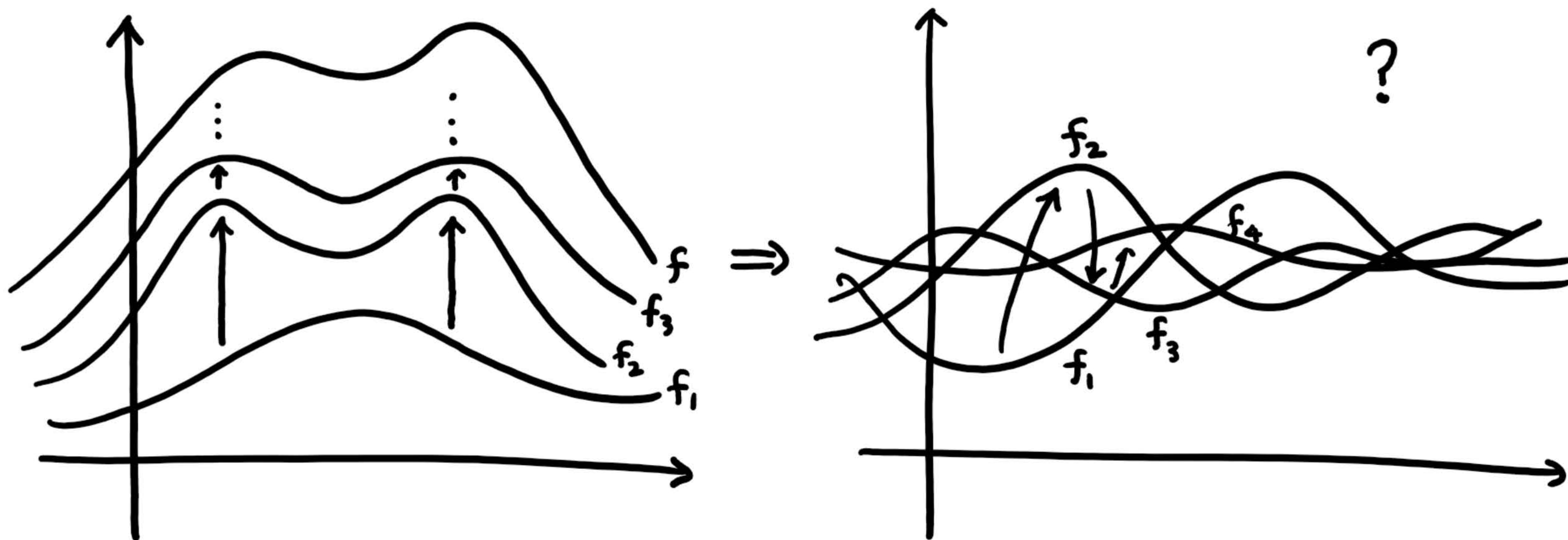
지난 시간에 한 작업은 크게 두 가지로 말할 수 있어요.



첫번째로, 열린/닫힌 집합으로 안팎에서 근사할 수 있는 집합에 넓이를 부여했어요. 이러면 가산 합 공리가 성립했죠.

넓이를 주는 방식을 알았으니 적분도 자연스럽게 따라왔죠. 특히, 양수 값 함수 가산 개를 쌓았을 때 넓이가 합해진다는 걸 알았구요.

음, 그런데 욕심이 약간 생기네요. 양수 값 함수가 계속 더해지는,
즉 증가하는 함수열을 다룰 때도 많겠지만,



요동치는 함수열이라도 어떤 함수로 수렴해 간다면 수렴 정리를 얘기할 수
있으면 좋겠어요. (적분값의 극한) = (극한 함수의 적분값) 말이에요.

하지만 이건 불가능하단 걸 잘 알고 있어요. 아래와 같은 상황에서는
수렴 정리를 기대할 수 없는 걸요.

함수열이 위로 솟아오르거나...

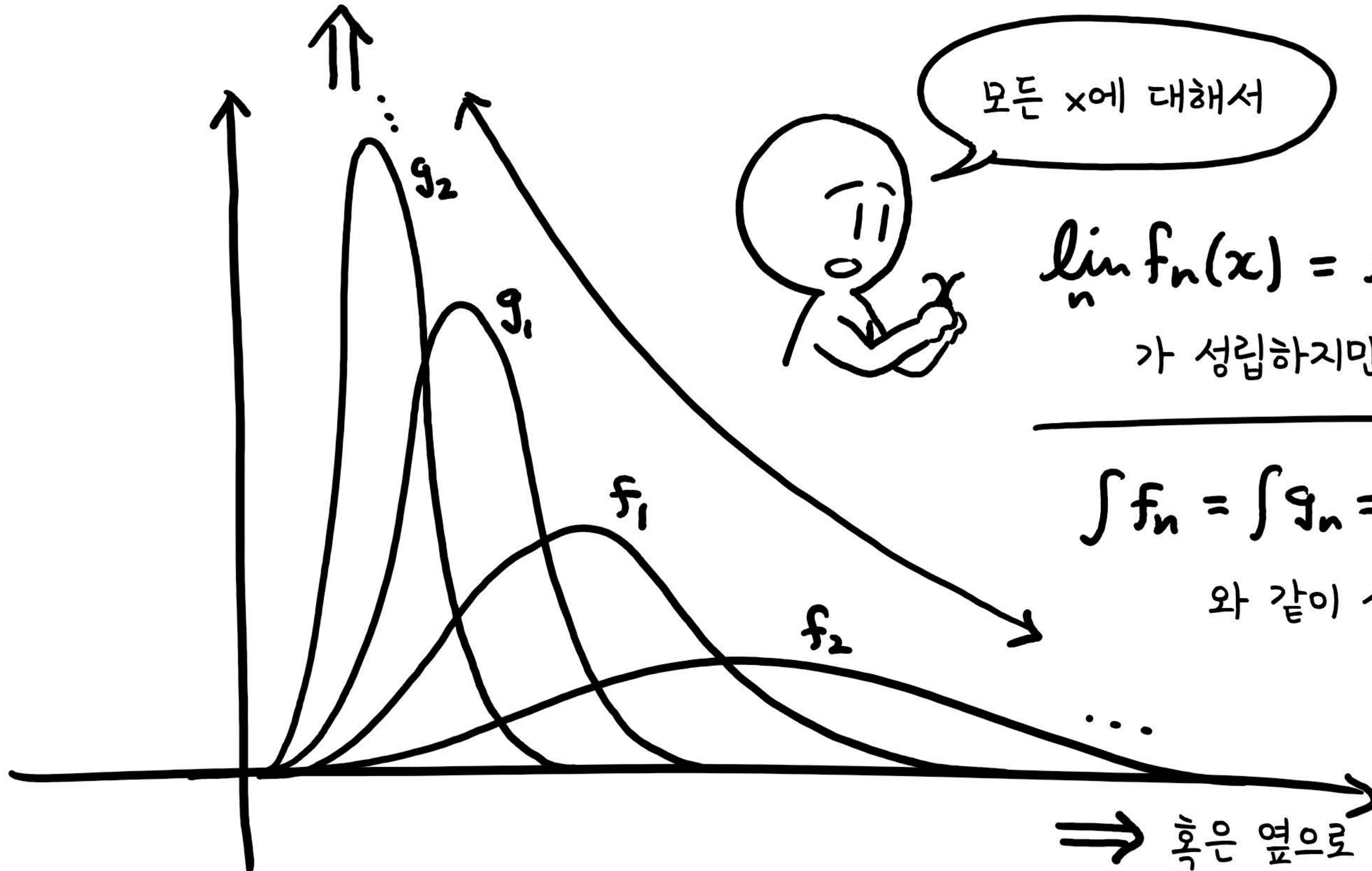


$$\lim_n f_n(x) = \lim_n g_n(x) = 0$$

가 성립하지만, 그럼에도...

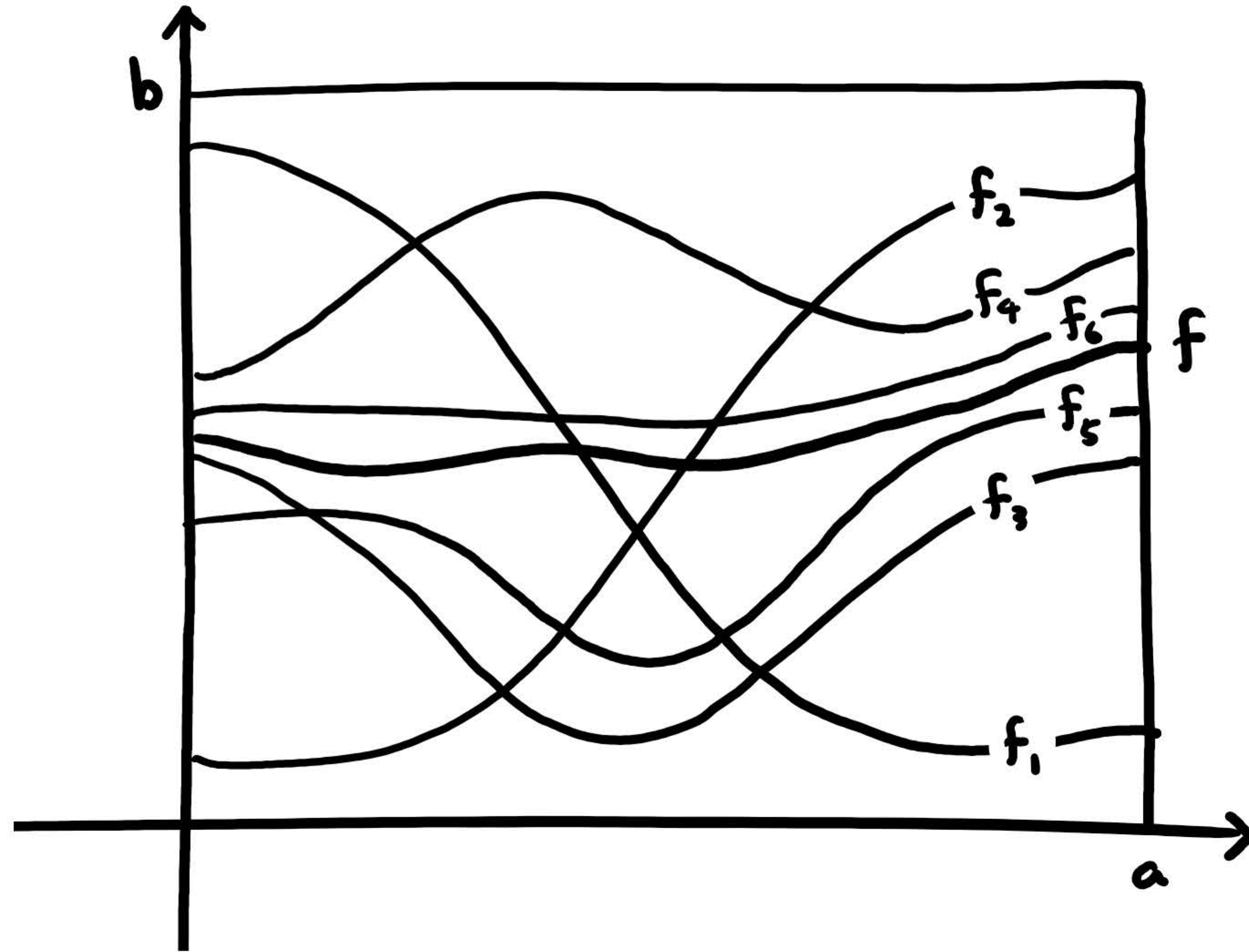
$$\int f_n = \int g_n = 1 \neq \int 0$$

와 같이 실패하죠.



⇒ 혹은 옆으로 퍼져버리는 경우,

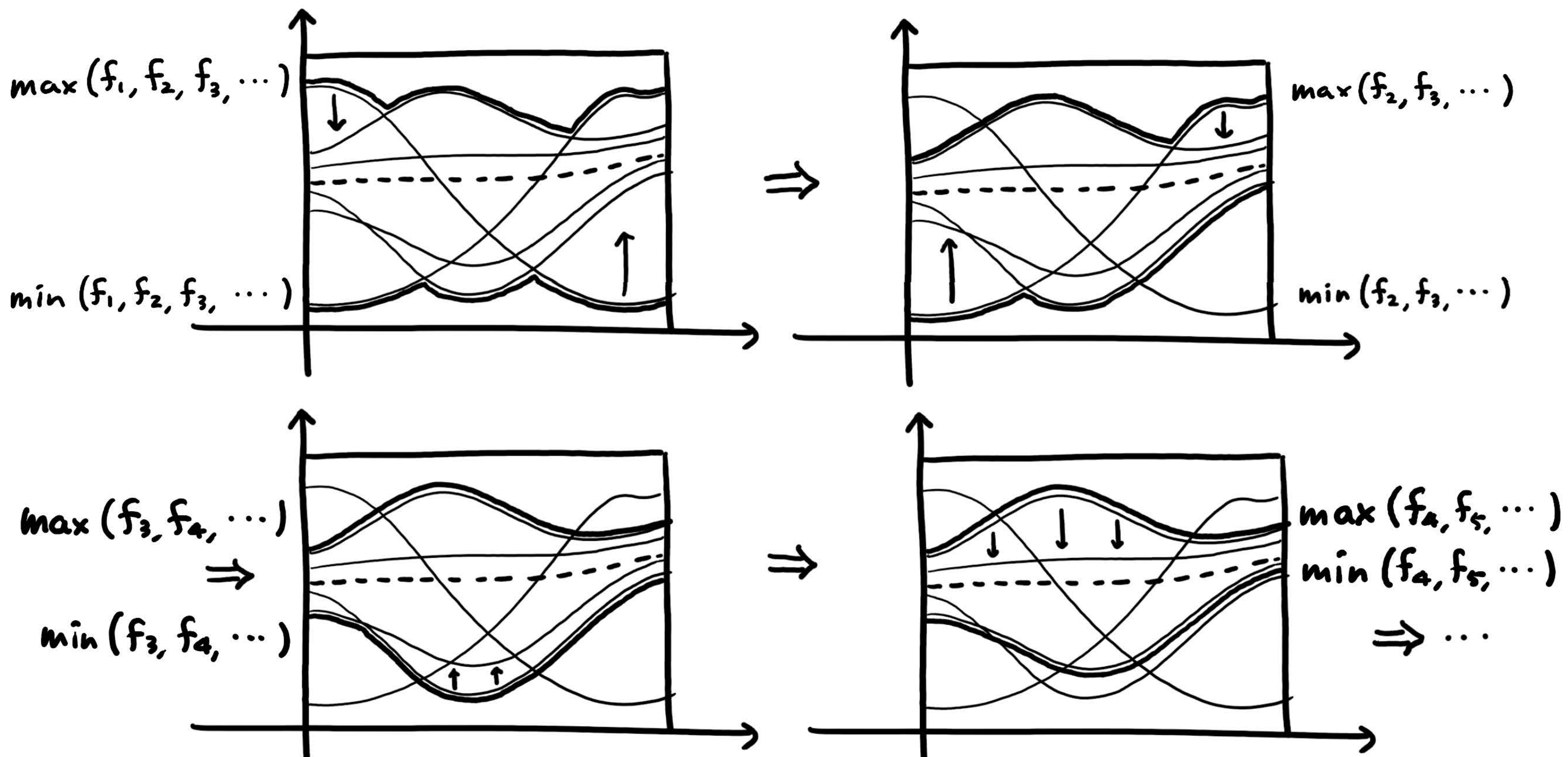
그러면 까짓거, 방금과 같이 솟아오르거나 퍼져나갈 수 없게 상자로
가둬 버리면 어떨까요?



$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n?$$

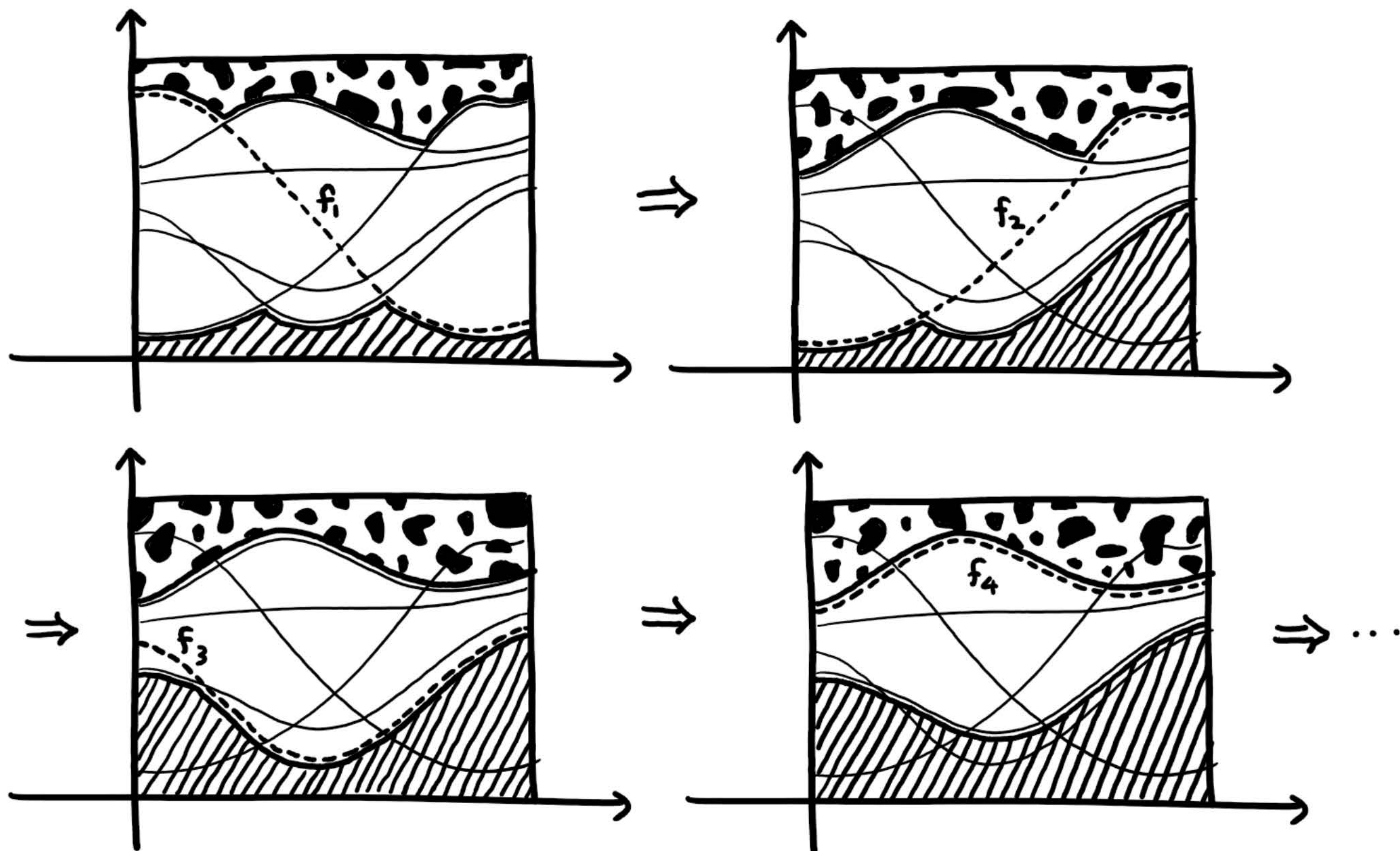
이 경우에는 (적분값의 극한) = (극한 함수의 적분값)이 성립할까요?

아래 그림을 보면, 굵은 선은 위아래에서 조여오는 함수열을 표시하고 있습니다.



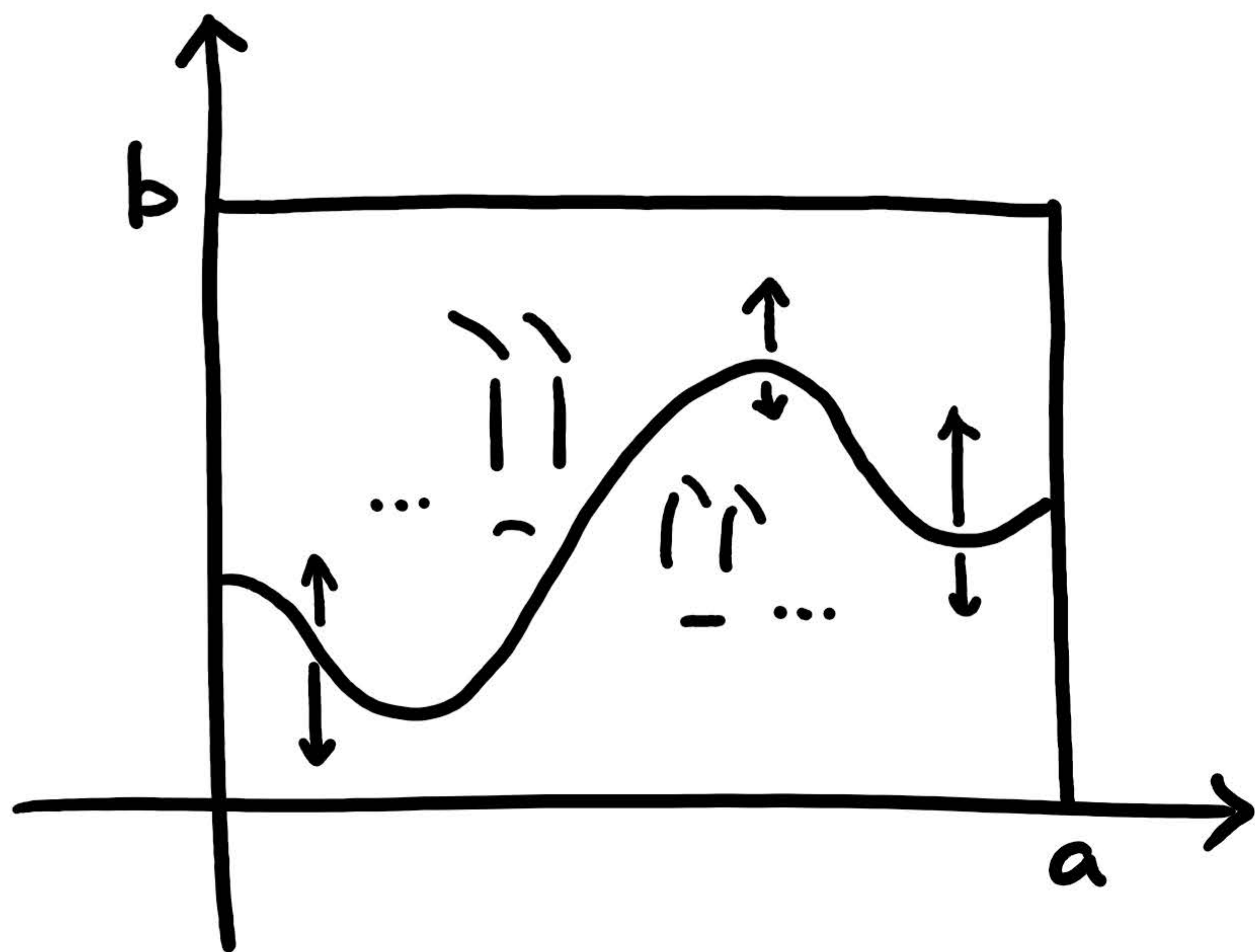
f_n 이 점선(f)으로 수렴하고 있으니, 두 굵은 선도 모두 f 로 수렴하겠죠. 그러면 단조 수렴 정리를 적용할 수 있습니다.

즉, (빛금 영역)의 극한 = (상자) - (어둡 영역)의 극한 = f 의 적분값인 거죠.



그런데 다시 보면, 각 f_n 은 두 굵은 선 사이에 끼여 있네요. 그러니 f_n 의 적분값은 (빛금 영역)과 (상자) - (어둡 영역) 사이일 거고, 그 극한도 f 의 적분값이겠죠.

방금 논의에서 아래에서 위로 솟아오르는 함수열 말고, 위에서 아래로 내려가는 함수열에도 수렴 정리를 사용했죠.



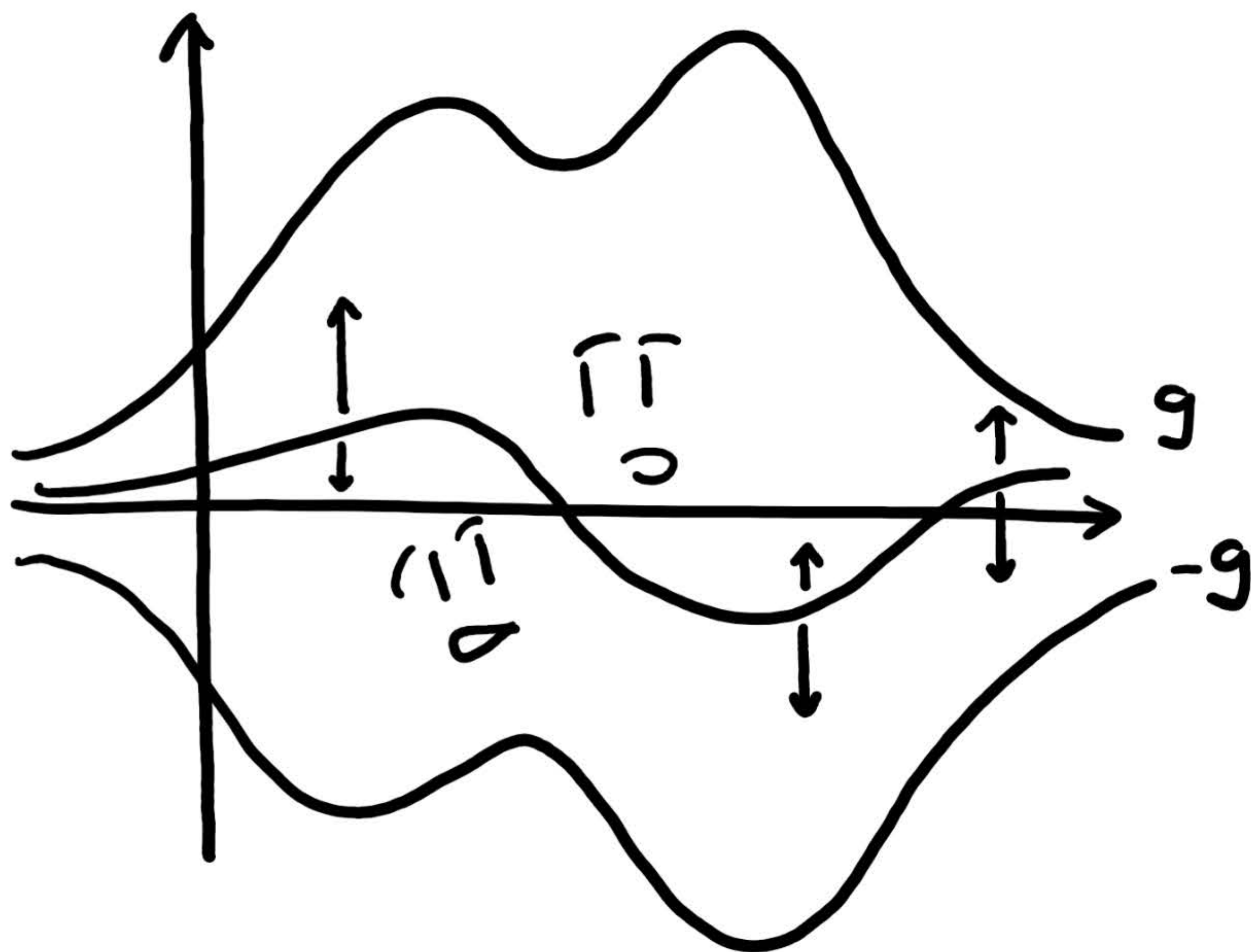
$$\int f_n \longrightarrow \int f$$



$$\int (b - f_n) \longrightarrow \int (b - f)$$

이게 가능했던 이유는, 위 그림과 같이 "상자에서의 여집합"을 고려하면 되기 때문이에요.

일반적으로는, 상자 말고도 적분값이 유한한 함수로 위아래로 가둘 수 있으면
아까와 같은 수렴 정리를 얘기할 수 있어요.



$$\boxed{\int f_n \longrightarrow \int f}$$

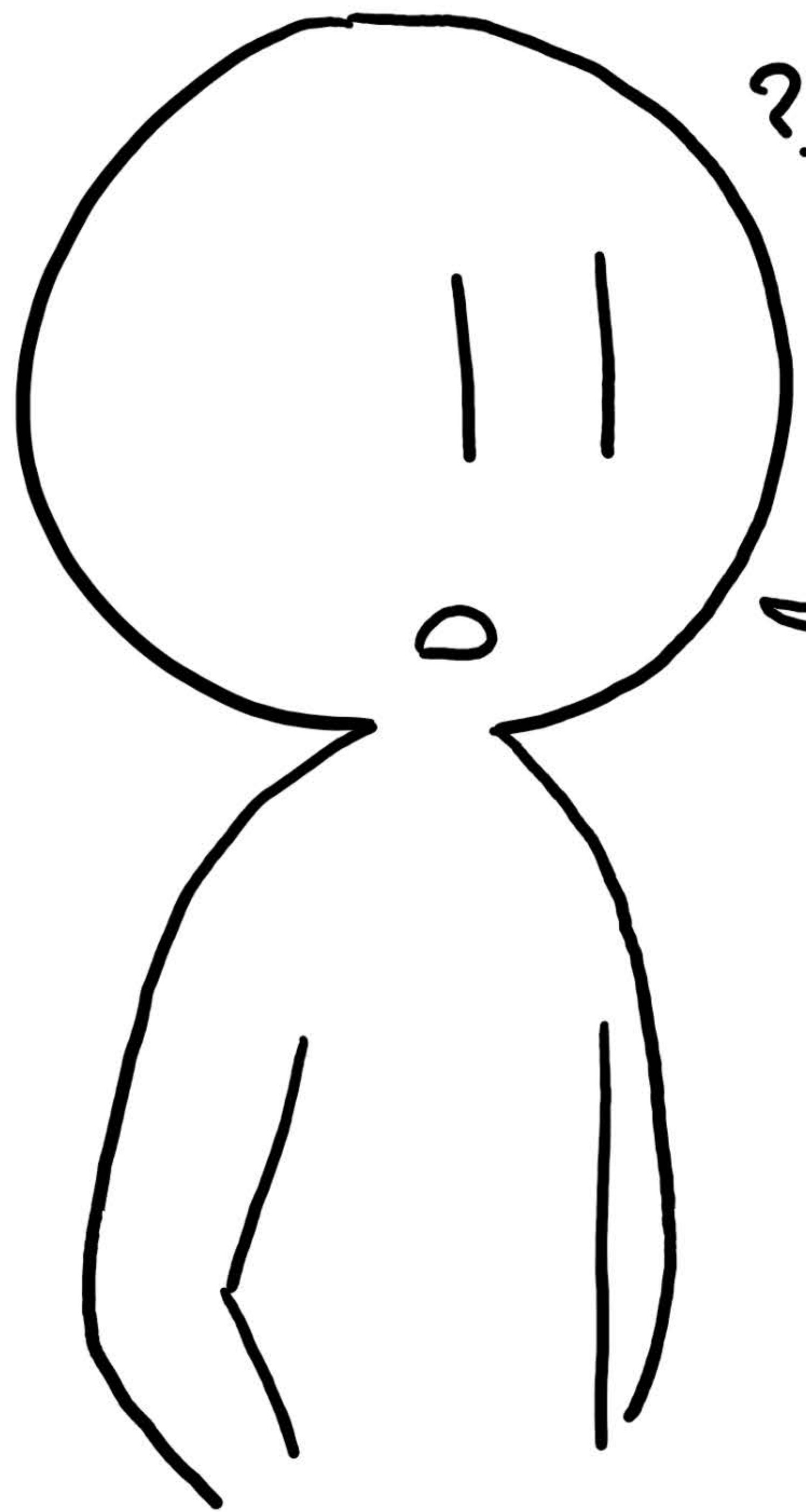


$$\boxed{\int (g - f_n) \longrightarrow \int (g - f)}$$



$$\boxed{\int (g + f_n) \longrightarrow \int (g + f)}$$

이 용라는 함수로 지배된다고 해서, 이 정리를 지배 수렴 정리라고 부릅니다.

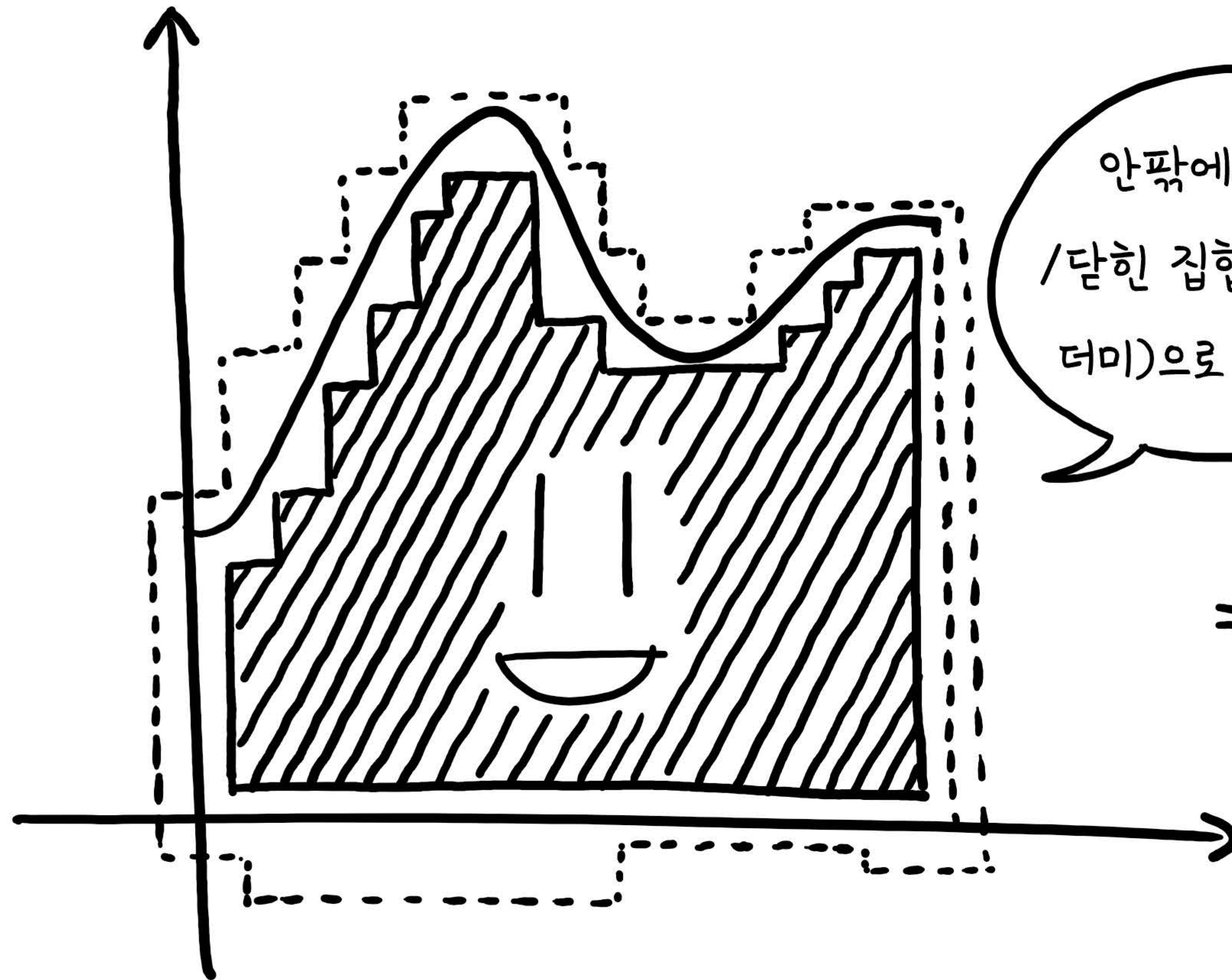


음, 리만 적분보다 성질이 훨씬 좋은 건
알겠는데... 정의 방식이 너무 복잡한데요?
지금 정의에 맞게 적분 값을 계산하는
구체적인 방법이 떠오르지 않아요.



충분히 그렇게 느낄 수 있죠. 한번 생각해 봅시다.

첫번째로, 리만 적분 가능한 함수들은 모두 르베그 적분 가능합니다.



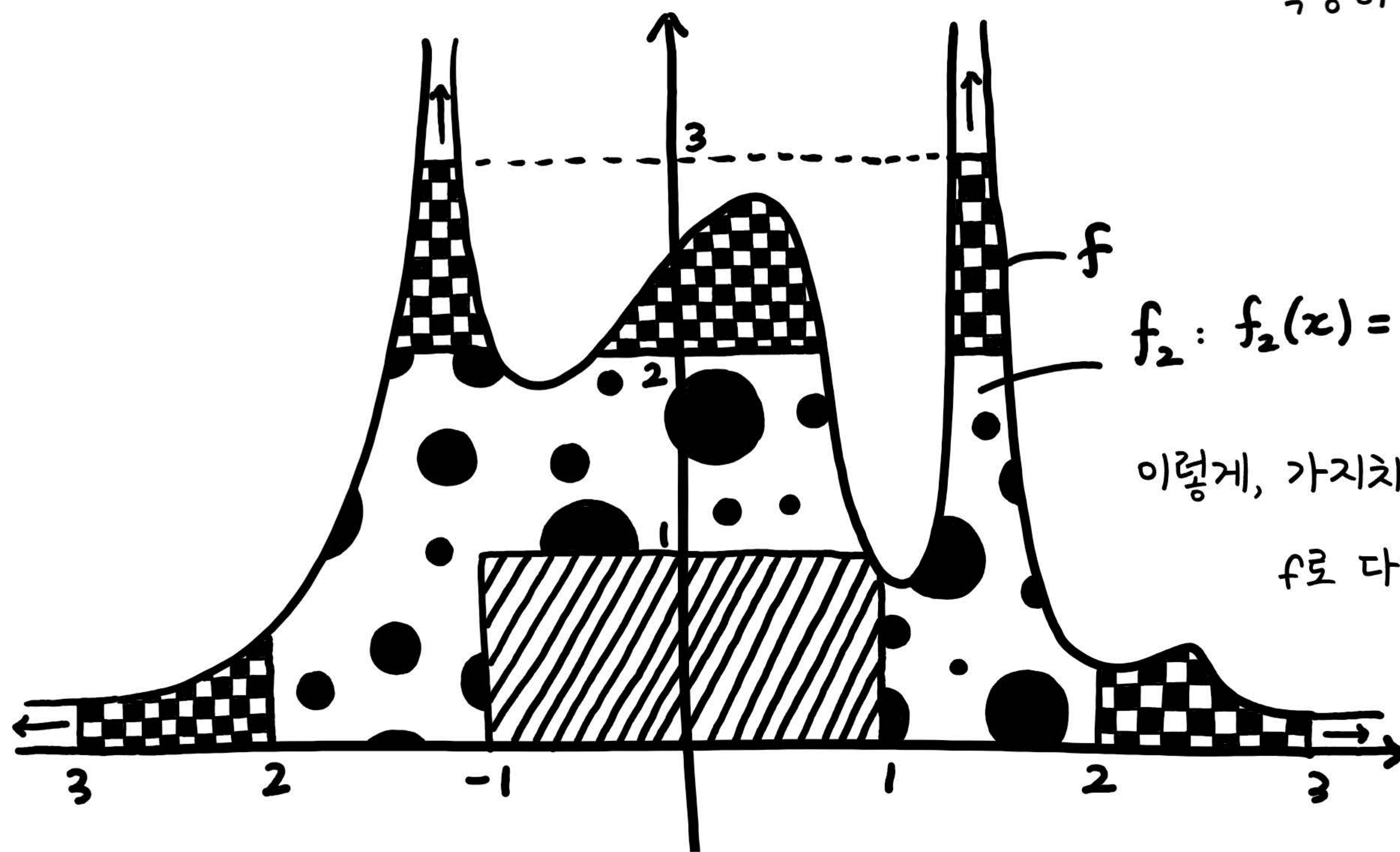
안팎에서 열린
/ 닫힌 집합 (= 직사각형
더미)으로 근사되니까!

$$\Rightarrow \int_{\text{Lebesgue}} f = \int_{\text{Riemann}} f$$

그리고 이 경우, 두 적분
방식으로 계산한 넓이
값이 일치해요.

두번째로, 적분값이 유한한 르벡 적분 가능 함수들은 '더 좋은' 함수들로 근사할 수 있어요.

먼저, 정의역이나 함수값 범위가 너무 넓은 때는, 적당히 가지치기해도 괜찮아요.

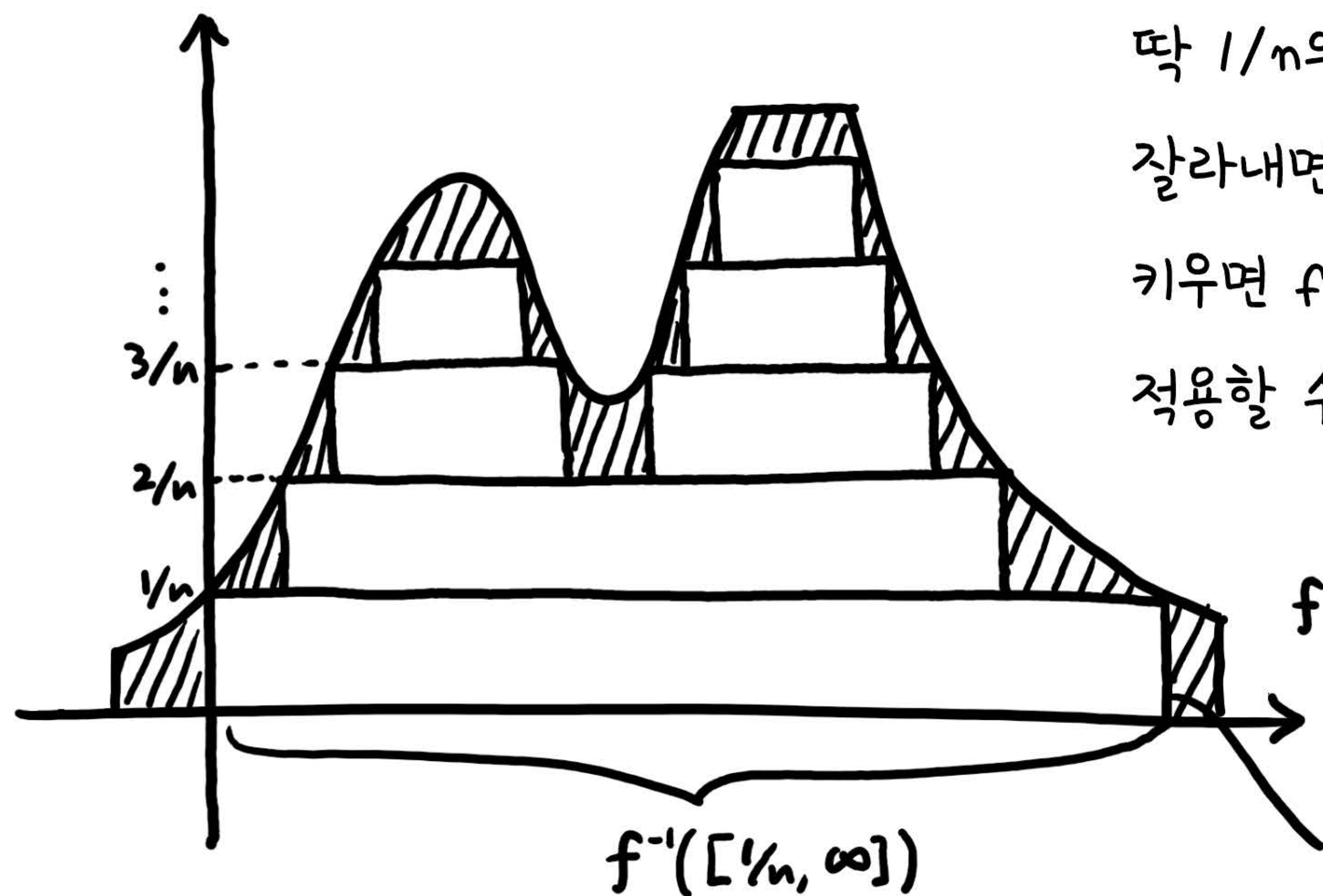


$$f_2: f_2(x) = \begin{cases} 2 & |x| \leq 2, f(x) > 2 \\ f(x) & |x| \leq 2, f(x) \leq 2 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

이렇게, 가지치기한 함수들이 증가하면서 f 로 다가가기 때문에 단조 수렴 정리를 쓸 수 있거든요.

$$f_n \rightarrow f \Rightarrow \int f_n \rightarrow \int f$$

그리고, 이렇게 암전한 르벡 적분 가능 함수들은 계단 모양 함수들로 근사할 수 있어요.



딱 $1/n$ 의 배수만 함숫값으로 가지도록 귀퉁이를 잘라내면 계단식 함수가 되겠죠. 여기서 n 을 키우면 f 로 수렴하기 때문에, 단조 수렴 정리를 적용할 수 있습니다.

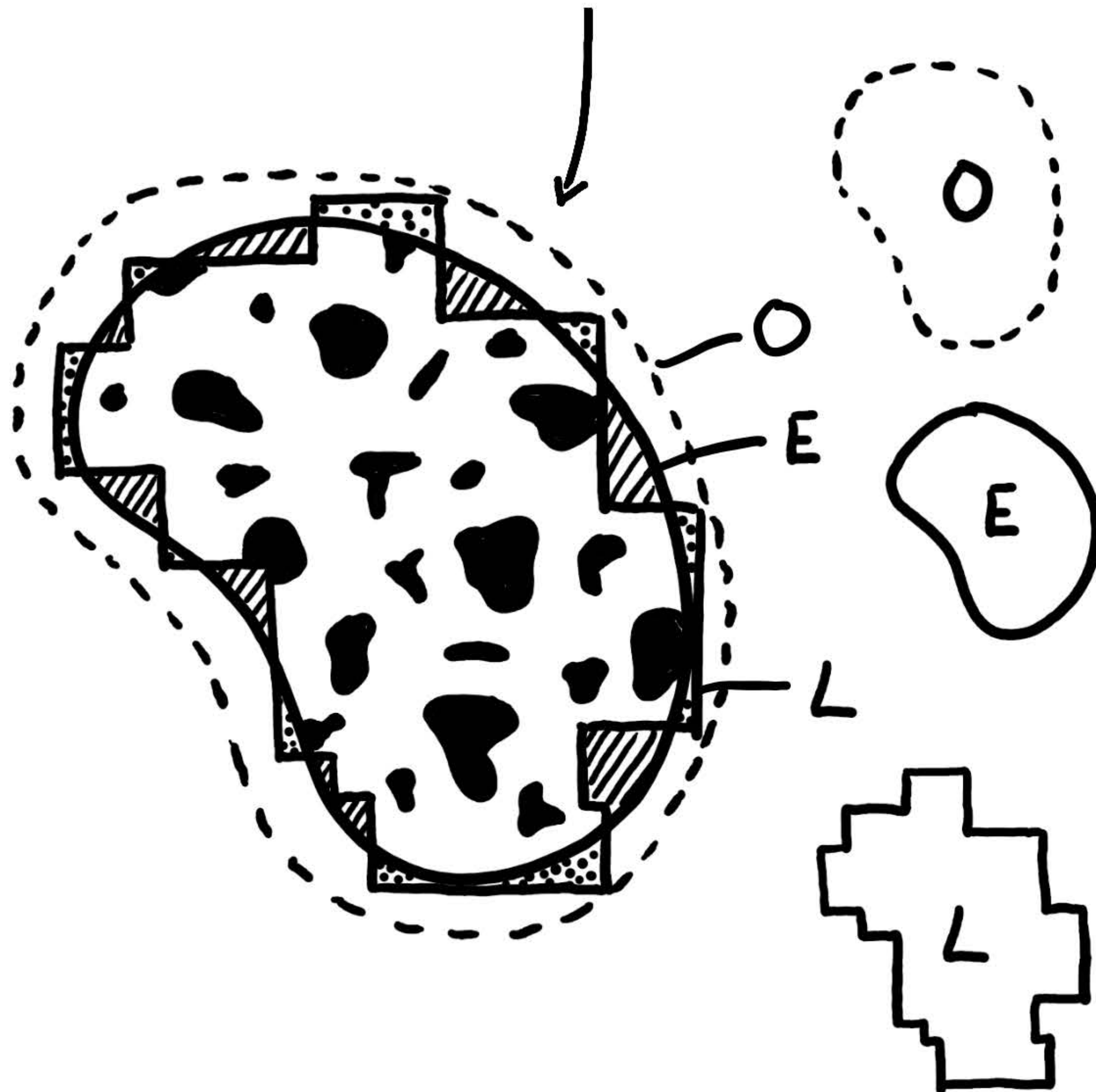
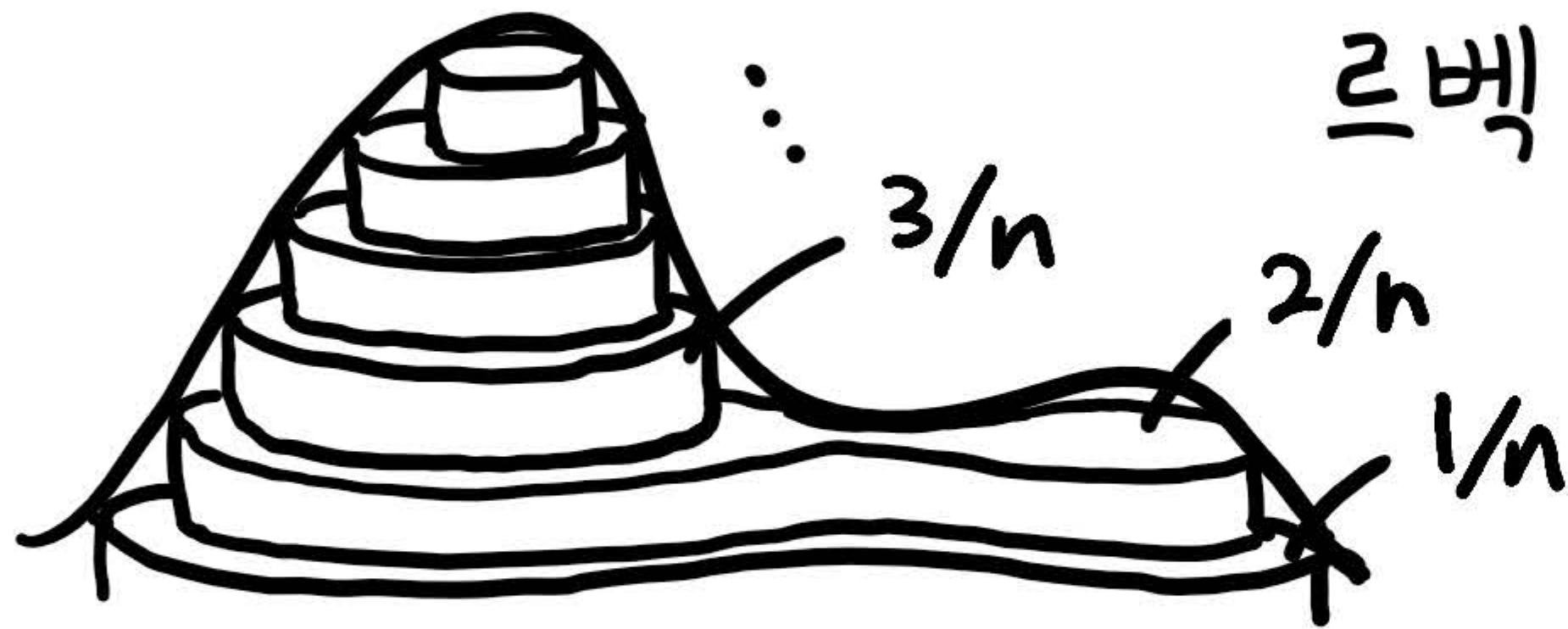
$$f_n = \sum_k \frac{1}{n} \chi_{f^{-1}([k/n, \infty])}$$

$\rightarrow f$

여기서 이 계단 각각의 밑면은 (차원이 1 낮아진)

르벡 가측 집합이 됩니다. 이를 $\mathcal{E}$ 라고 하면,

$\mathcal{E}$ 를 밖에서 감싸는 열린 집합 O 와, O 를 안에서 근사하는 "직사각형 더미" L 을 생각합시다.



$$\square + \text{dots} + \text{hatched} + \text{irregular} = O$$

$$\text{hatched} + \text{irregular} = E$$

$$\text{dots} + \text{irregular} = L$$

이때,

$$\square + \text{dots} < \varepsilon \quad \text{이도록 하는 건}$$

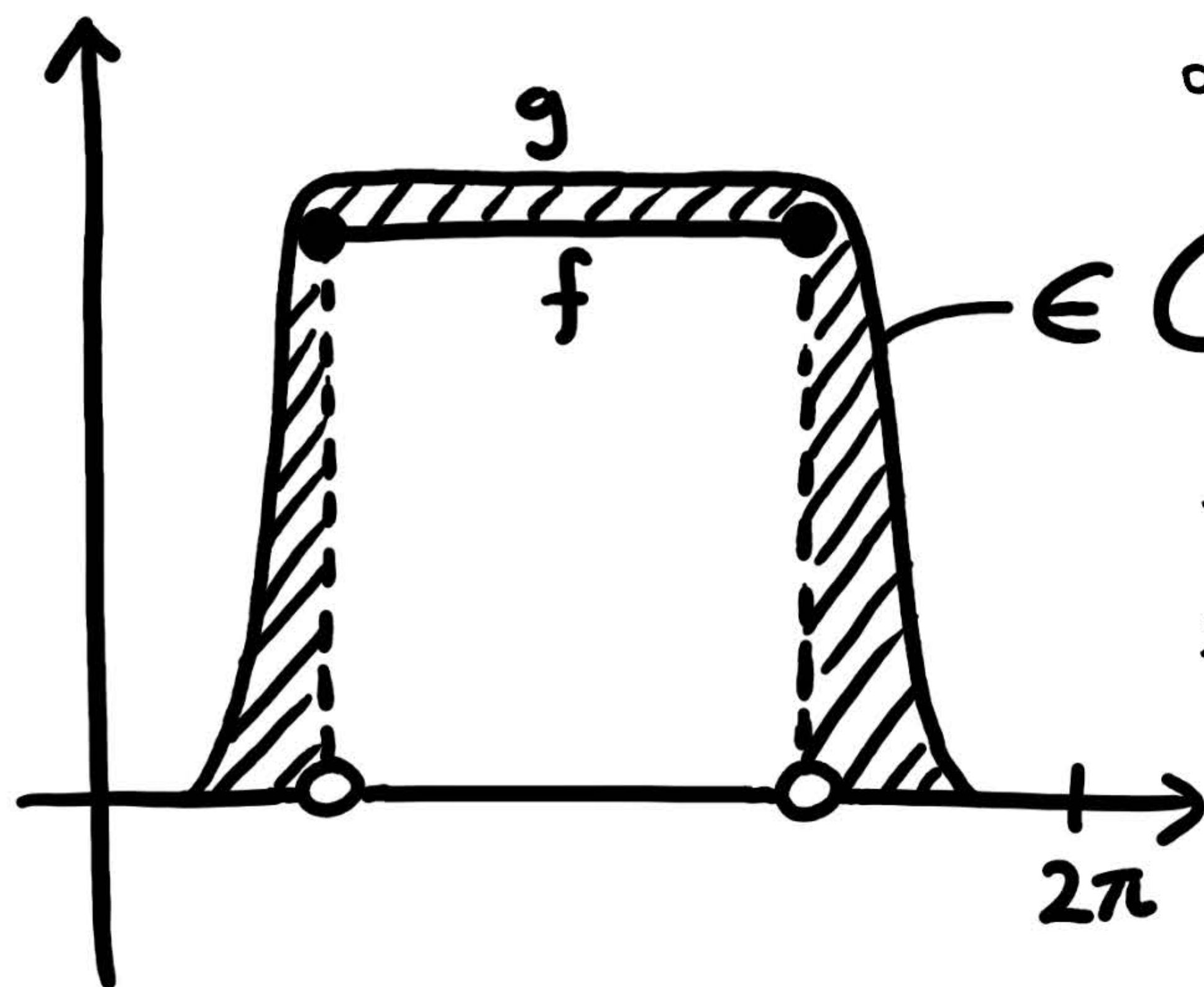
$$\square + \text{hatched} < \varepsilon \quad \text{어렵지 않아요.}$$

$$\Rightarrow \text{dots} + \text{hatched} < 2\varepsilon.$$

즉, $\mathcal{E}$ 와 L 차이가 별로 안 나도록 직사각형 더미 L 을 잡을 수 있어요.

그러니, 계단 함수는 정말 반듯한 (직사각형 합집합 모양의) 밑면을 가진 계단함수로 근사할 수 있죠.

저희 이야기에서는 안 쓰이는 사실이지만, 사실 이런 (불연속한) 계단함수는...



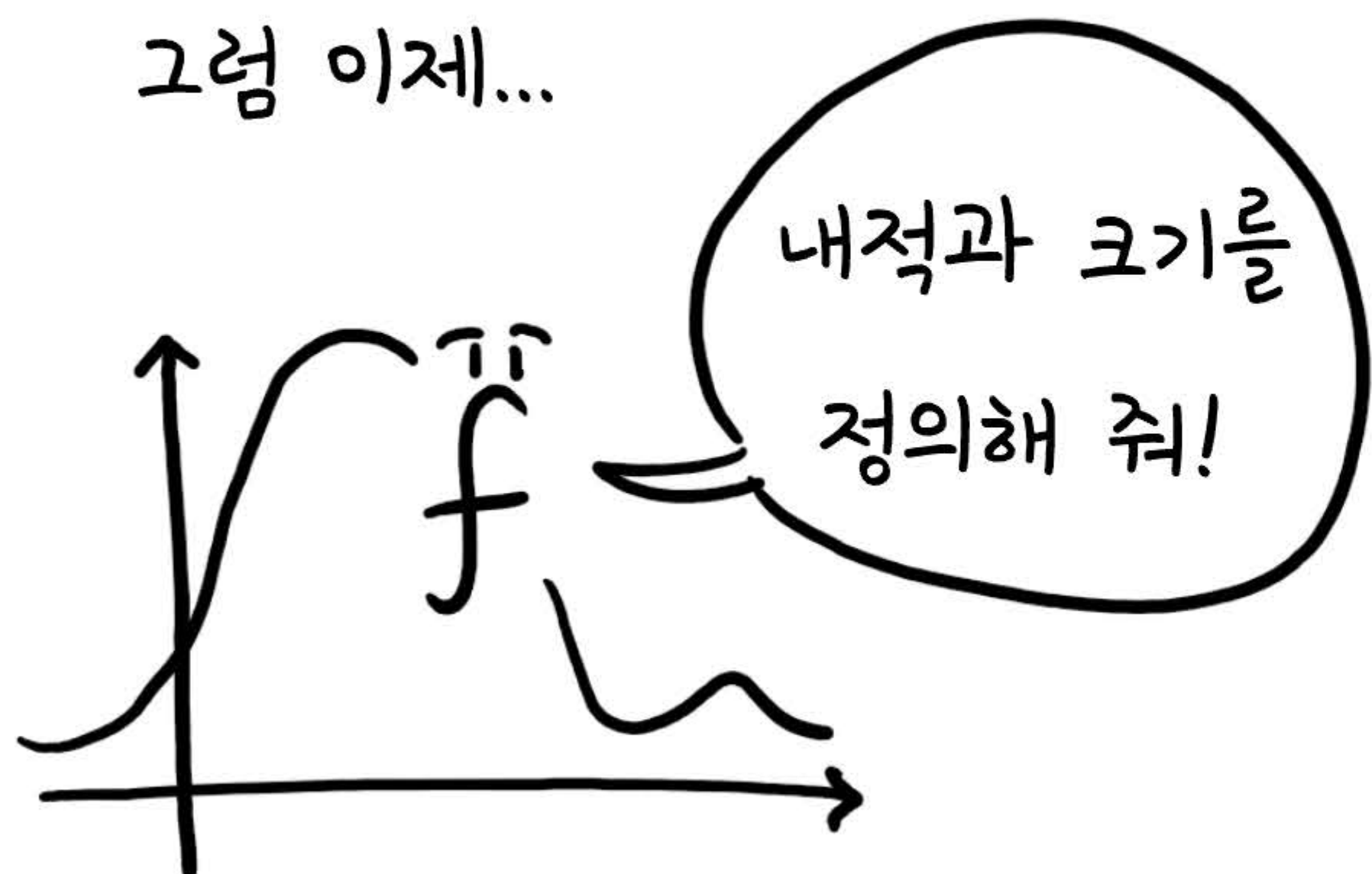
$\in C^\infty([2\pi])$ or $a_n x^n + \dots + a_0$

무한 번 미분 가능한 함수, 혹은 다항함수로 잘 근사할 수도 있어요.

그러니, 임의의 르벡 가측인 함수를 다룬다고 해서 엄청 겁낼 건 아니라는 거죠. 충분히 좋은 함수로 근사해서 적분 정보를 읽어낼 수 있으니까요.

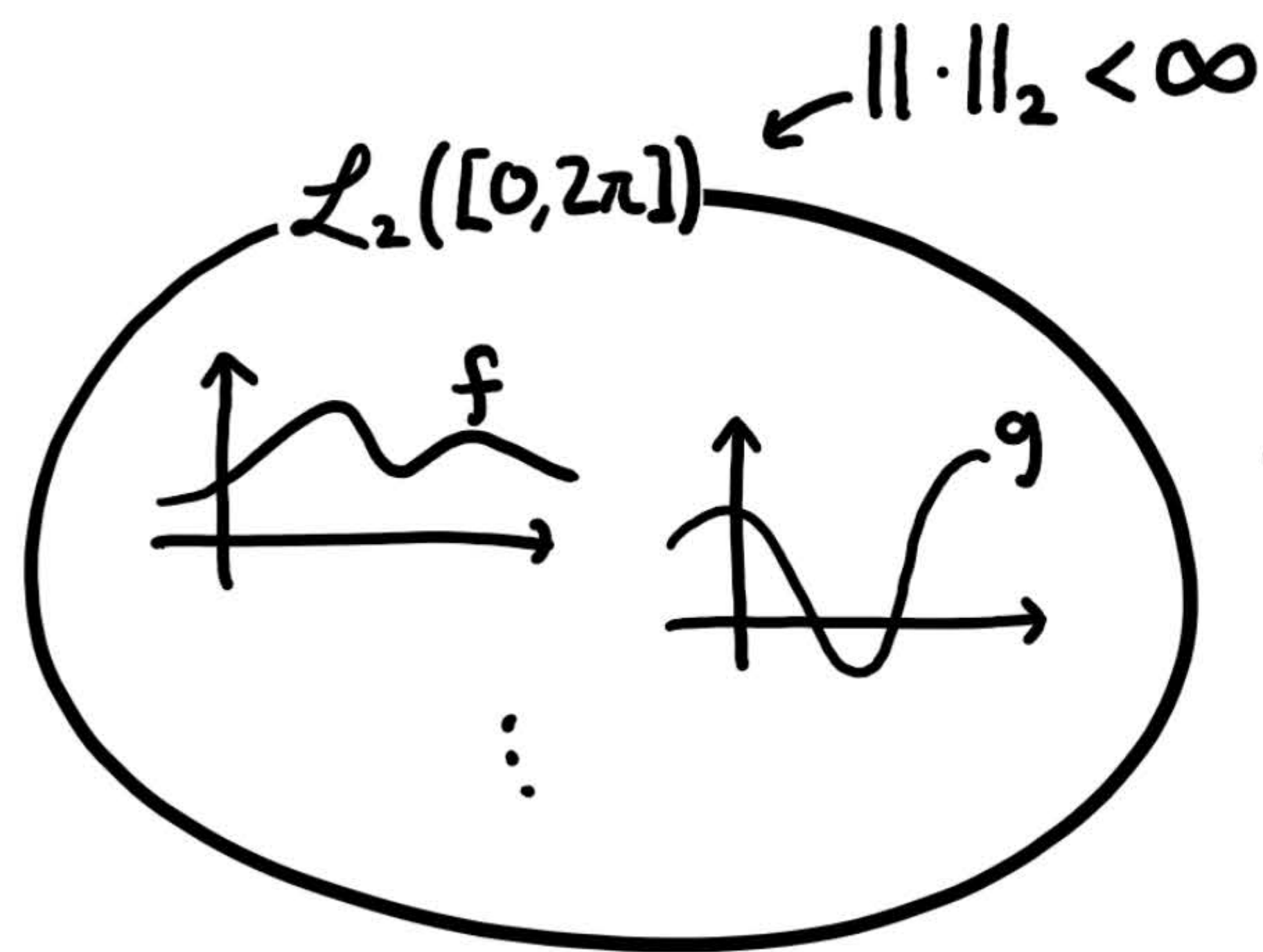
이쯤하면 리만 적분을 대신할 르벡 적분 이론을 적당히 배운 것 같아요.

그럼 이제...



아하, 리만 이론 때와 비슷하게, 이번에는 르벡 가측인 함수들의 "크기"를 다음과 같이 정의할 수 있겠네요.

$$\Leftarrow \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\text{Lebesgue}} |f|^2 \right)^{1/2}$$



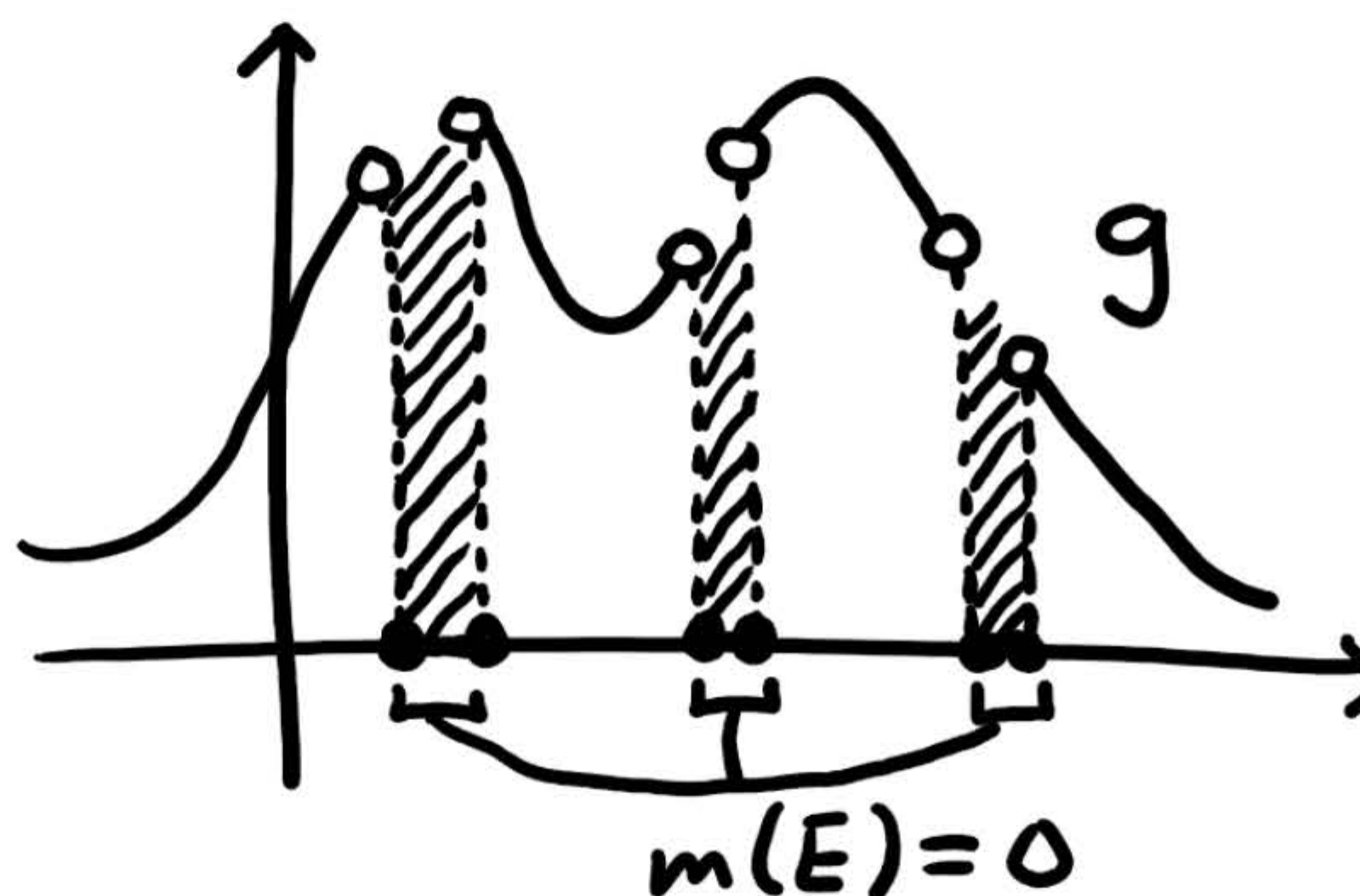
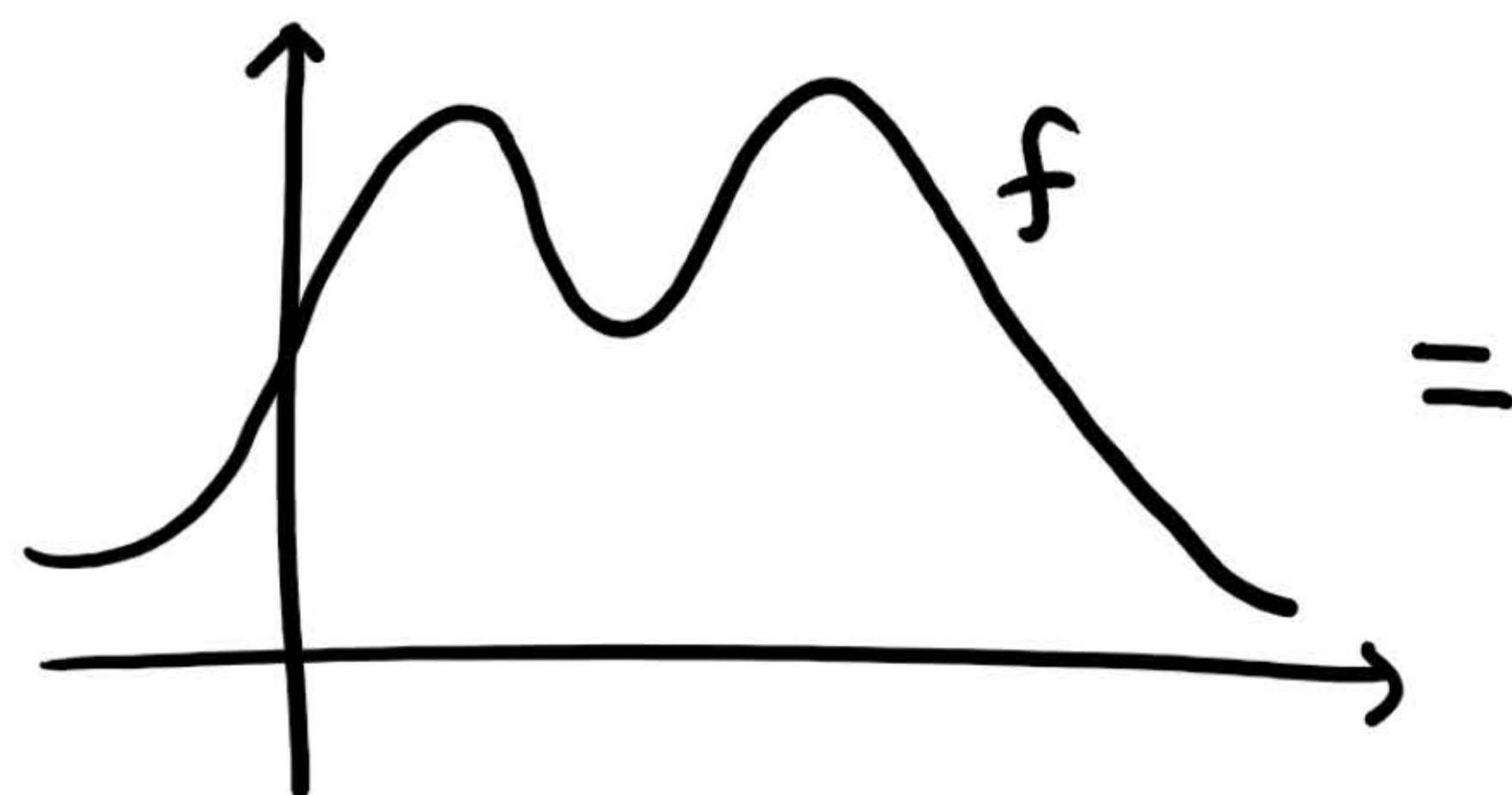
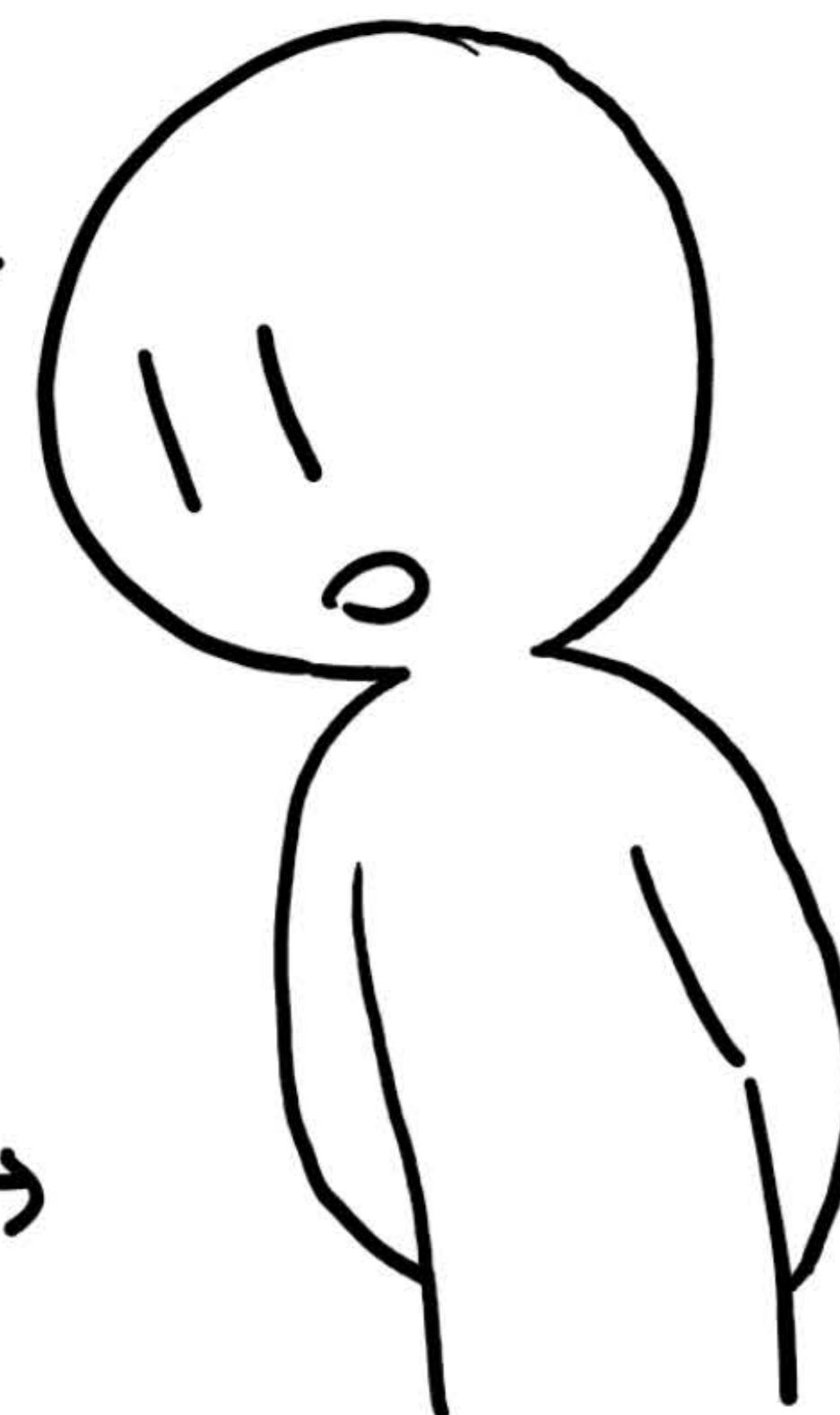
그리고 이 크기가 유한한 녀석들만 모아 놓은 뒤,

$$\Rightarrow \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Lebesgue}} f g^*$$

와 같이 내적을 정의하면 완벽하겠군요.

아, 여기서 주의할 점이 하나 있어요.
만약 두 함수 f, g 가 크기가 0인
집합 E 위에서만 값이 다르다면....

밀변 크기가 0이니
넓이 = 적분에서도
차이가 0이겠군요.



그뿐만 아니라,
다른 함수와 내적해도
차이가 표시나지 않아요.

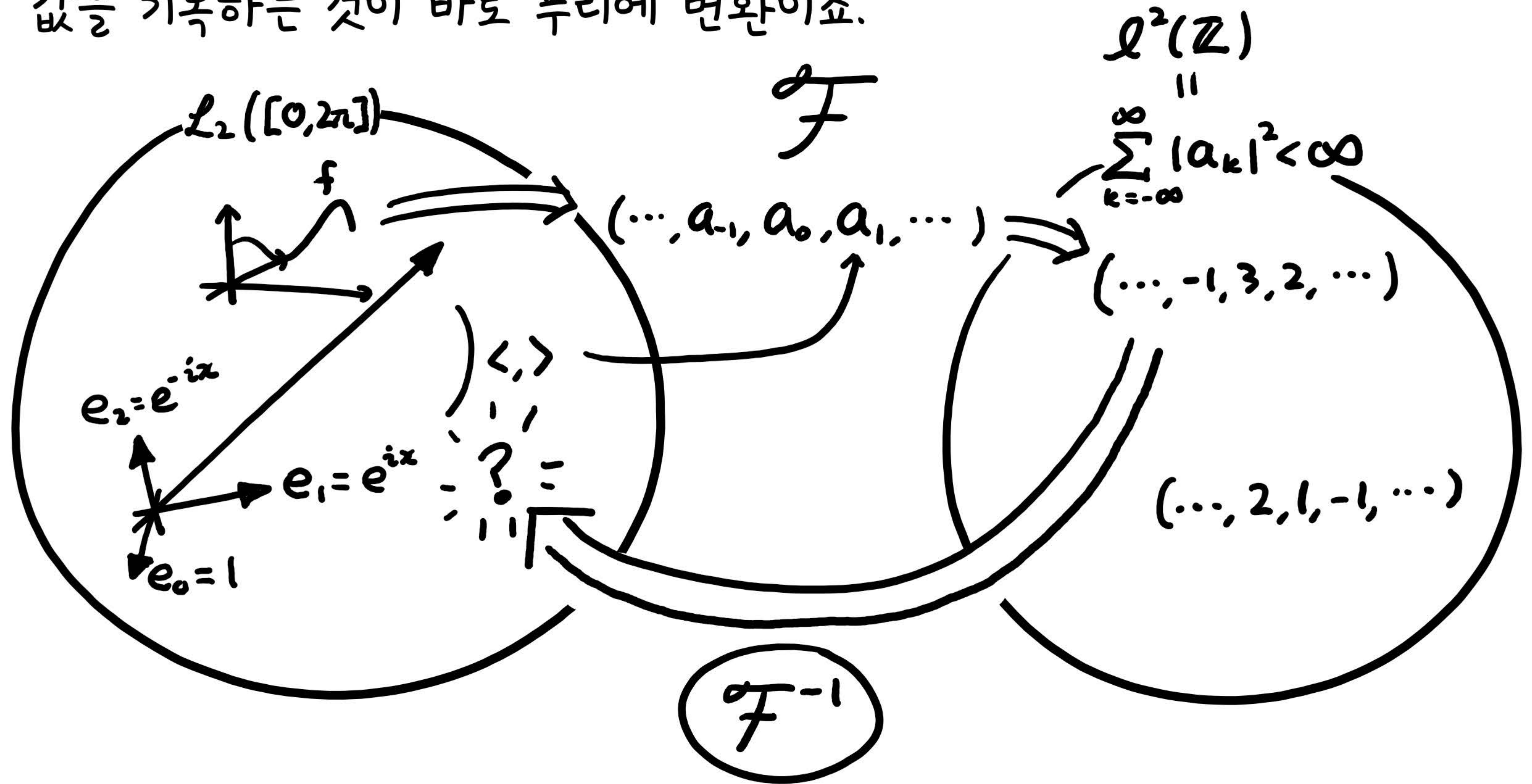
$$\int \underbrace{f}_{\text{차이: } E} = \int \underbrace{g}_{\text{차이: } E}, \quad \int \underbrace{f \cdot x}_{\text{차이: } E} = \int \underbrace{g \cdot x}_{\text{차이: } E}, \quad \dots$$

그러니, 내적공간
 $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ 에서는...

$$\Rightarrow \boxed{f \equiv g}$$

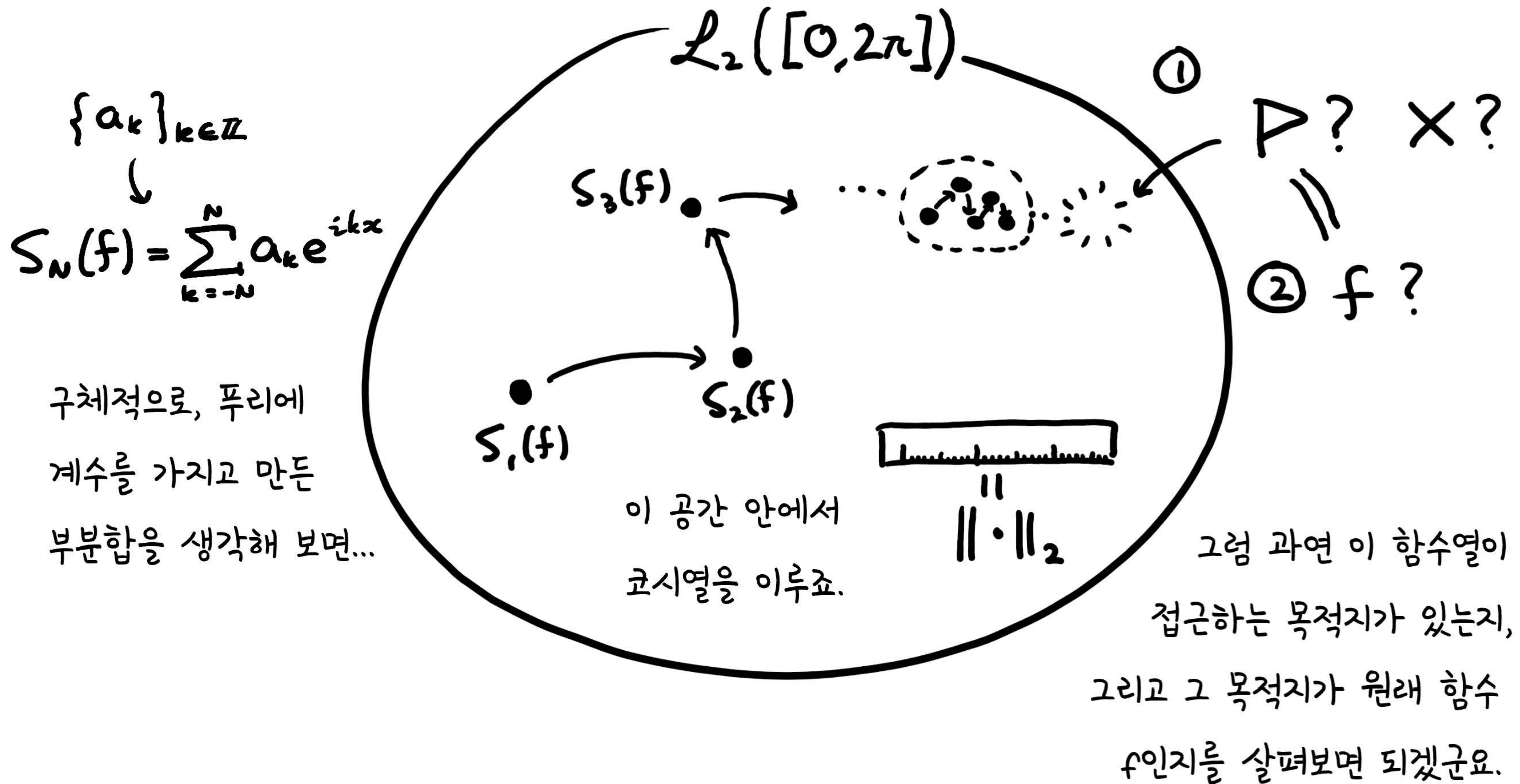
두 함수를 같은 녀석으로 취급해도 무리가 없겠군요. 즉,
"크기 0인 집합 위에서의 차이"는 아무것도 아닌 거예요.

좋아요. 리만 이론 때와 똑같이, $L^2([0, 2\pi])$ 안에서 e^{inx} 들과 내적인 값을 기록하는 것이 바로 푸리에 변환이죠.



이제 우리가 해야 하는 것은 '푸리에 역변환'을 제대로 정의하는 거예요.

해석학에서 항상 그래왔듯, 유한 지점까지의 근사 함수들을 가지고
 접근하는 게 우리의 전략입니다.



① $\triangleright$ 는 $L^2([0, 2\pi])$ 안에서
찾을 수 있어!

첫번째 질문에 대한 답은
1907년에 오스트리아의 수학자
에른스트 피셔가 내놓았어요.

즉, $L^2([0, 2\pi])$ 안에서는...

$$\|f_n - f_m\|_2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \text{ 코시 함수열이면,}$$

$\Downarrow$

$$\exists \triangleright : \|\triangleright - f_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

향하는 목적지를 반드시 찾을 수 있단 거죠.

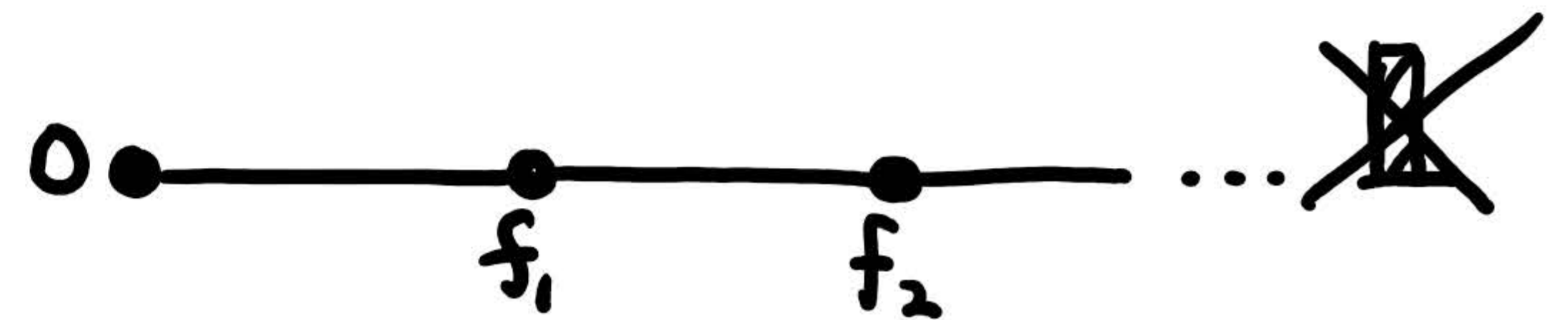
에른스트
지기스문트
피셔



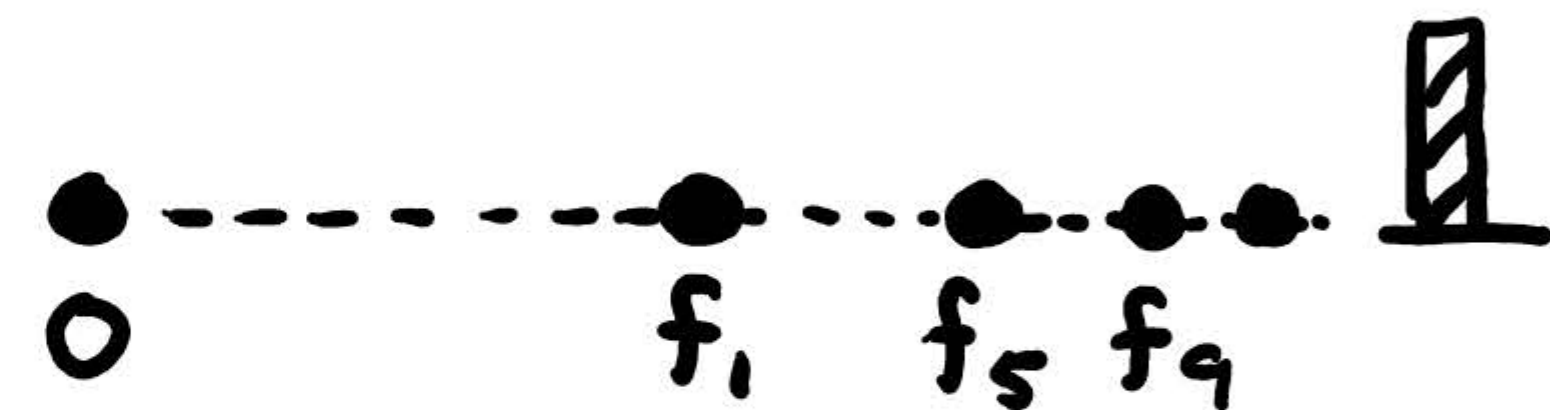
이 결과를 한번 증명해 봅시다. 가장 먼저 조치해야 할 것은, 우왕좌왕 돌아다니는 $S_n(f)$ 들 중에서 굳어더기를 쳐내는 것입니다.

(표기 편의상 앞으로 $S_n(f)$ 를 f_n 으로 적겠습니다.)

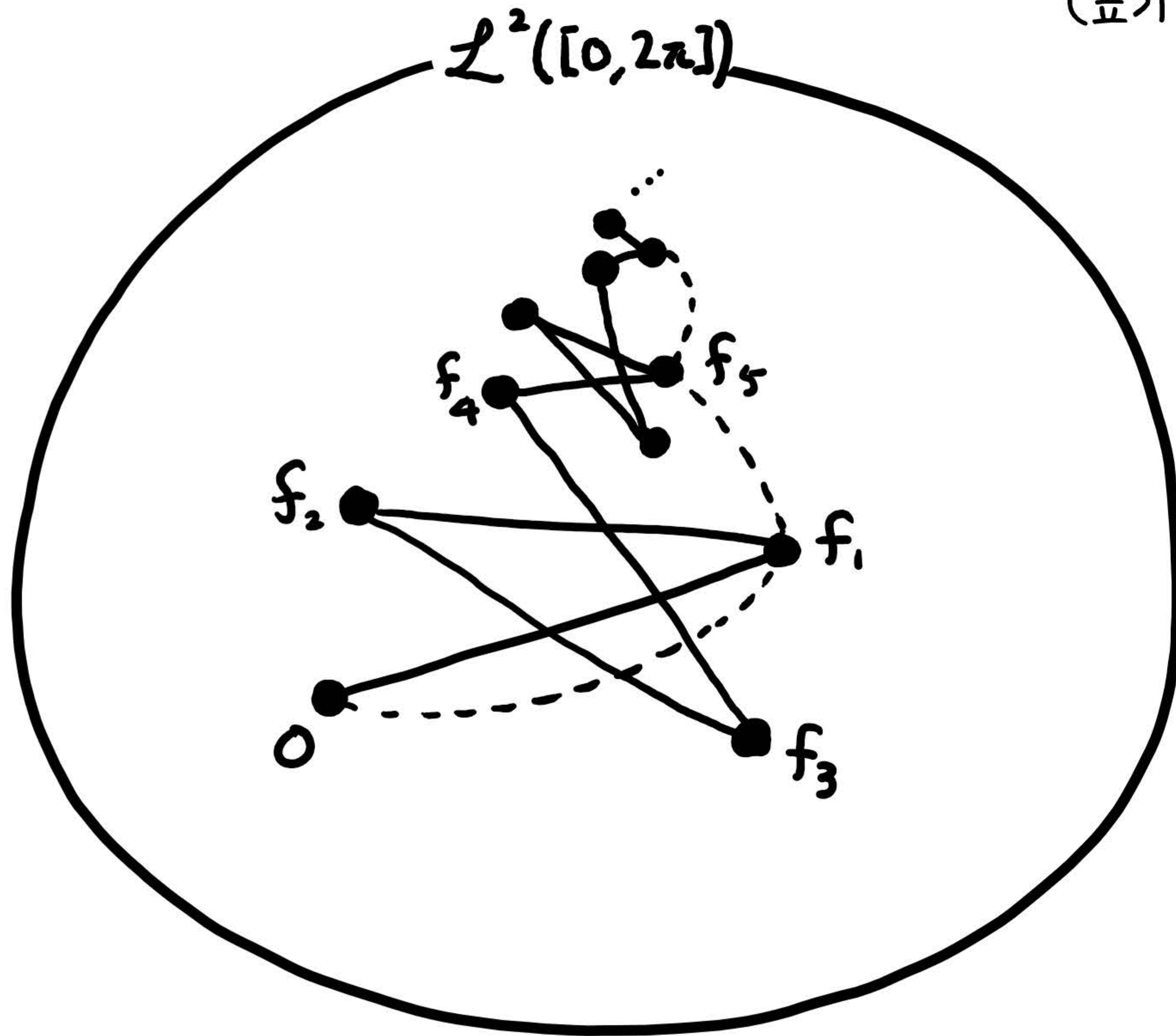
그러니까 다시 말해,



모든 f_n 들을 다 고려했을 때 총 이동 거리는 무한대여서 통제가 안 되지만,



그 중 일부만 추려 낸다면 이동 거리의 총합은 유한할 수 있단 거죠.



실제로, 부분합들은 상당히 무왕좌왕할 수도 있습니다. 왜냐 하면...

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq |f|^2$$

우리가 가지고 있는 건 단지
이 조건뿐이거든요.



$$\{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

$$\{\dots, \frac{1}{2}, 1, 0, 1, \frac{1}{2}, \dots\}$$

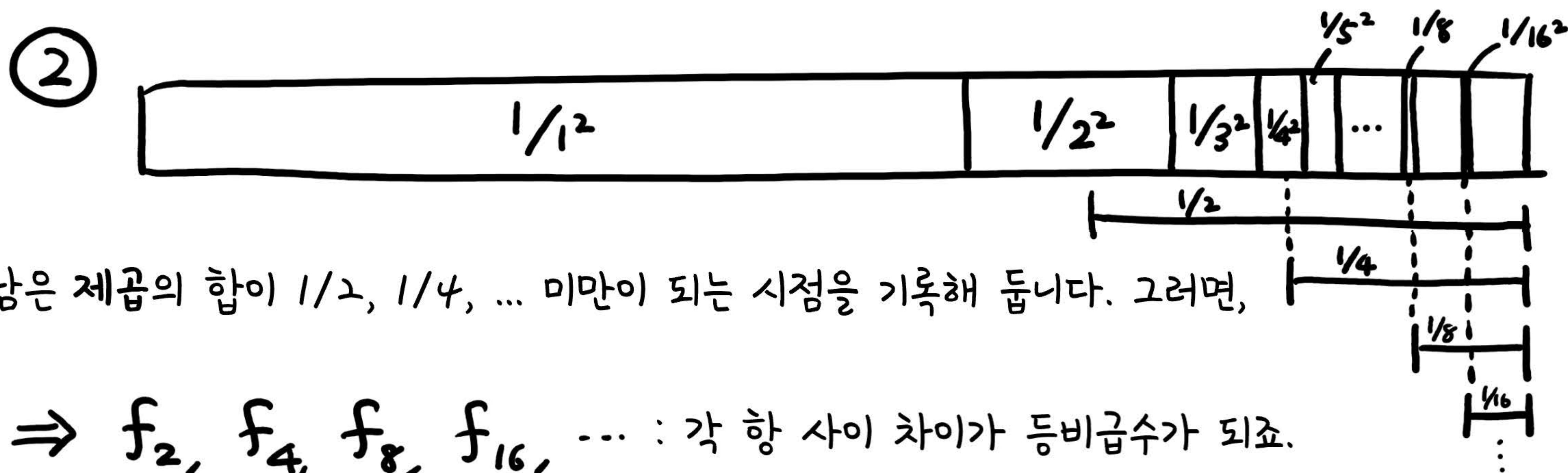
$$a_n = \frac{1}{|n|} \quad (n \neq 0)$$

이 계수들의 제곱의 합은 유한하지만, 그냥 합은 무한대로 치솟기 때문에...

$$\Rightarrow \textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n} (e^{inx} + e^{-inx}) \right\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = \infty$$

모든 f_n 들을 다 고려하게 되면 이동 거리가 무한대로 치솟아 버립니다.

그러나, 계수 제공의 합은 유한하기 때문에 다음과 같은 작업은 할 수 있죠.



예를 들어,

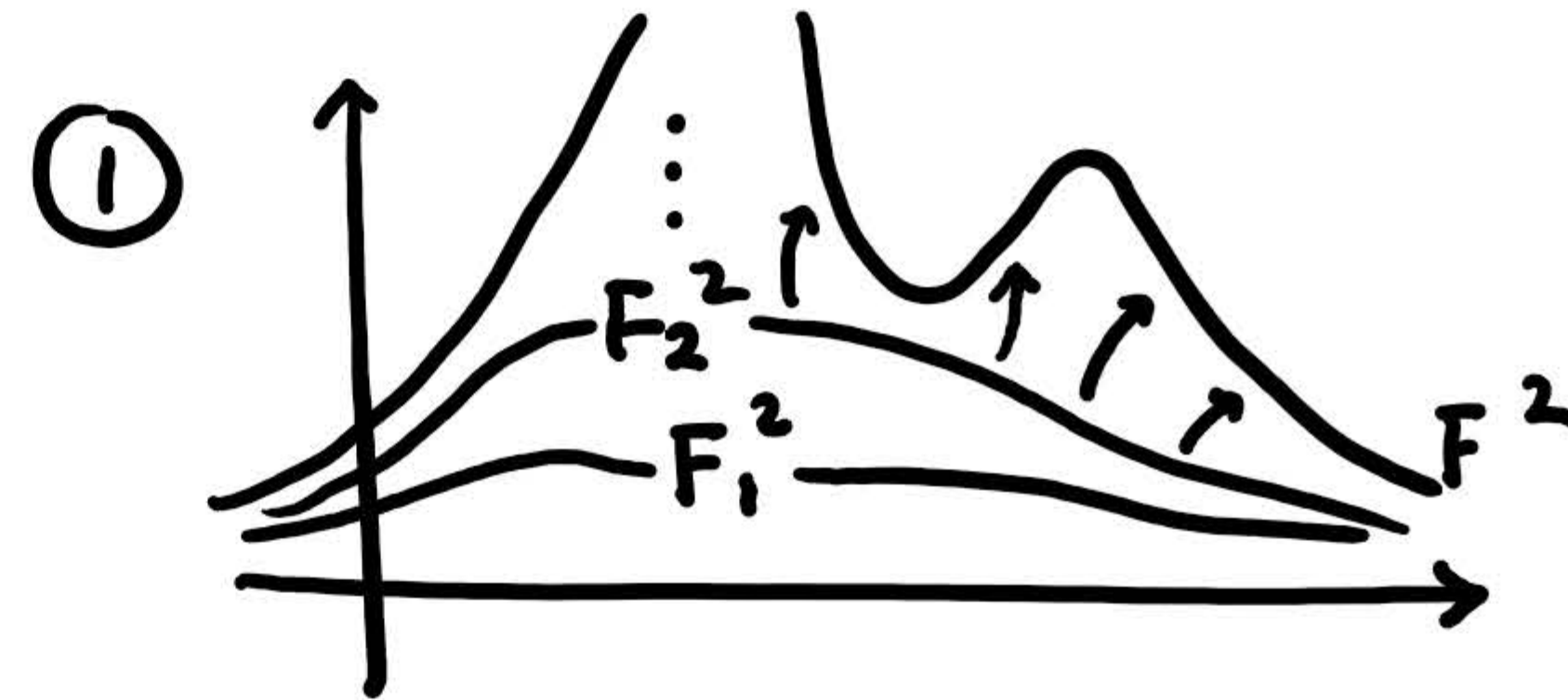
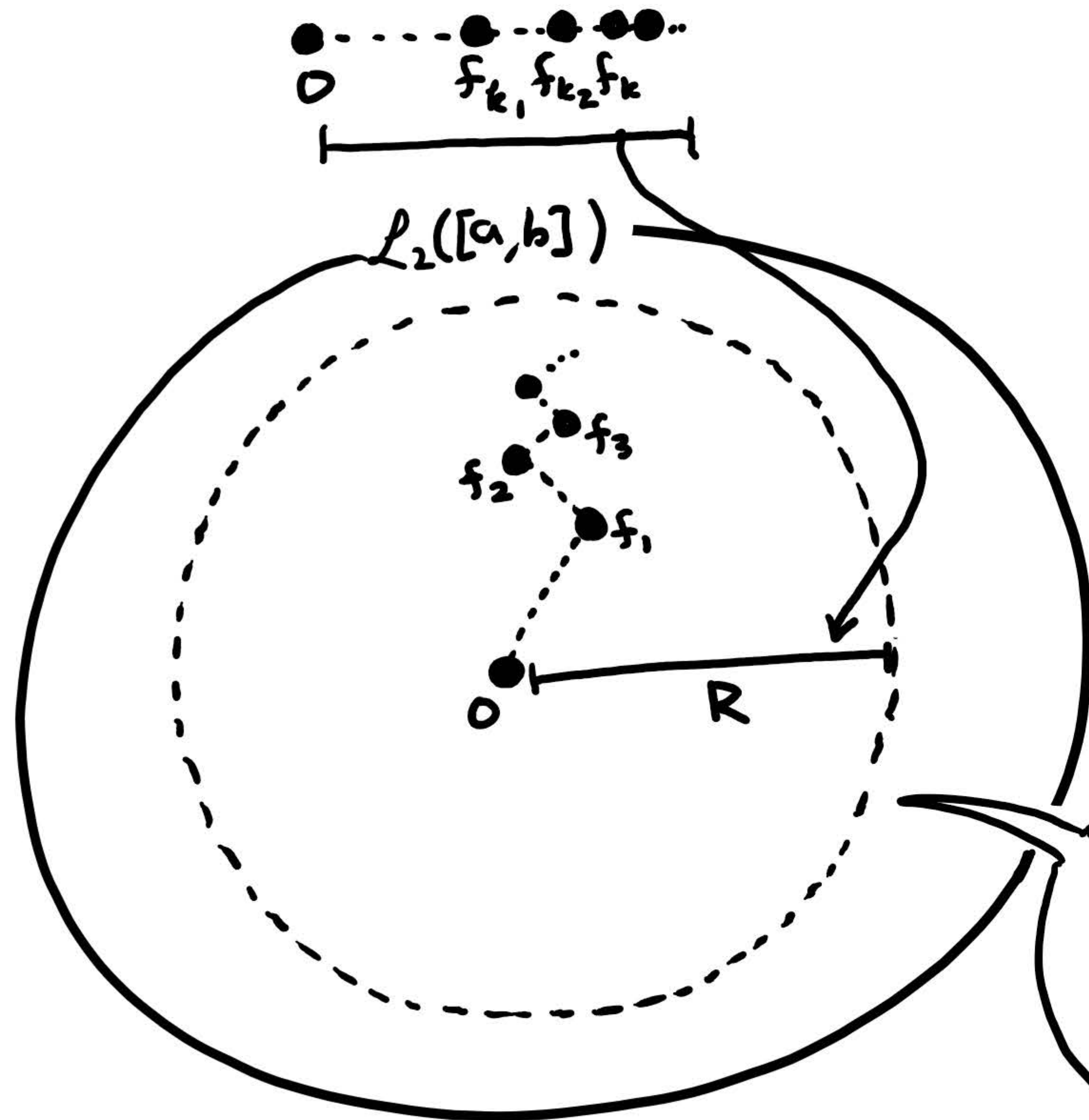
$$\begin{aligned}
 (\|f_4 - f_8\|_2)^2 &= \int |a_5 e^{5ix} + a_{-5} e^{-5ix} + \dots + a_8 e^{8ix} + a_{-8} e^{-8ix}|^2 \\
 &= |a_5|^2 + |a_{-5}|^2 + \dots + |a_8|^2 + |a_{-8}|^2 \\
 &\leq 1/4 \text{ 가 되니까 말이에요.}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}\| \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}^n} \leftarrow \text{이건 합해도 유한하니, 총 이동 거리가 유한해지죠.}$$

이렇게 몇 개만 추려 내서 총 이동 거리를 유한하게 만들었다면, 극한 함수가 존재할 만한 "제한 영역"을 설정합니다.

$$F_N := |f_{k_1}| + |f_{k_2} - f_{k_1}| + \dots + |f_{k_N} - f_{k_{N-1}}|$$

$$F := |f_{k_1}| + |f_{k_2} - f_{k_1}| + \dots \text{이렇게 설정하면,}$$



이거야
당연하구요,

$$\textcircled{2} \|F_N\|_2 \leq \|f_{k_1}\|_2 + \|f_{k_2} - f_{k_1}\|_2 + \dots + \|f_{k_N} - f_{k_{N-1}}\|_2$$

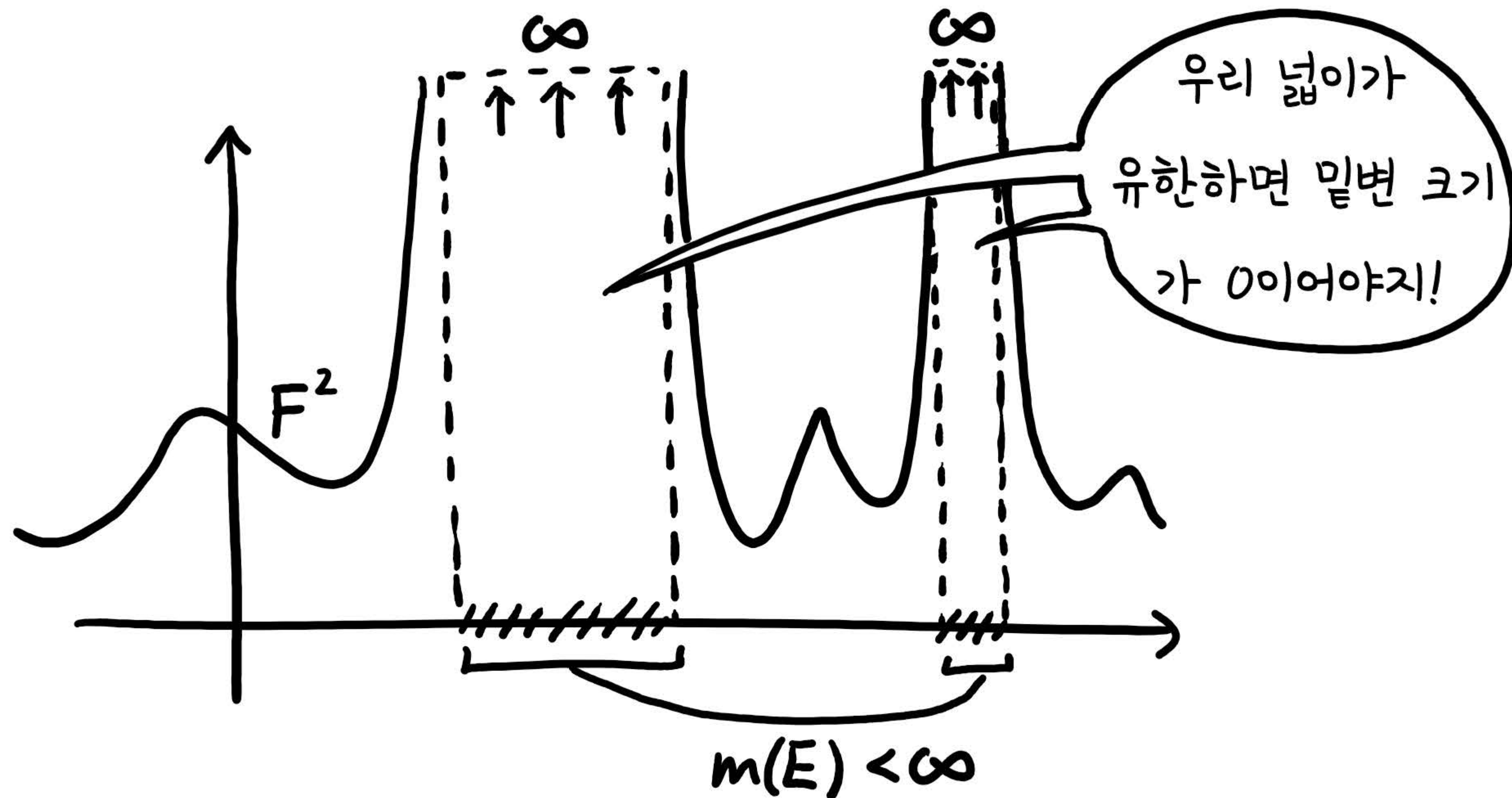
$\leq R$ 이동 거리가 제한되어
있으니, F_N^2 들의 넓이도
제한되겠죠.

기껏해야
이 안에 있겠지!
여기서 찾아

그러면 단조 수렴 정리에 의해, F^2 도 적분값이 유한하겠죠.

$$\int F_n^2 < R^2 \Rightarrow \int F = \lim_n \int F_n^2 < R^2$$

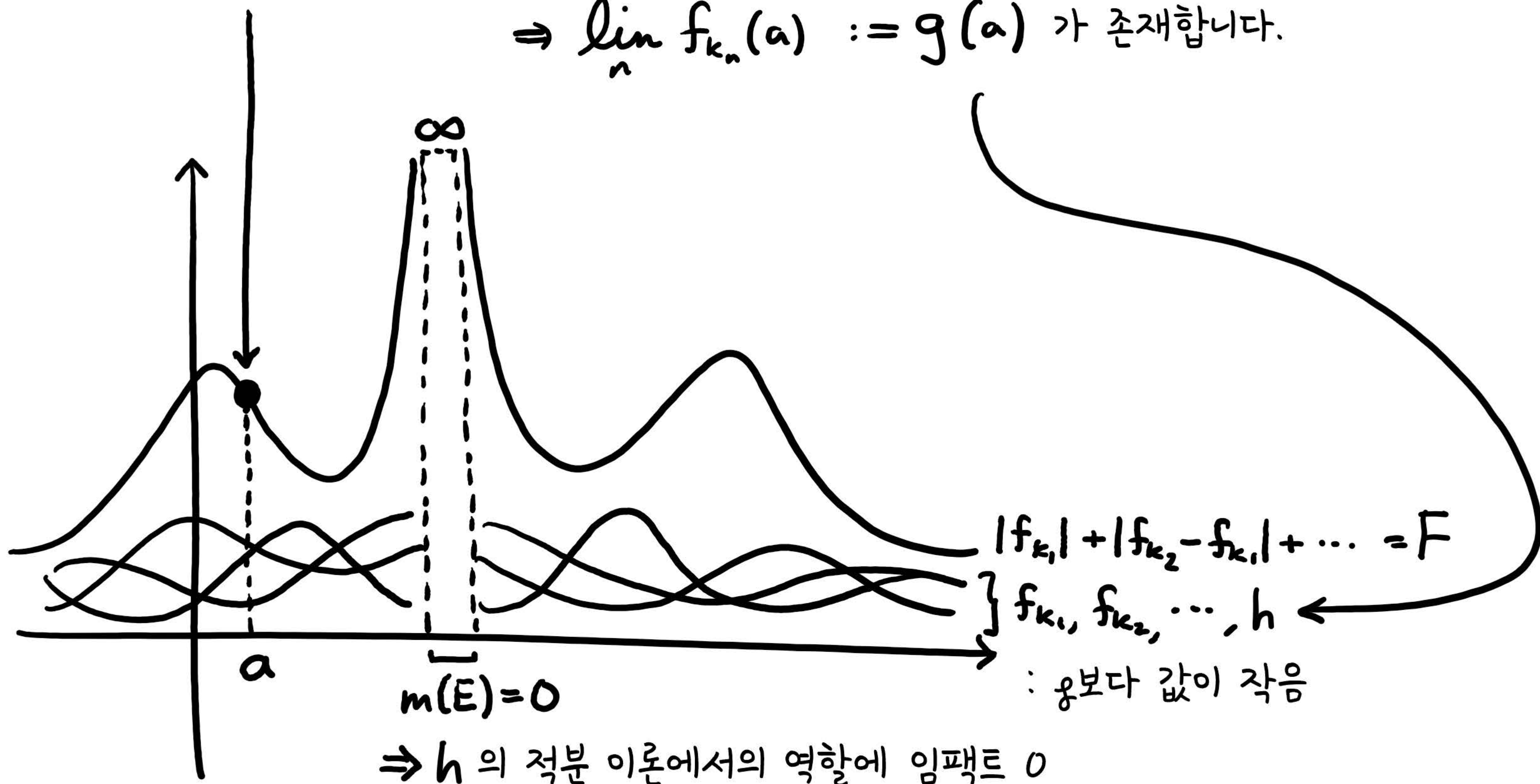
그런데 생각해 보면, F^2 가 무한대로 발산하는 부분 ($= |f_{k_1}| + |f_{k_2} - f_{k_1}| + \dots$ 가 무한대로 발산하는 부분)의 넓이가 양수면, F^2 의 적분이 유한할 리는 없겠죠.



그 말은, 적분에 영향을 주지 않는 작은 집합 E 를 제외한 "대부분의" 점 a 에서

$$|f_{k_1}(a)| + |f_{k_2}(a) - f_{k_1}(a)| + \dots < \infty \text{ 라는 거니, 이들의 부분합이 수렴하겠죠. 즉,}$$

$$\Rightarrow \lim_n f_{k_n}(a) := g(a) \text{ 가 존재합니다.}$$



이제 거의 다 왔습니다! 조금만 더 해봅시다.

① $|f_{k_N} - h|^2 \rightarrow 0$: 아까 얘기했듯, 크기 0인 집합을 제외하고 나면 모든 지점에서 이렇게 수렴합니다.

② $|f_{k_N}|, |f| \leq F \Rightarrow |f_{k_N} - f| \leq 2F, \quad |f_{k_N} - f|^2 \leq \underbrace{4F^2}$
이건 적분값이 유한한지 모르지만, 이걸 적분값이 유한하죠!

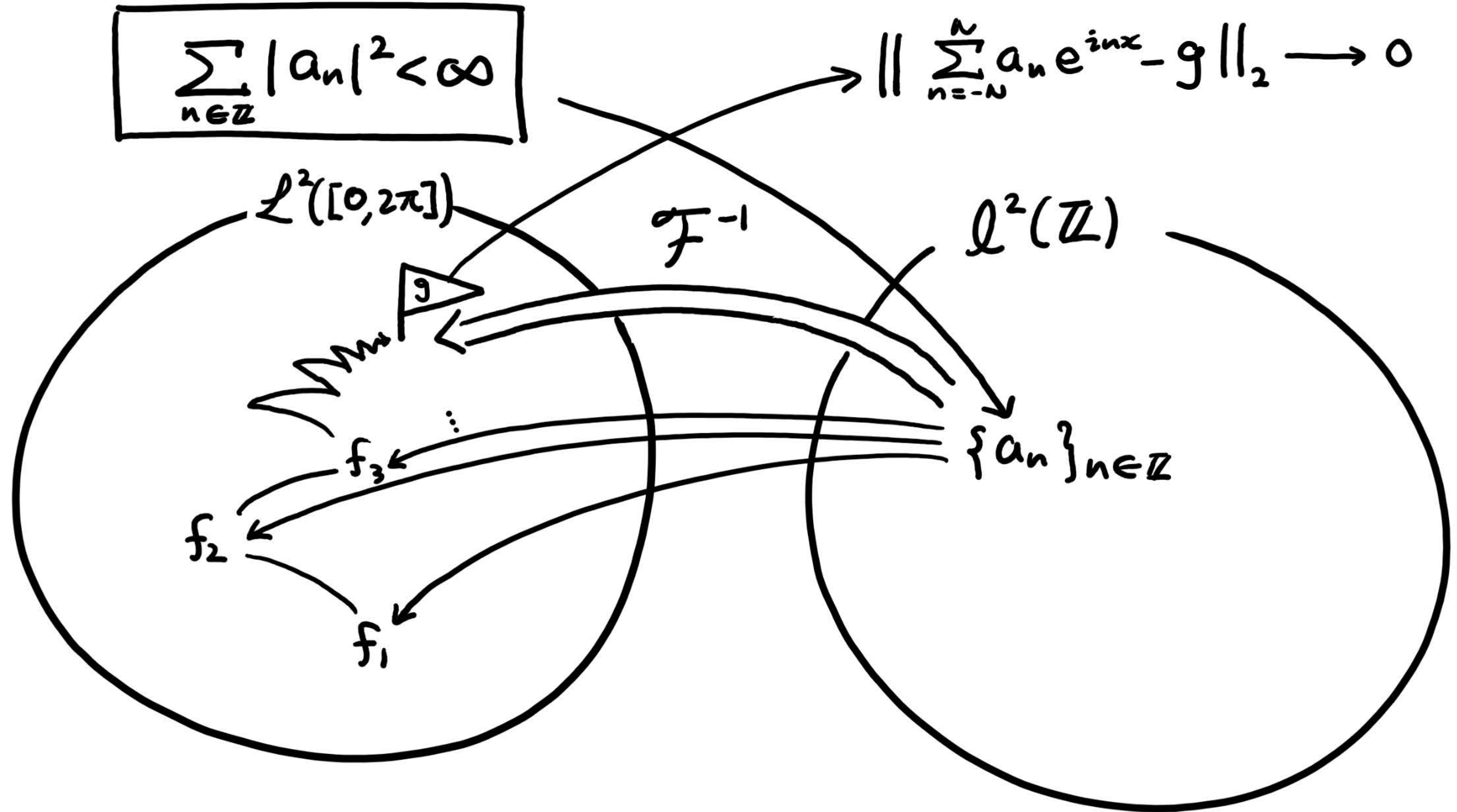
그러면 지배 수렴 정리를 사용해서,

$$\Rightarrow \int |f_{k_N} - f|^2 \rightarrow \int 0 = 0$$

즉, 아까 선별한 f_{k_N} 들과 h 라는 함수 사이 거리가 0으로 줄어든다는 거죠.

이걸로부터, 사실은 모든 f_n 들이 h 로 다가간다는 것도 증명할 수 있습니다.

사실 방금 작업에서, a_n 들이 어떤 함수 f 의 푸리에 계수라는 사실도 사용하지 않았어요. 사용한 건 오직 계수 제공의 합이 유한하다는 사실뿐이었죠.

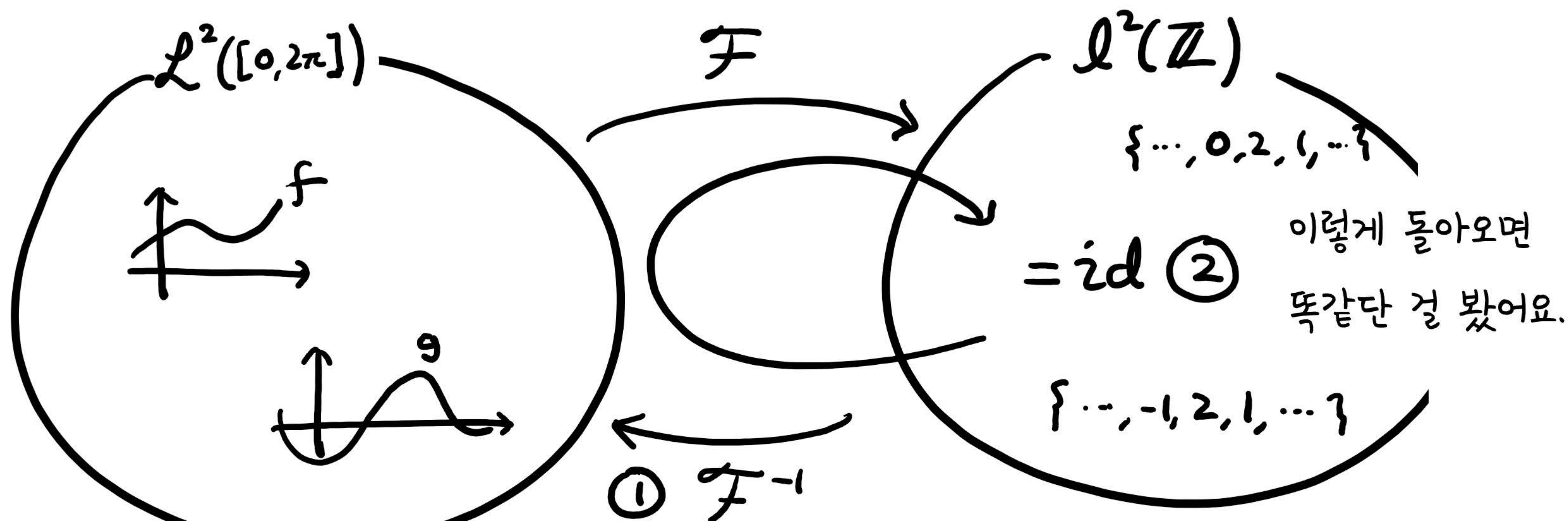


다시 말해, 이 연산은 $l^2(\mathbb{Z})$ 전체 위에서 행해도 되는 겁니다.

거기다, 이렇게 얻은 f 의 푸리에 변환이 원래 계수라는 것은 쉽게 볼 수 있어요.

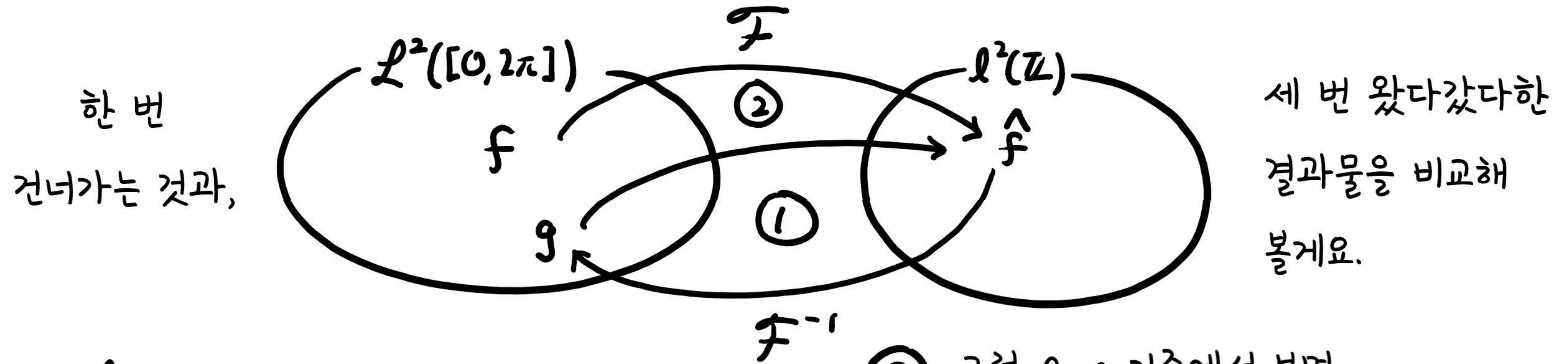
$$|\langle g, e^{inx} \rangle - \langle \underbrace{\sum_{k=-N}^N a_k e^{ikx}}_{\parallel a_n \parallel}, e^{inx} \rangle| \leq \underbrace{\|g - \sum_{k=-N}^N a_k e^{ikx}\|}_{\downarrow N \rightarrow \infty \atop 0} \cdot \|e^{inx}\|$$

$$\Rightarrow \langle g, e^{inx} \rangle = a_n \quad \text{즉, 우리는 순식간에...}$$

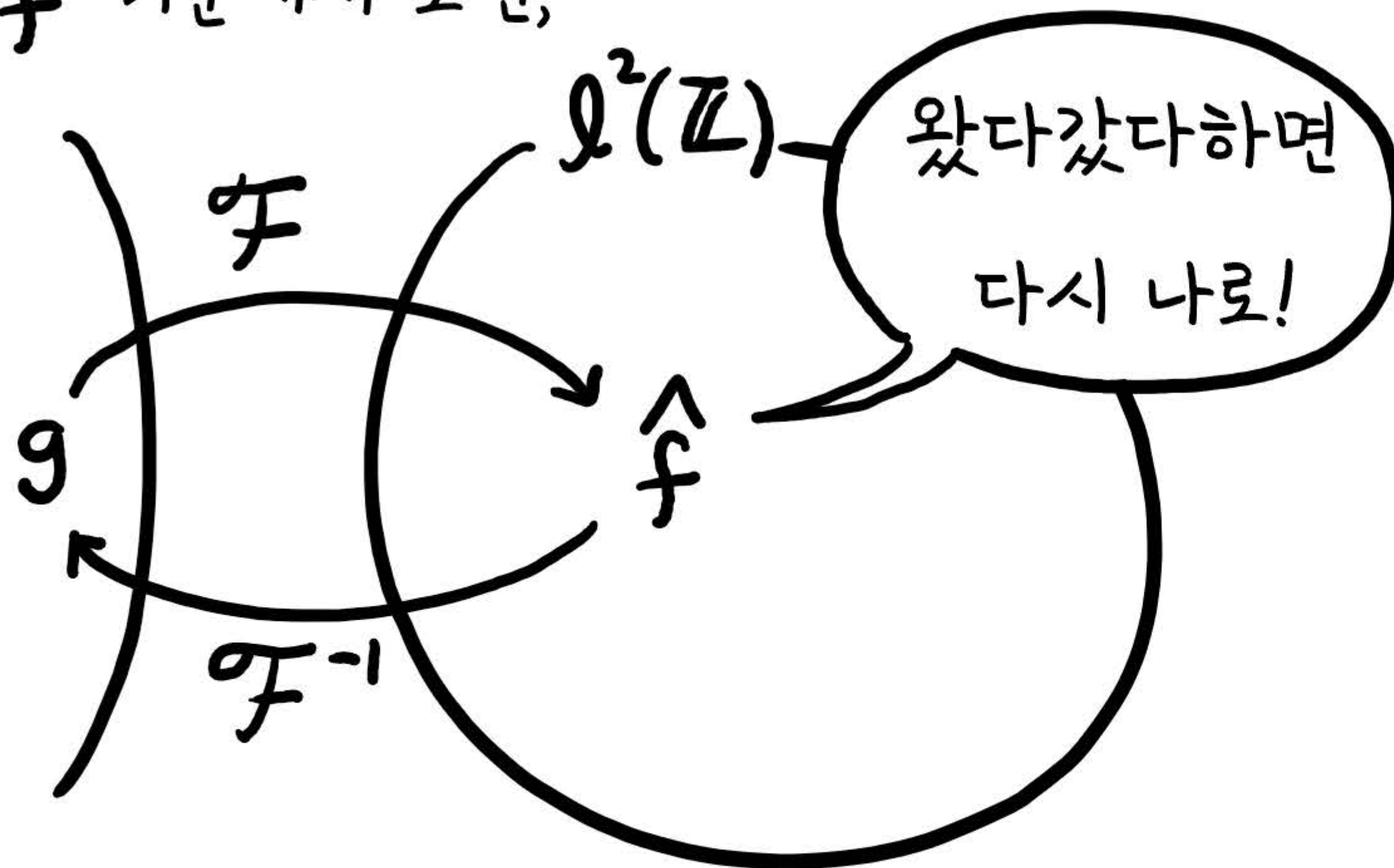


푸리에 역변환을 "제대로" 정의하고,

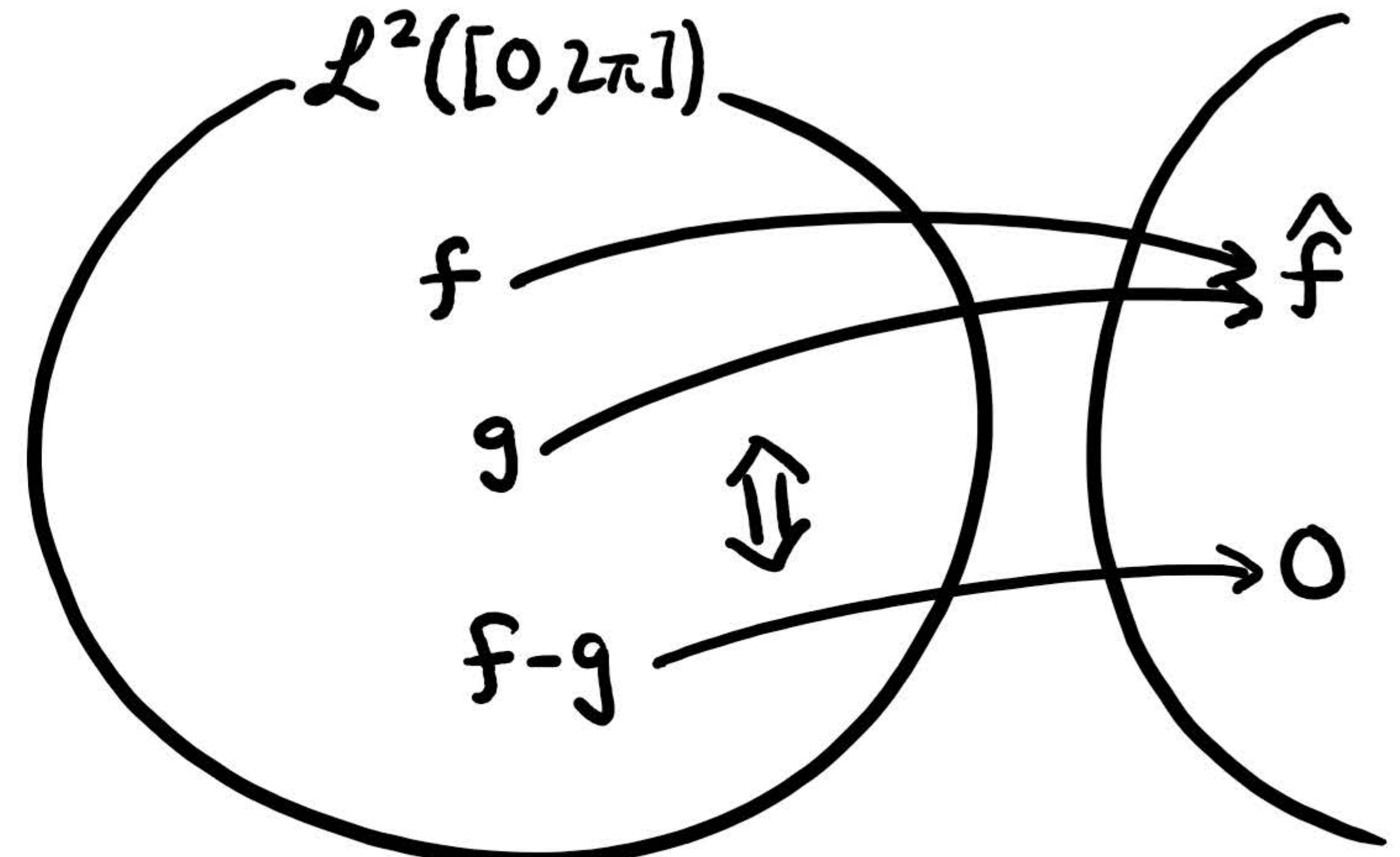
이제 상당히 신기한 방법으로 증명을 해보려고 해요. 먼저 f 로부터 출발해서,



① $\hat{f}$ 기준에서 보면,



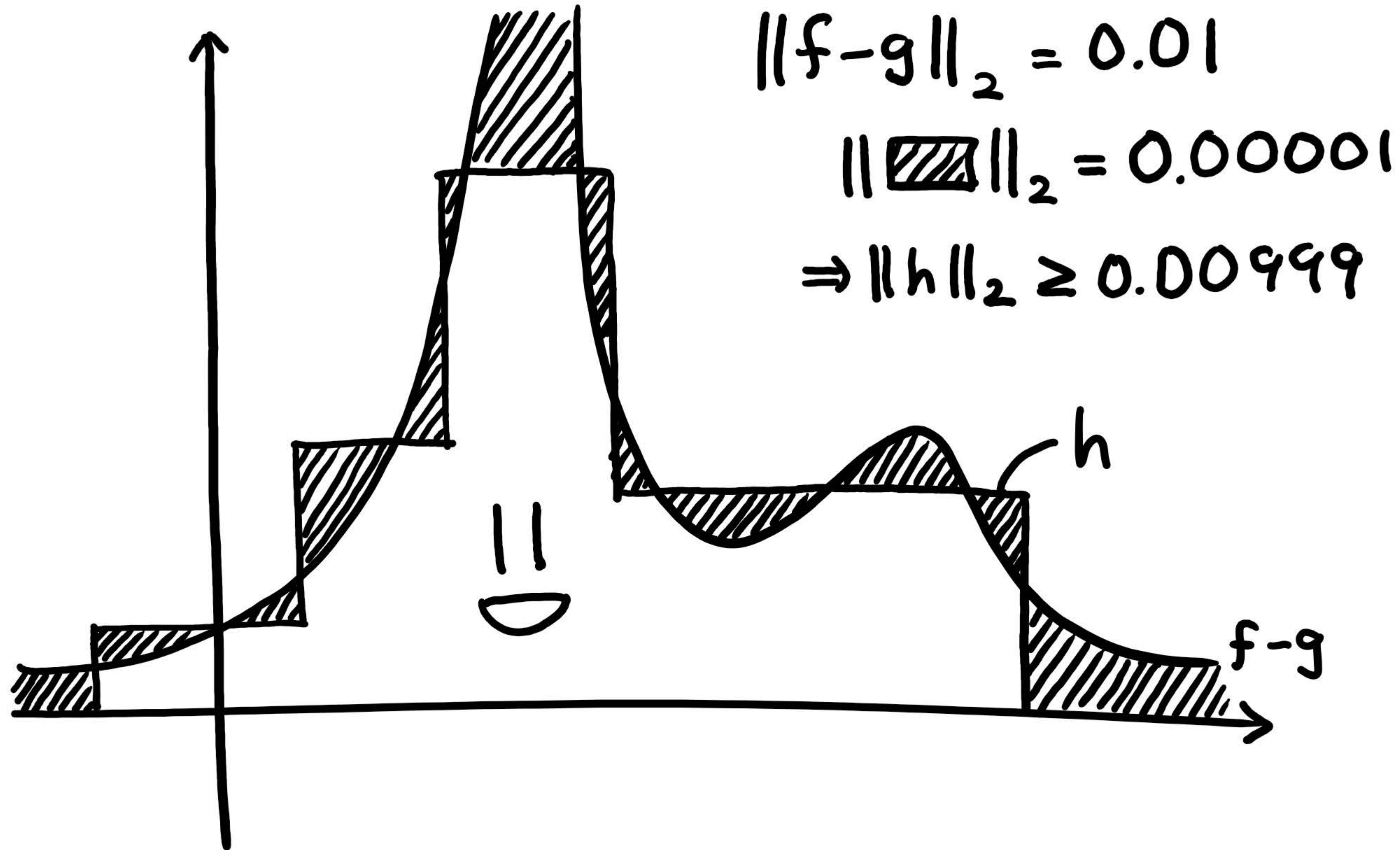
② 그럼 f, g 기준에서 보면,



첫번째 정거장 = 세번째 정거장이어야 하죠.

$\hat{F}$ 결과물이 같다 $\Rightarrow f=g$ 임을 증명할 수 있으면 좋겠죠.

이 부분이야말로, 아까 설명드린 "좋은 함수로 근사하기" 전략을 활용하기 좋은 포인트예요. L_2 공간에서도, 주어진 함수에 원하는 만큼 가까운 "반듯한 계단 함수"를 찾을 수 있어요.



If...

$$\|S_N(h) - h\|_2 \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow \|S_N(h)\|_2 \rightarrow \|h\|_2 > 0.00999,$$
$$\|S_N(\text{shaded box})\|_2 \leq \|\text{shaded box}\|_2 < 0.00001$$
$$\Rightarrow \underline{\|S_N(f-g)\| \geq 0.00998} !$$

If...

$$\|S_N(h) - h\|_2 \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow \|S_N(h)\|_2 \rightarrow \|h\|_2 > 0.00999,$$
$$\|S_N(\text{shaded box})\|_2 \leq \|\text{shaded box}\|_2 < 0.00001$$
$$\Rightarrow \underline{\|S_N(f-g)\| \geq 0.00998} !$$

If...

$$\|S_N(h) - h\|_2 \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow \|S_N(h)\|_2 \rightarrow \|h\|_2 > 0.00999,$$
$$\|S_N(\text{shaded box})\|_2 \leq \|\text{shaded box}\|_2 < 0.00001$$
$$\Rightarrow \underline{\|S_N(f-g)\| \geq 0.00998} !$$

If...

$$\|S_N(h) - h\|_2 \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow \|S_N(h)\|_2 \rightarrow \|h\|_2 > 0.00999,$$
$$\|S_N(\text{shaded})\|_2 \leq \|\text{shaded}\|_2 < 0.00001$$
$$\Rightarrow \underline{\|S_N(f-g)\| \geq 0.00998} !$$

If...

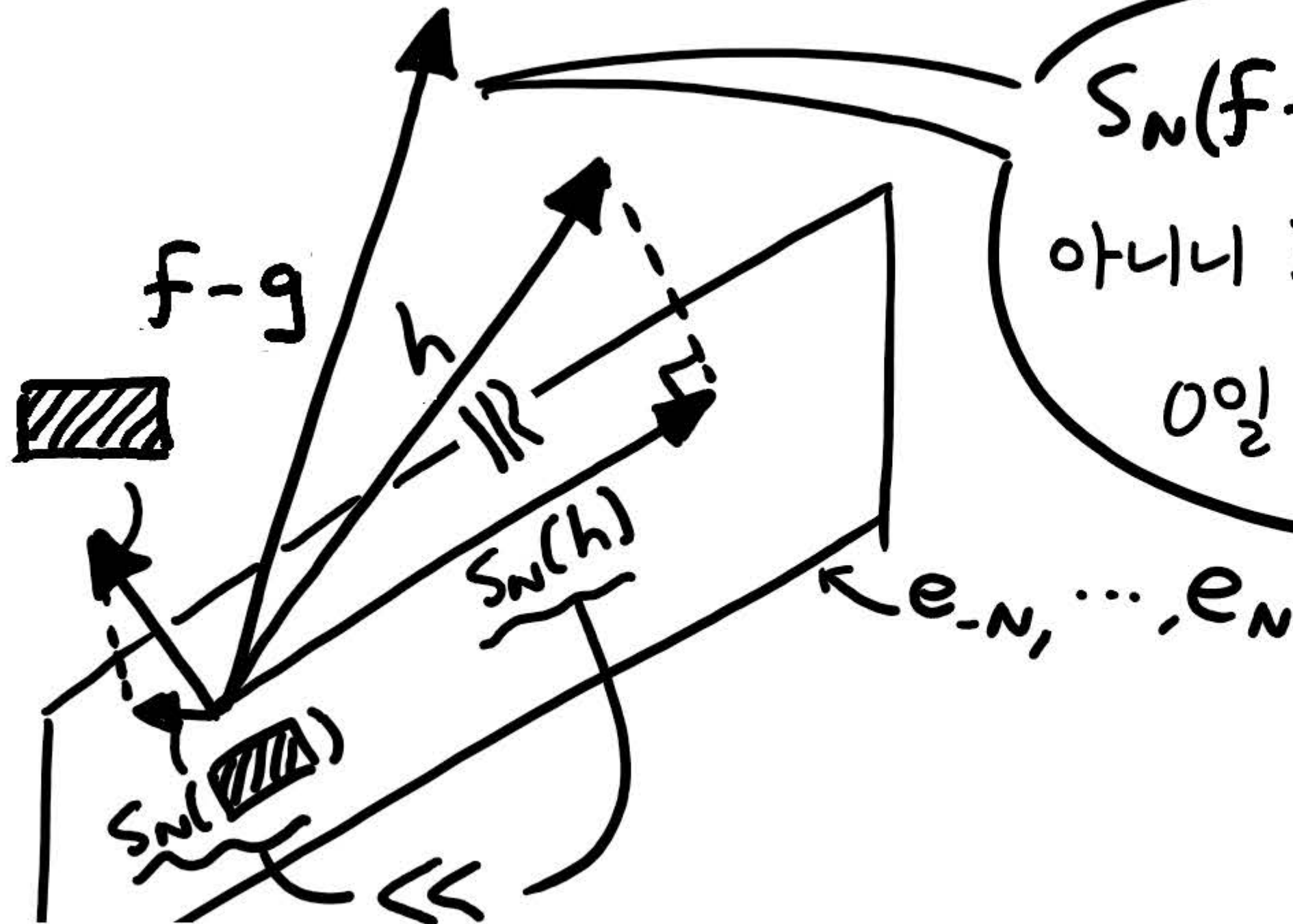
$$\|S_N(h) - h\|_2 \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow \|S_N(h)\|_2 \rightarrow \|h\|_2 > 0.00999,$$
$$\|S_N(\text{shaded})\|_2 \leq \|\text{shaded}\|_2 < 0.00001$$
$$\Rightarrow \underline{\|S_N(f-g)\| \geq 0.00998} !$$

If...

$$\|S_N(h) - h\|_2 \rightarrow 0$$
$$\Rightarrow \|S_N(h)\|_2 \rightarrow \|h\|_2 > 0.00999,$$
$$\|S_N(\text{shaded box})\|_2 \leq \|\text{shaded box}\|_2 < 0.00001$$
$$\Rightarrow \underline{\|S_N(f-g)\| \geq 0.00998} !$$

만약 이 좋은 근사함수 h 의 푸리에 급수 부분합이 h 에 충분히 다가가간다면, 자투리 부분()의 푸리에 급수 부분합이 상쇄할 수 없을 거예요. 그러면 f - g 의 푸리에 급수 부분합도 0일 수 없죠.

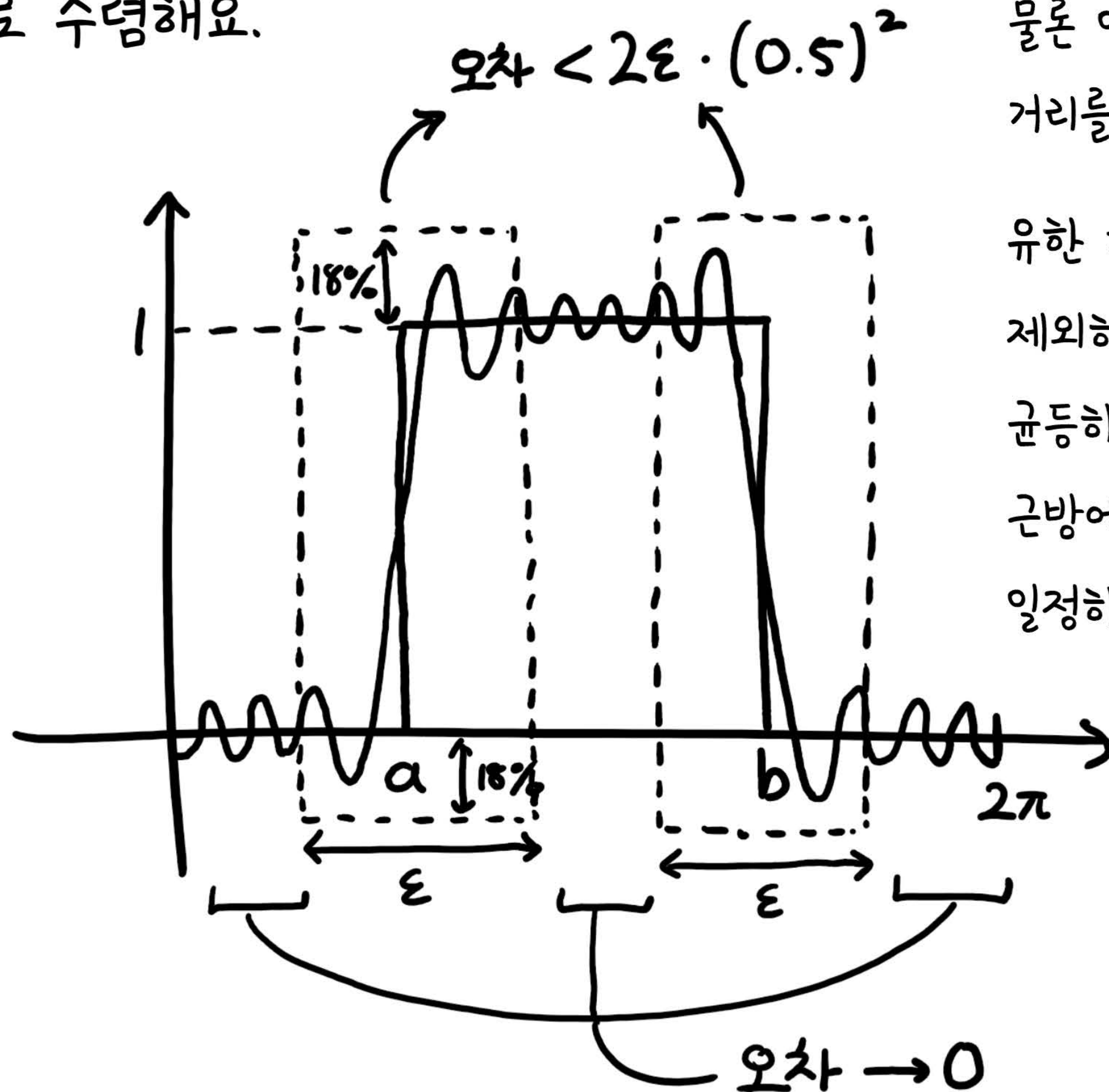
$S_n(f-g)$ 가 0이
아니니 푸리에 계수도
0일 수는 없군.



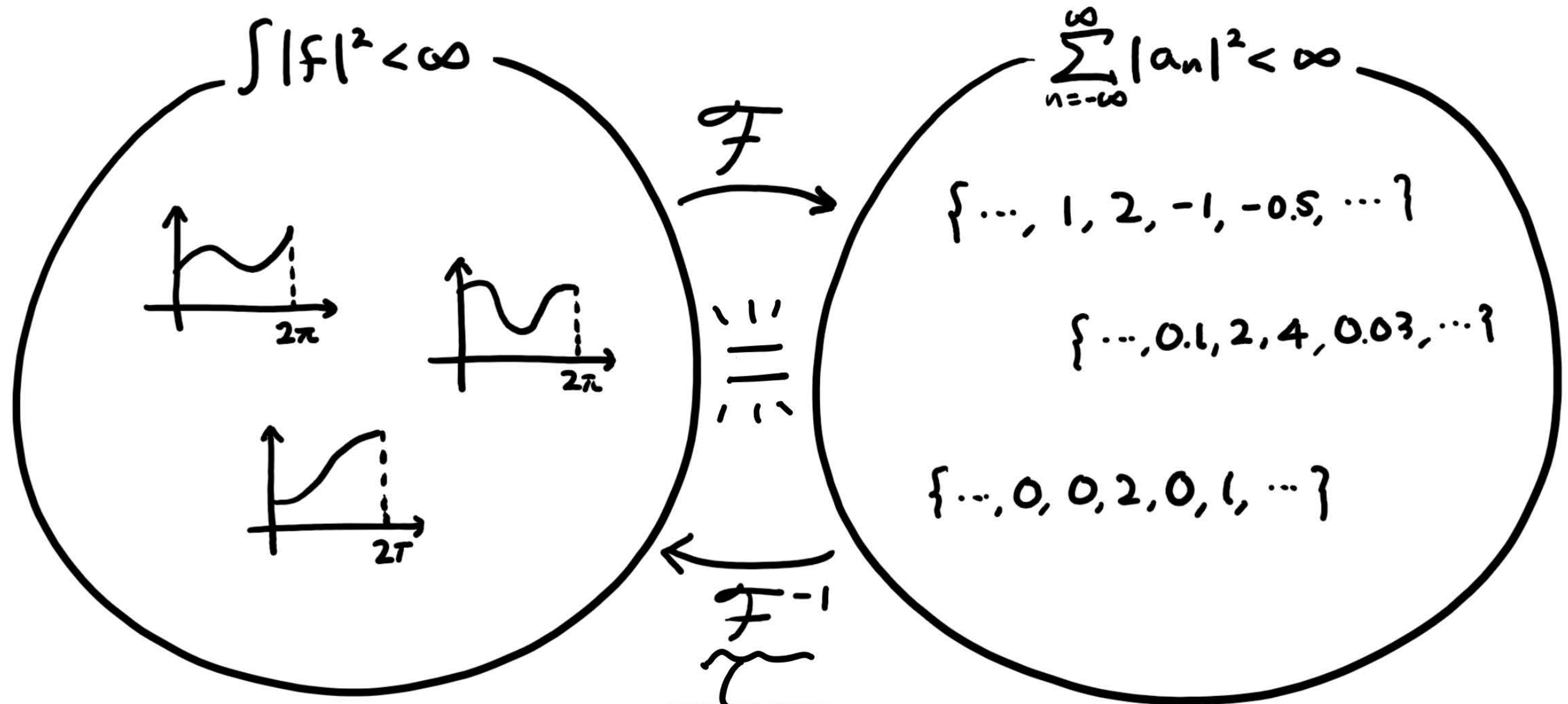
그리고 실제로 h 와 같은 "반듯한 계단 함수"들의 푸리에 급수 부분합은 h 자신으로 수렴해요.

물론 여기서 수렴한다는 건 12 거리를 기준으로 말하는 거예요.

유한 개의 불연속점 근방을 제외하고는 부분합 함수가 h 로 균등하게 수렴하고, 불연속점 근방에서도 튀는 정도가 일정하거든요(약 18% 정도).



이로써, 우리는 얼핏 보기에 전혀 다른 두 공간이 사실은 동등하단 걸 보였어요.



거기다, 의미가 불분명했던
푸리에 역변환의 의미도
확실하게 정하면서 말이에요.

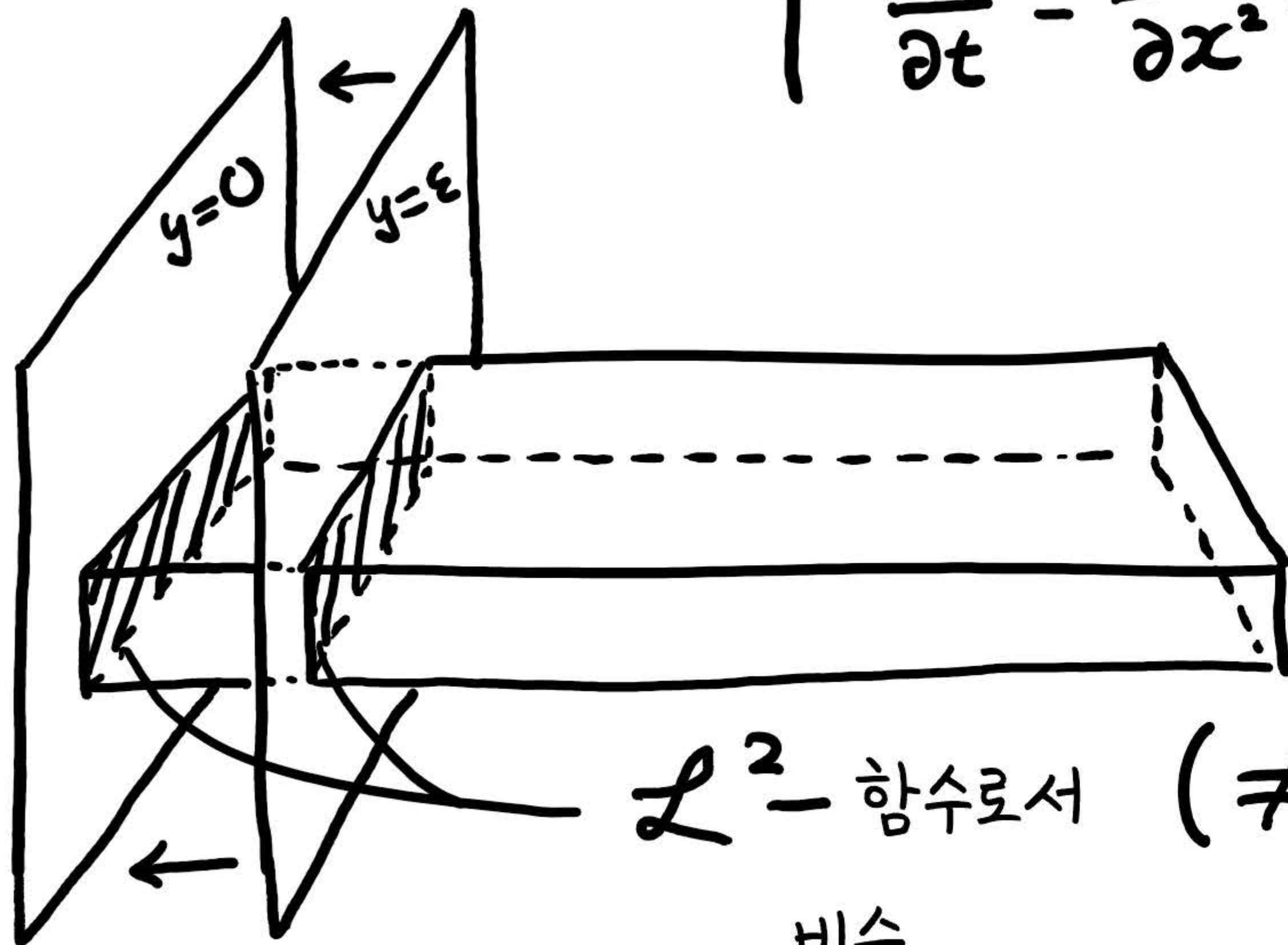
$$\sum a_n e^{inx} \text{의 } L^2\text{-극한 함수}$$

(각 점에서의 극한값 함수
같은 게 아니라 말이죠!)

방금 얘기한 결과와 지배 수렴 정리를 같이 쓰면, 푸리에 변환과 얽혀 있는 다양한 편미분방정식의 초기값 문제를 풀 수 있어요.

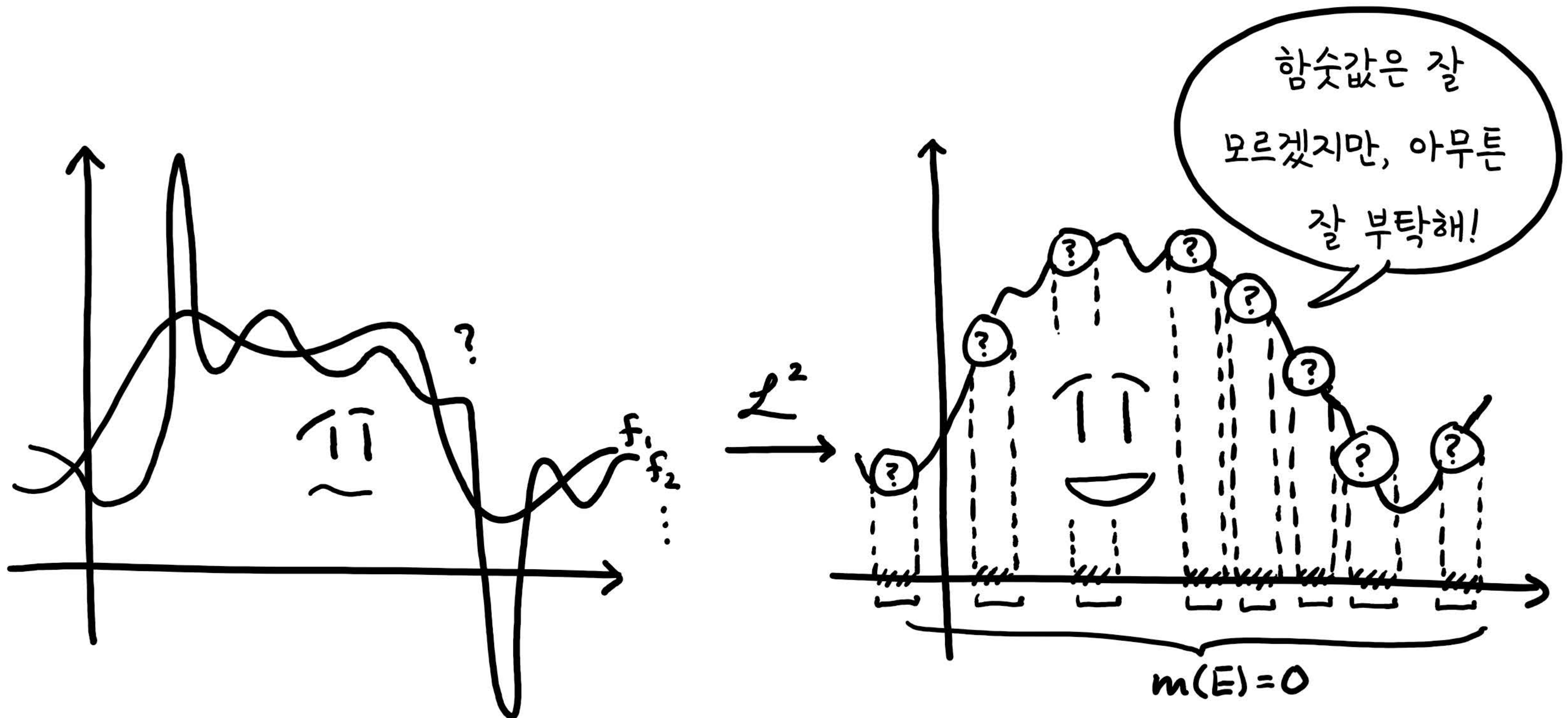
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} e^{-ny} \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 2\pi] \\ \|u(x, y) - f(x)\|_2 \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0+) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} e^{-n^2 t} \\ \|u(x, t) - f(x)\|_2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0+) \end{array} \right\}$$

⋮

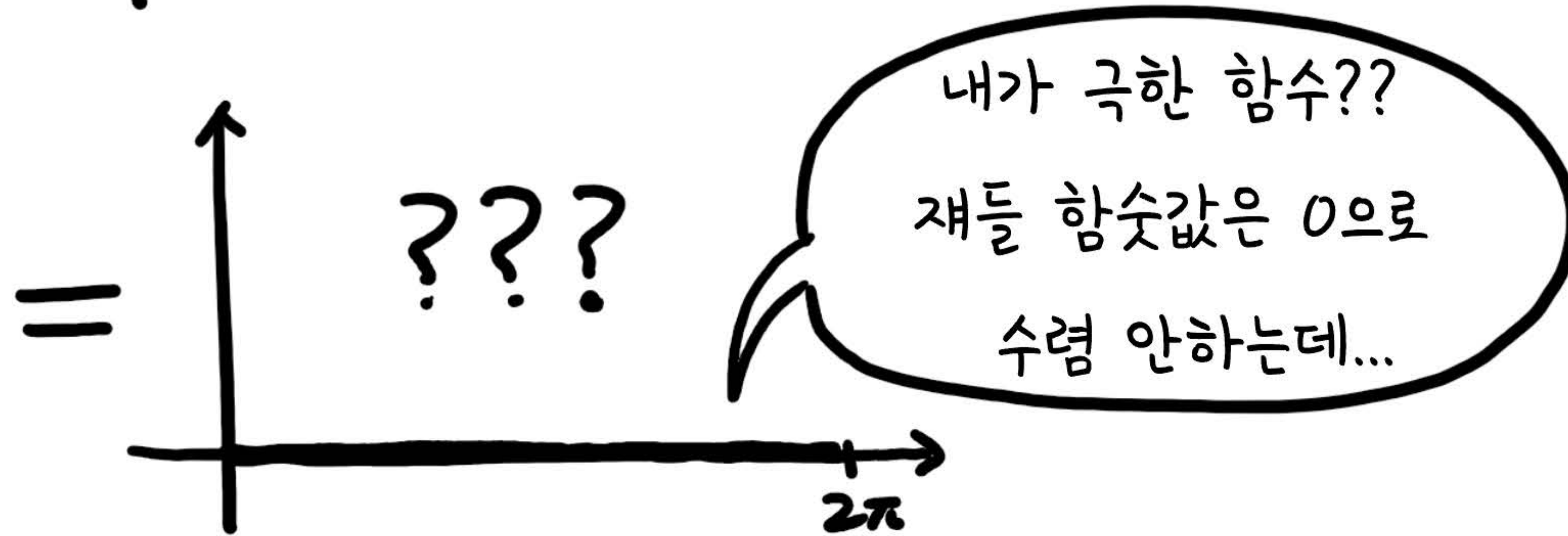
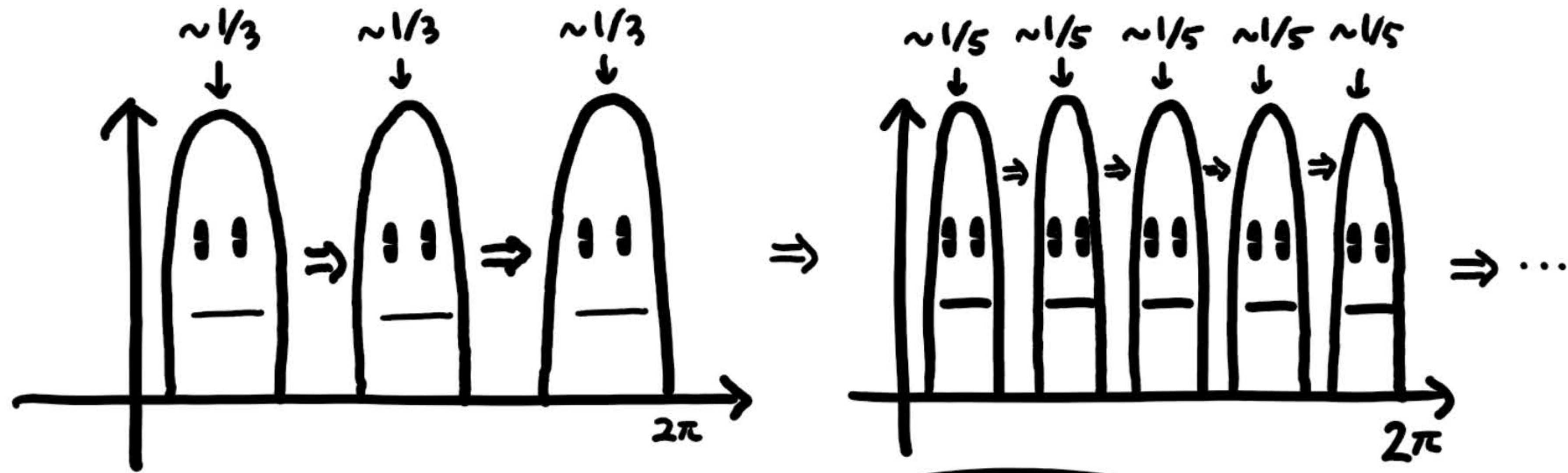


L^2 -함수로서 ($\neq$ 각 점 x 에서 $\lim_{y \rightarrow 0+} u(x, y) = u(x, 0)$)
비슷

음, 여기까지 왔는데도 찜찜한 점이 없지 않아요. 첫 번째로, L^2 공간에서
극한 함수를 찾는다는 건... 결국 "극한 함수의 함숫값"은 정확하게 결정하지
않겠다는 선언이나 다름없어요.

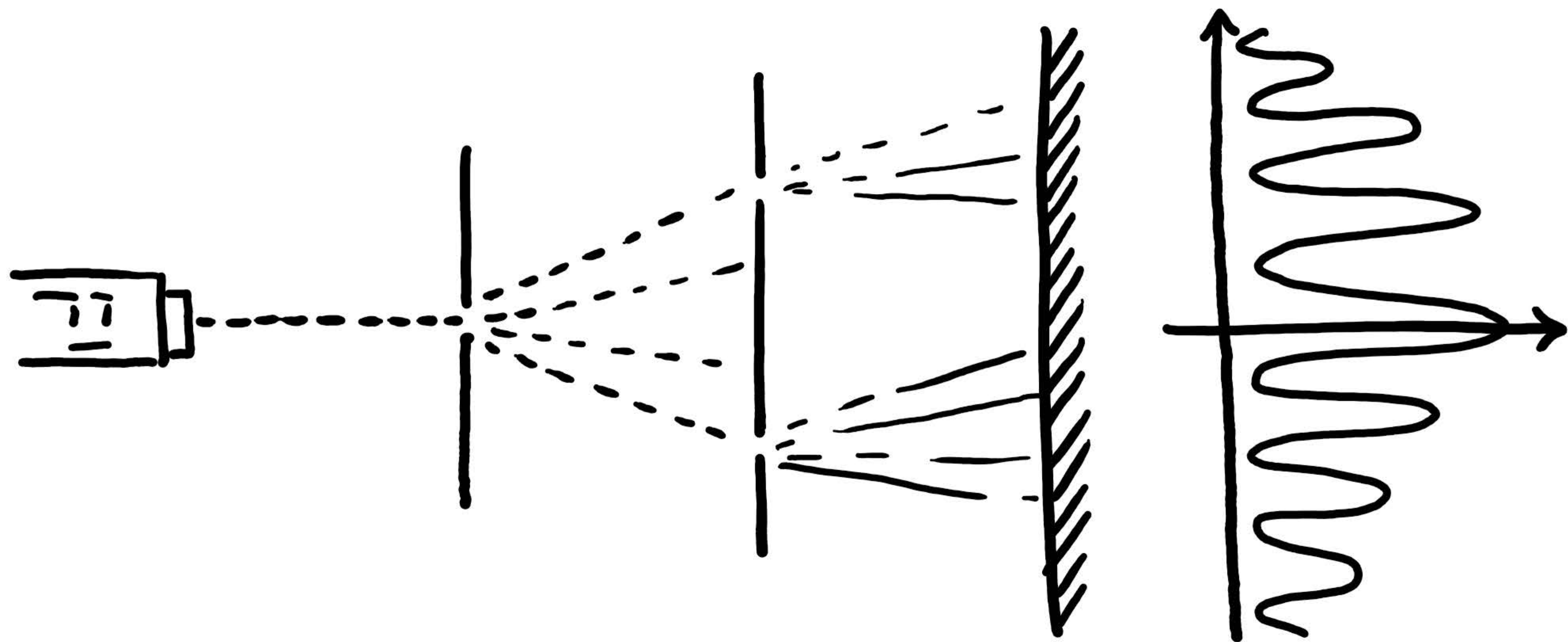


심지어 이런 문제도 있어요. 아래 화살표를 따라가면서 함수를 변화시키면...



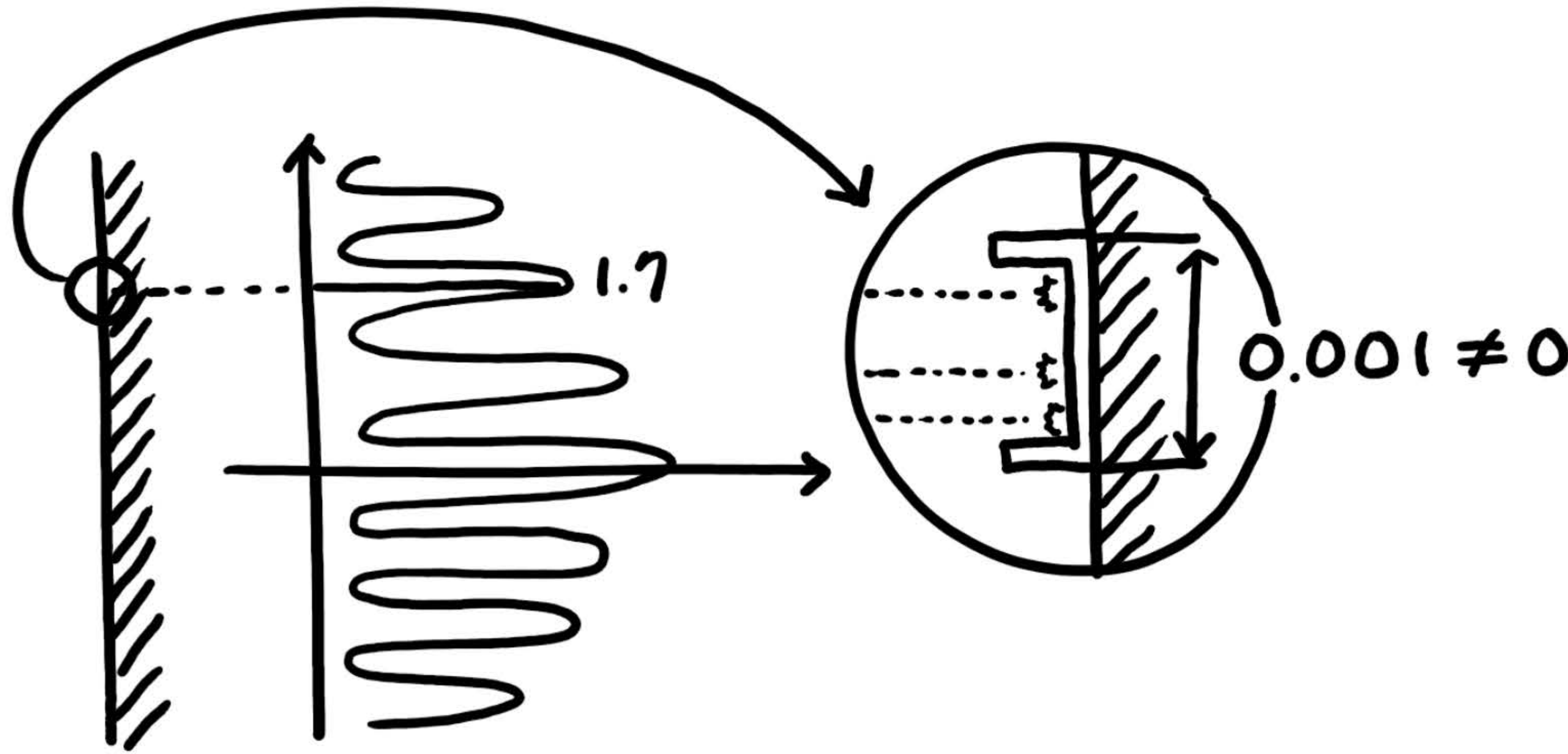
다시 말해서, L2-수렴한다는 현상은 함수값이 수렴한다는 현상과 완전히 별개예요. 이런데도 L2-극한 함수가 진정한 극한값이라고 할 수 있을까요?

이런 불편함을 해소하기 위해, 실제 물리적인 상황을 생각해 봅시다.
예를 들어 아래와 같이 레이저 광선이 슬릿을 통과해 스크린에 도달하면,



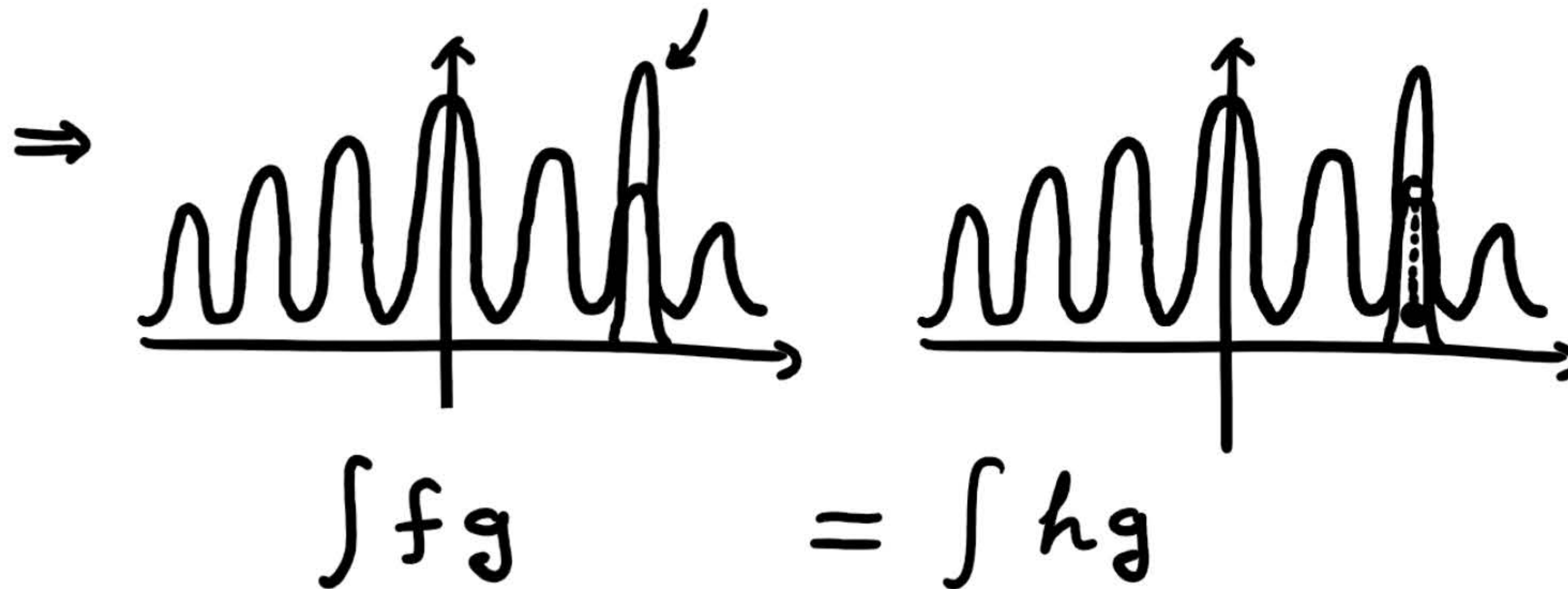
스크린에 간섭 무늬가 생기겠죠. 이 간섭 무늬는 각 지점에서
빛의 밝기를 나타내는 함수로 표현될 수 있겠죠.

근데 진짜로 우리는 "각 지점에서의 함숫값"을 관측하는 걸까요?



사실은 감광 센서의
단면적이 0이 아닐 테니,
실제로는 단면적에서의
"평균" 혹은 "적분값"이
측정되겠죠.

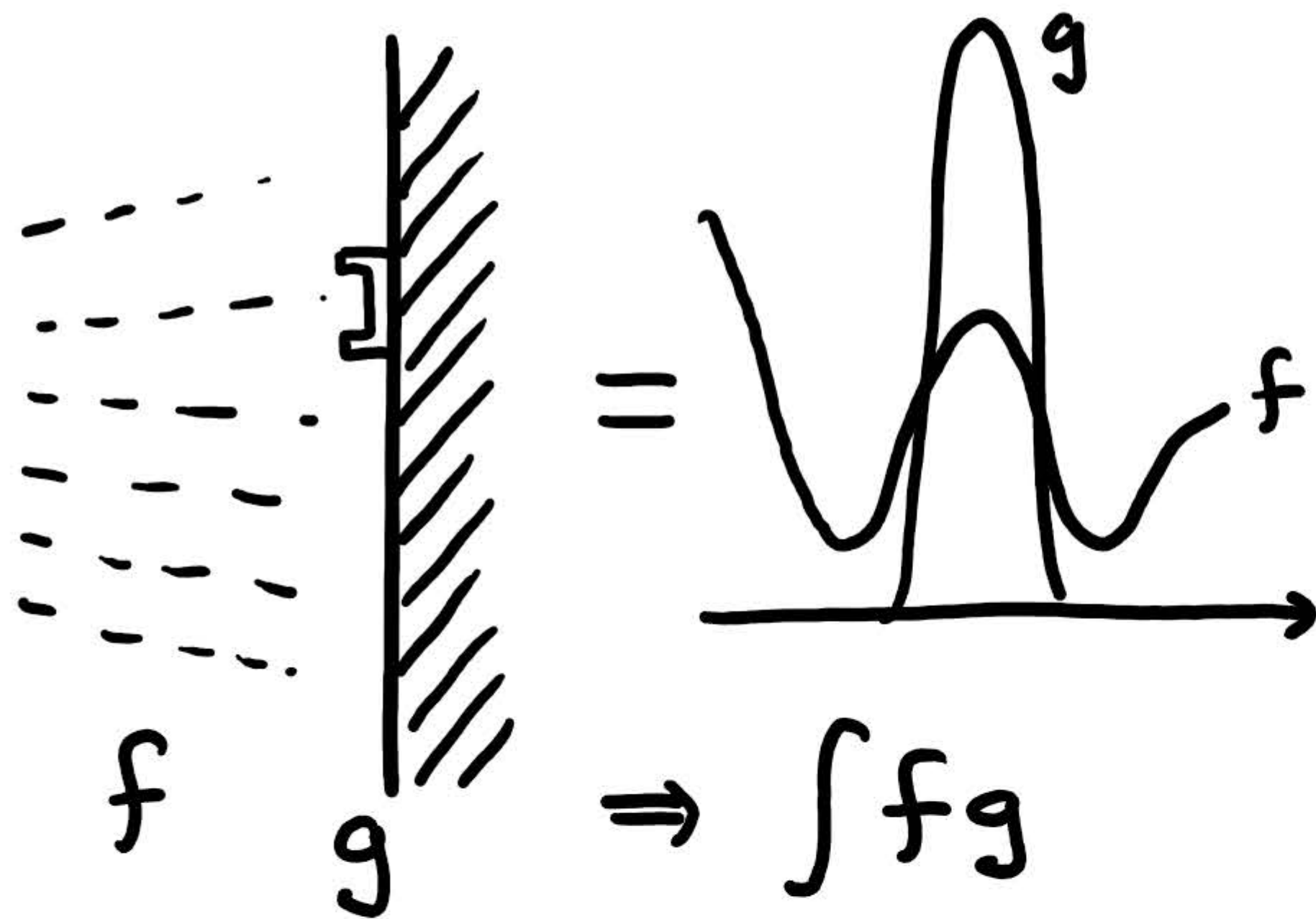
감광 센서의 감도



그러니, 딱 한 지점에서만
함숫값이 다른 f , 용는 감광
센서로 측정했을 때 구별해
낼 수 없습니다. 함숫값을
정확히 읽는다는 해석을
고집할 필요가 없는 거죠.

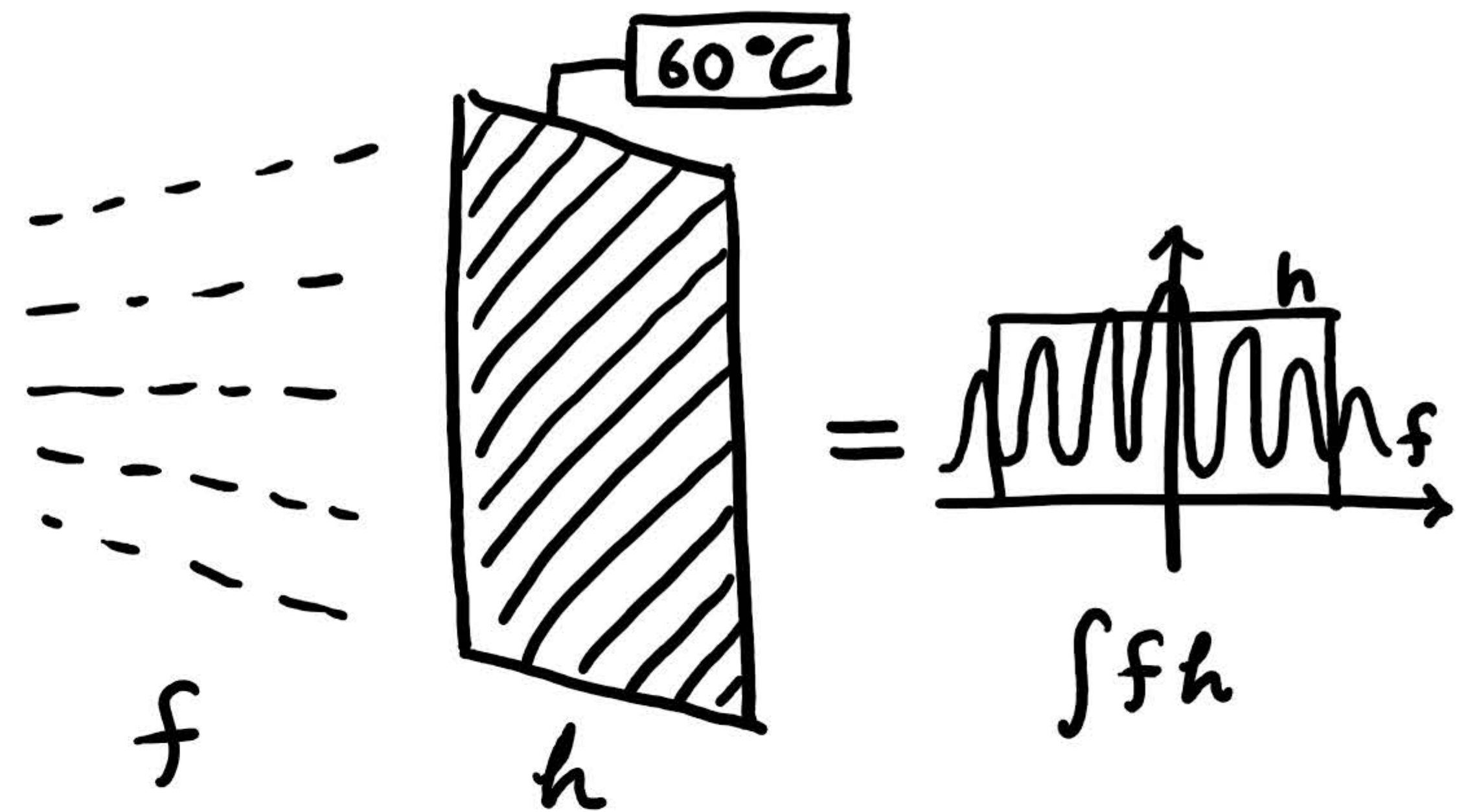
그러니 우리가 준비한 적분 이론들은, 함수들을 "다른 함수에 곱해져 적분값을 뱉어내는 무언가"로 해석한다는 철학이 담겨 있어요. (L2 공간에서의 내적의 의미가 바로 그거죠)

빛과 감광 센서가 만나면...



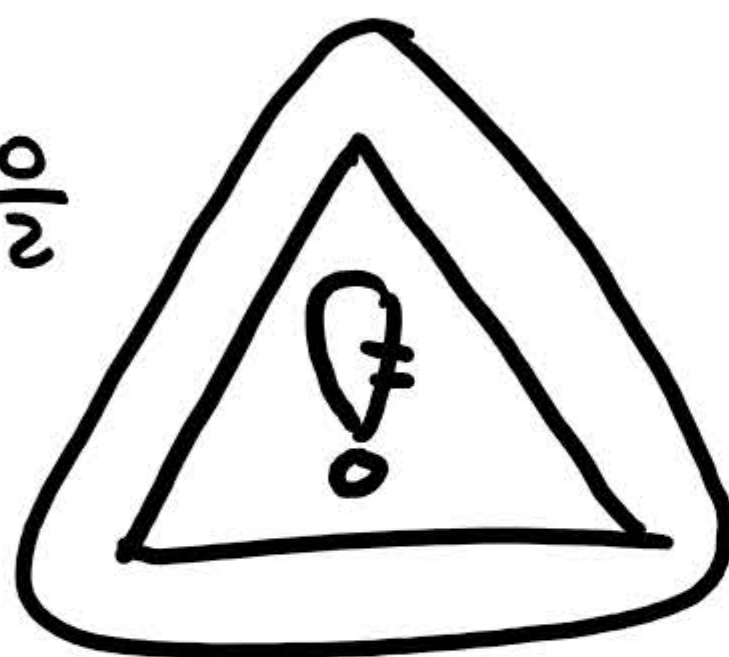
이렇게 로컬한 (하지만 그래도 일정 영역에 걸친) 함숫값 정보를 내주고,

까만 열판에 빛을 비추어 달구는 현상은...



열판 크기 전체에 걸쳐 간섭 무늬 함숫값을 평균 내는 거라고 볼 수 있죠.

그러니, 적분 이론
에서 특정 함수값을
뽑아내는 건
생각하지 않기로...

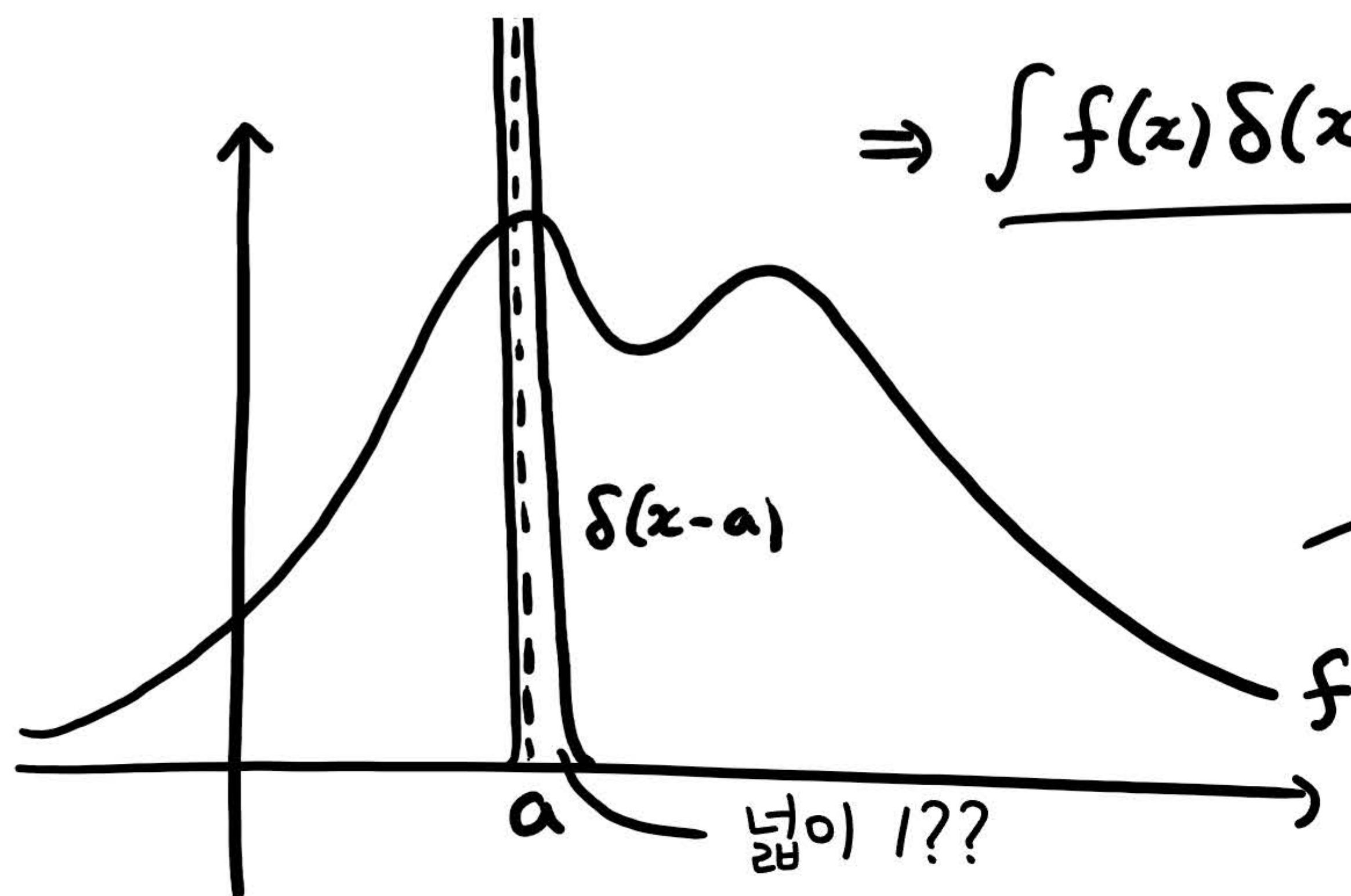


왜 못 해?

정확히 거기에 집중돼 있으
면서 넓이 1인 함수를 곱해서
적분하면 되잖아!



폴 디랙



$$\Rightarrow \int f(x) \delta(x-a) = f(a)$$

어... 이런 함수 말인가요?
저희 이론 안에는 없는데...

a에서만 무한대 값을 가져도,

$$\int f(x) \cdot \infty 1_{\{a\}} = 0$$

르벡 이론에서는 적분값을 0이라고 보니까요.

그래도, 디랙이 주장한 저런 함수(?)에 대해서는 다음 시간에 더 얘기해 보겠습니다!

<참고문헌>

Primary Source

- H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, 1902, Ann. Math. (3) 7, 231-259.
- H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904. Paris, Gauthier-Villars
- F. Riesz, Sur les systems orthogonaux de fonctions, 1907. C. R. Heb. Seances Acad. Sci. (144), 615-19
- F. Riesz, Sur les systems orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm, 1907. C. R. Heb. Seances Acad. Sci. (144), 734-736
- F. Riesz, Sur les operations fonctionnelles linéaires. 1909, C. R. Heb. Seances Acad. Sci. (149), 974-977.
- E. Fischer, Sur les convergence en moyenne, 1907. C. R. Heb. Seances Acad. Sci. (144), 1022-1024.

Secondary Source

- Wheeden, R. L. Zygmund, Measure and Integral : An Introduction to Real Analysis (1st ed). 1977, CRC Press.
- G. B. Folland, Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications (2nd ed). 1999, Wiley.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, Fourier Analysis: An Introduction (Princeton Lectures in Analysis Vol 1). 2003, Princeton University Press.
- T. Tao, An Introduction to Measure Theory. 2011, AMS.
- T. Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration. 2000, AMS Chelsea Publishing.
- D. M. Bressoud, A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration. 2008, 1st ed. Cambridge University Press.