

$$\left\{ \begin{array}{c} \uparrow \\ M \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

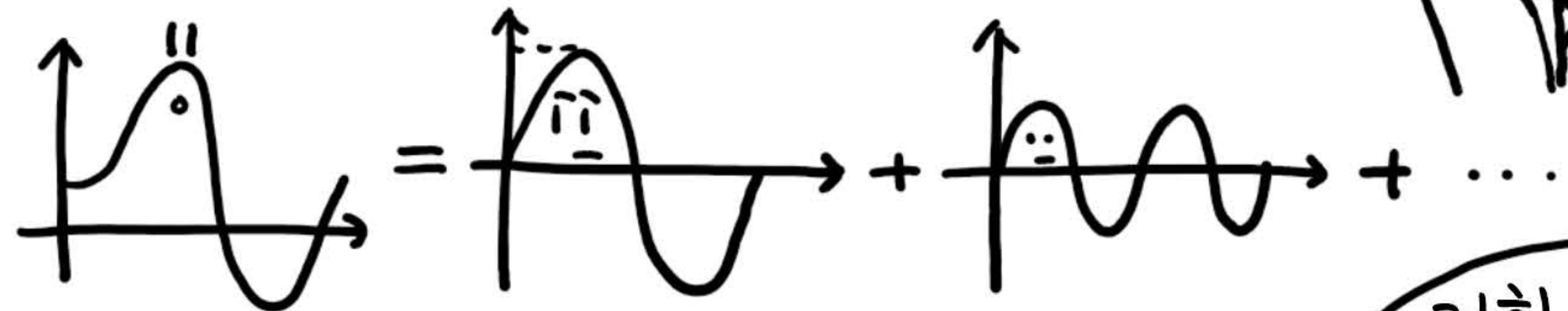
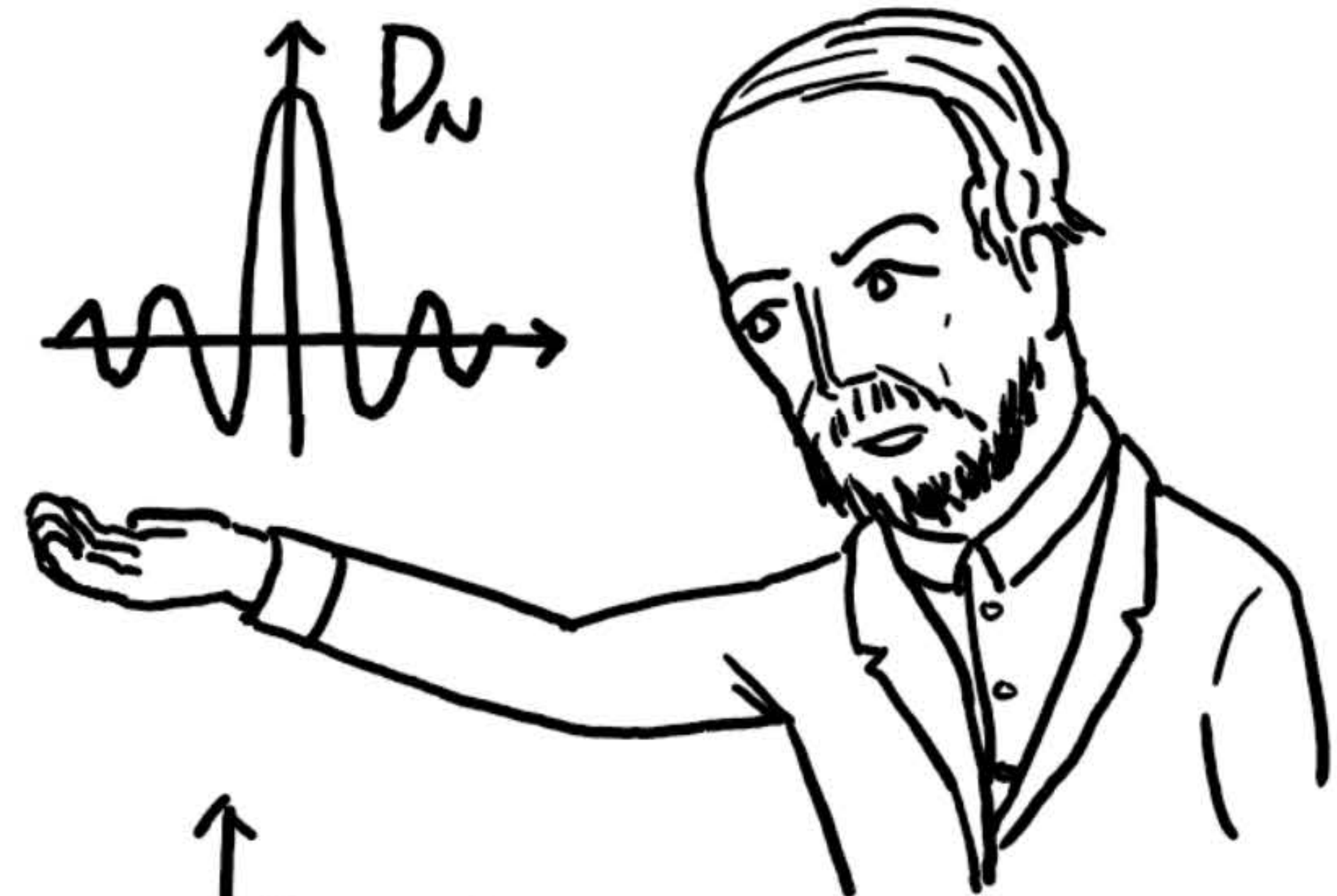
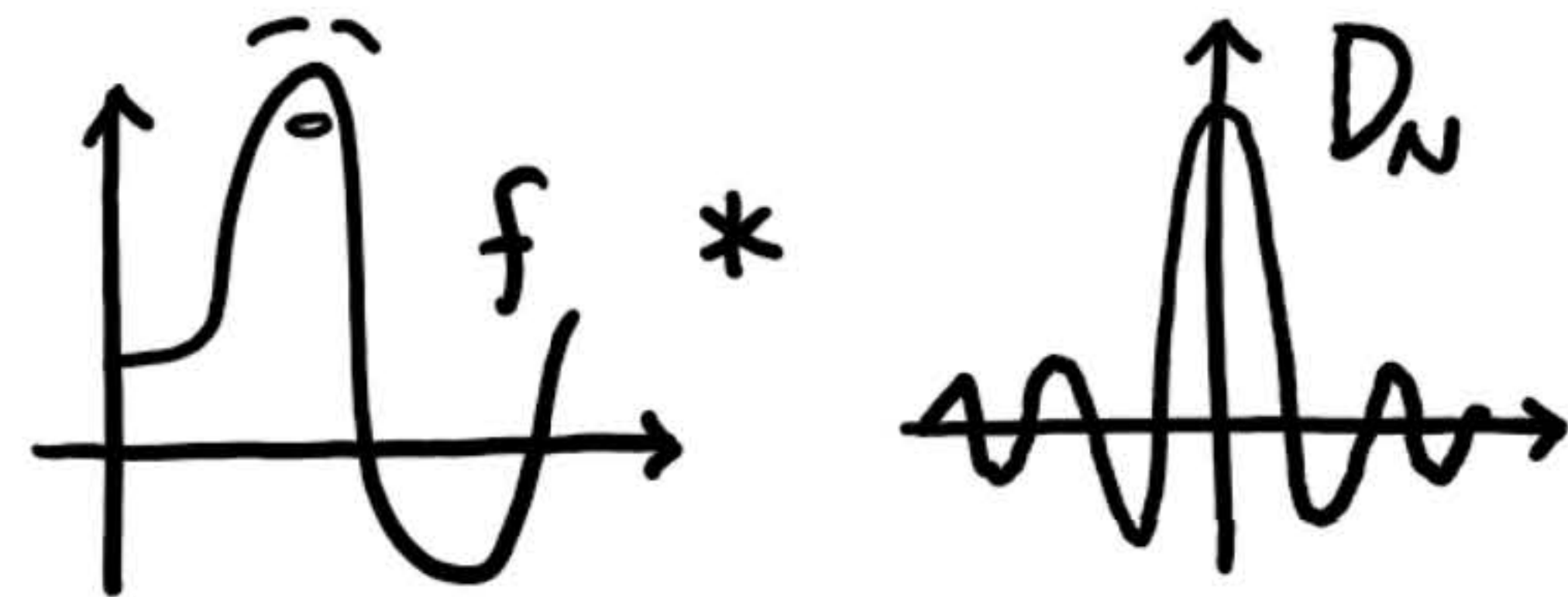
해석학하는 만화 6

- 디랙 델타...?? -

지난 다섯 화 동안 우리는 다음과 같은 주제를 공부했어요.

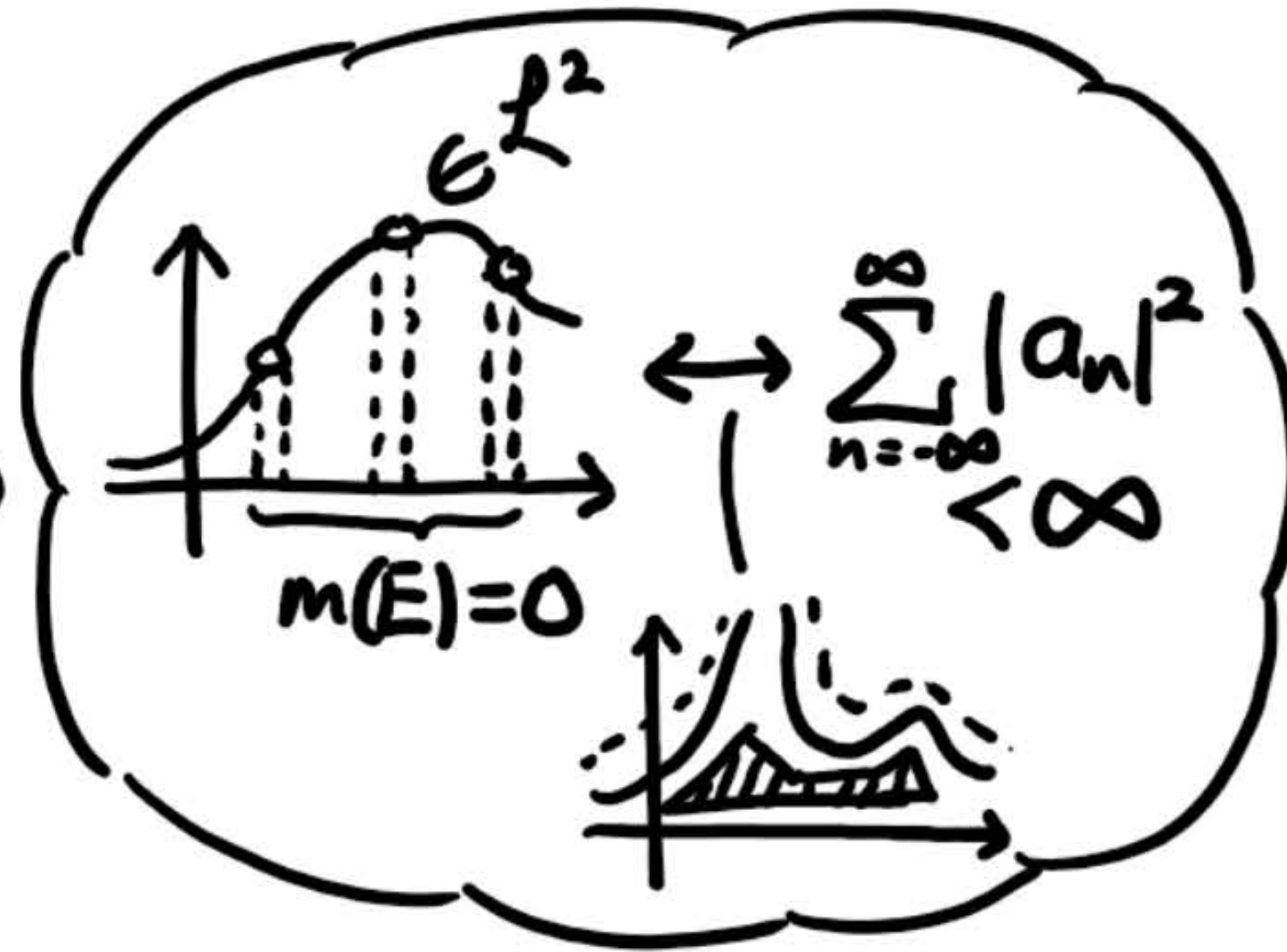
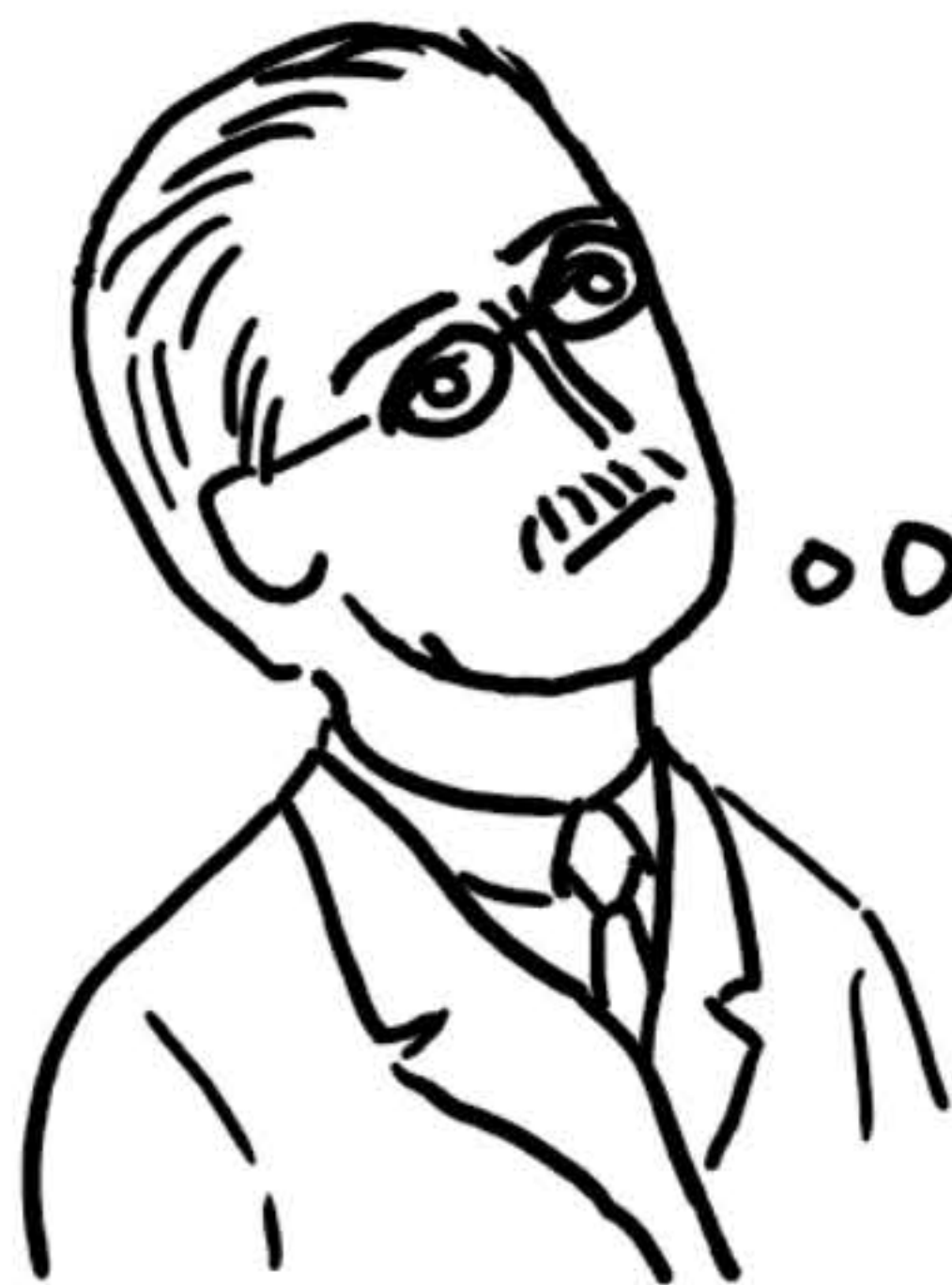
푸리에의 주장을 시작으로,

① (적당히 좋은) 함수에 대한 디리클레 커널의 효과를 봤고,



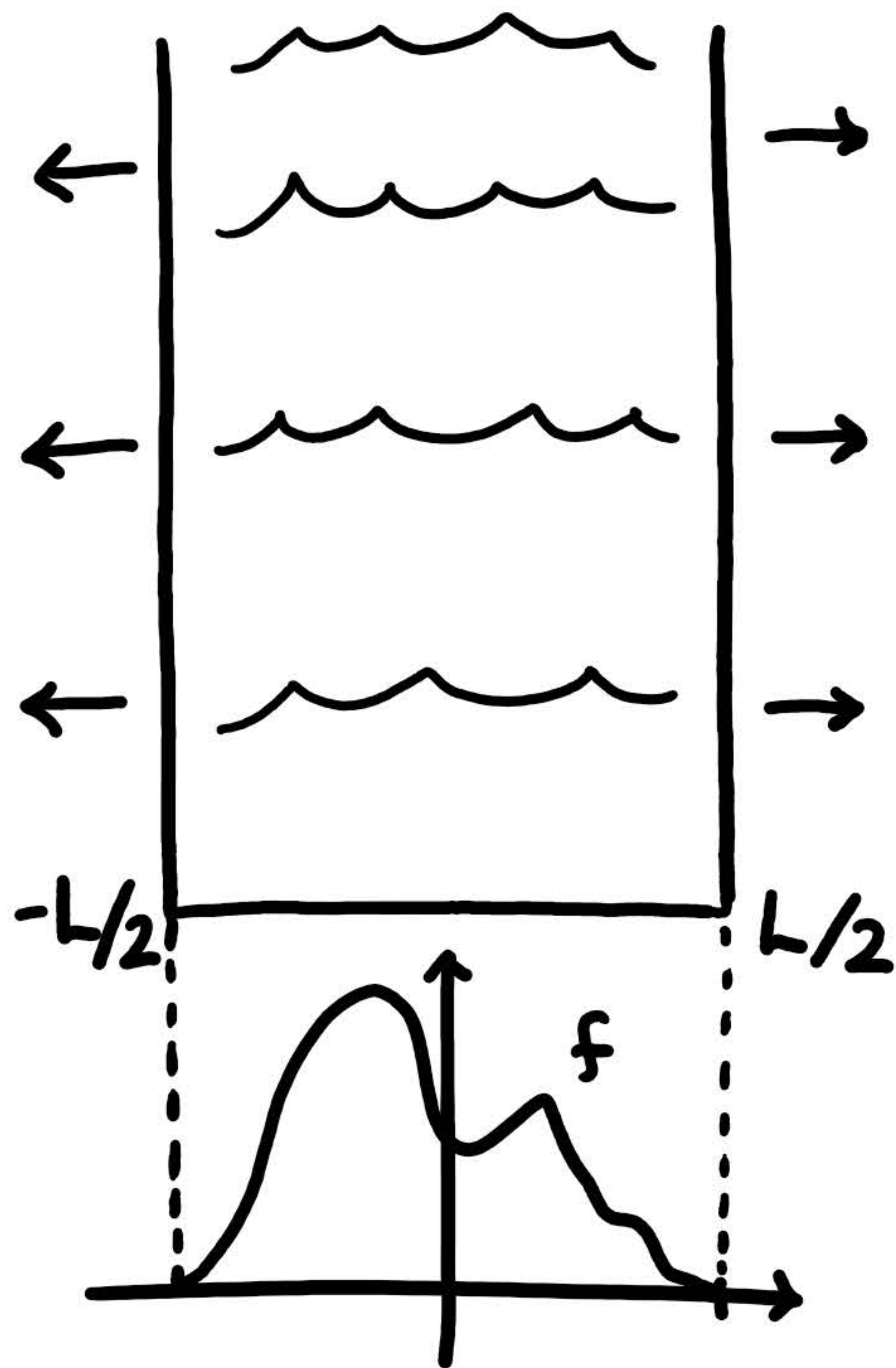
정확히  $f(x)$  값을 뽑아내지!

② 그러나 더 일반적인 함수에 대해 푸리에 급수를 다루려면 새로운 적분 이론이 필요했어요.



그걸 르벡이 제시했고, 이 프레임 안에서는 함수값 하나하나는 더 이상 중요하지 않게 됐죠.

이제까지 한 이야기는 다음 세팅으로도 확장할 수 있어요.

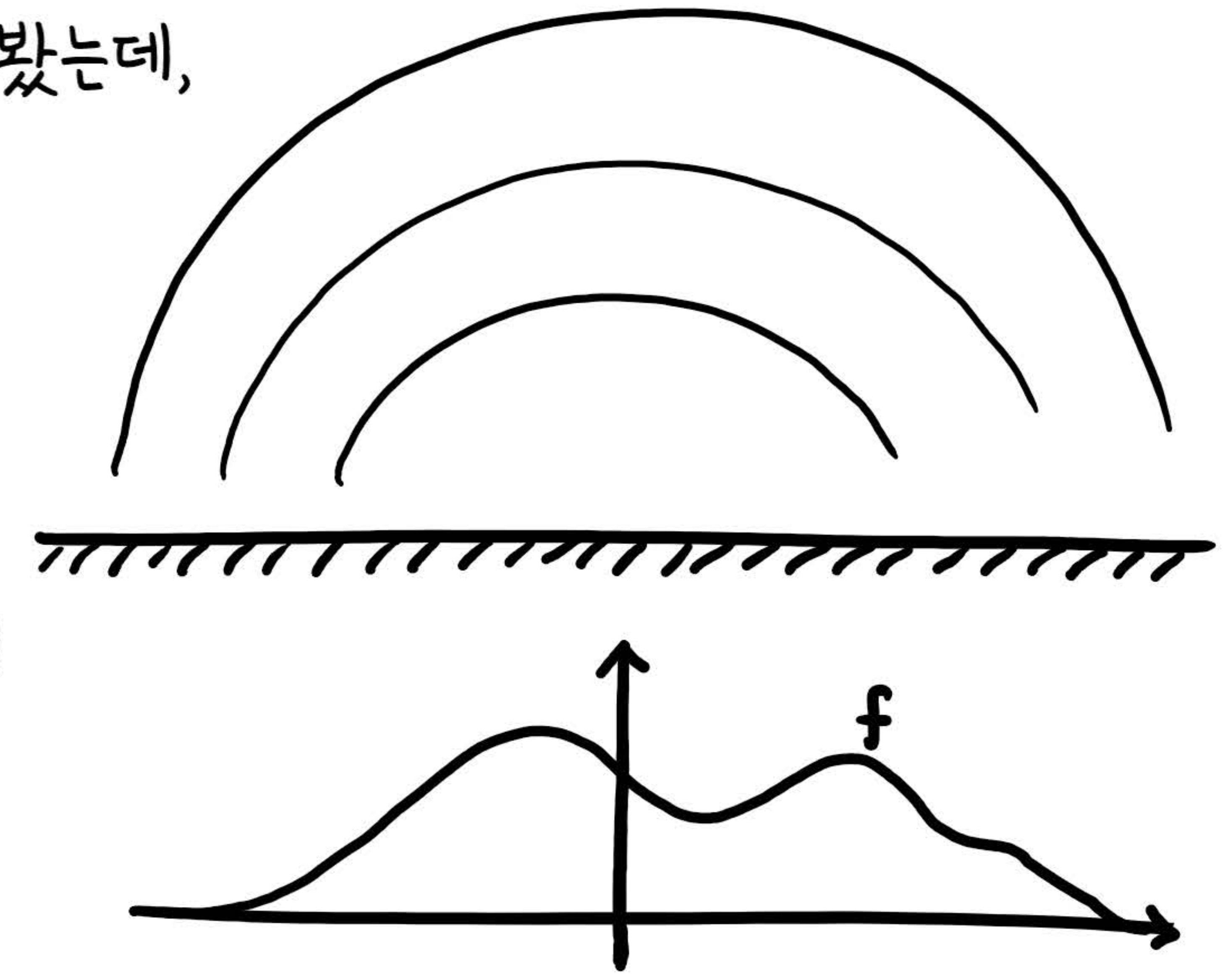


유한 구간 위에서의 주기함수에  
대한 푸리에 급수를 봤는데,

$$\Rightarrow$$

$$L \rightarrow \infty$$

이 구간의 길이를  
무한히 늘려버리면  
어떻게 될까요?



$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{L} \left( \int_{-L/2}^{L/2} f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{L} t} \right)}_{\text{푸리에 계수}} e^{i \frac{2\pi n}{L} x} \Rightarrow \text{???}$$

푸리에 급수

이 경우, 무한 합은 마치 리만 적분을 묘사하는 효과를 나타내고  
 여기에 극한을 취하면...

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left( \frac{1}{L} \right)}_{\Delta \xi} \left( \int_{-L}^L f(t) e^{-i \frac{2\pi n}{L} t} dt \right) e^{i \frac{2\pi n}{L} x}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \right)}_{\text{푸리에 변환}} e^{2\pi i \xi x}$$

푸리에 역변환

이렇게 적분 형태가  
 등장합니다. 바로  
 수직선 전체 위에서의  
 푸리에 변환 및 역변환이죠.

푸리에 급수 때와

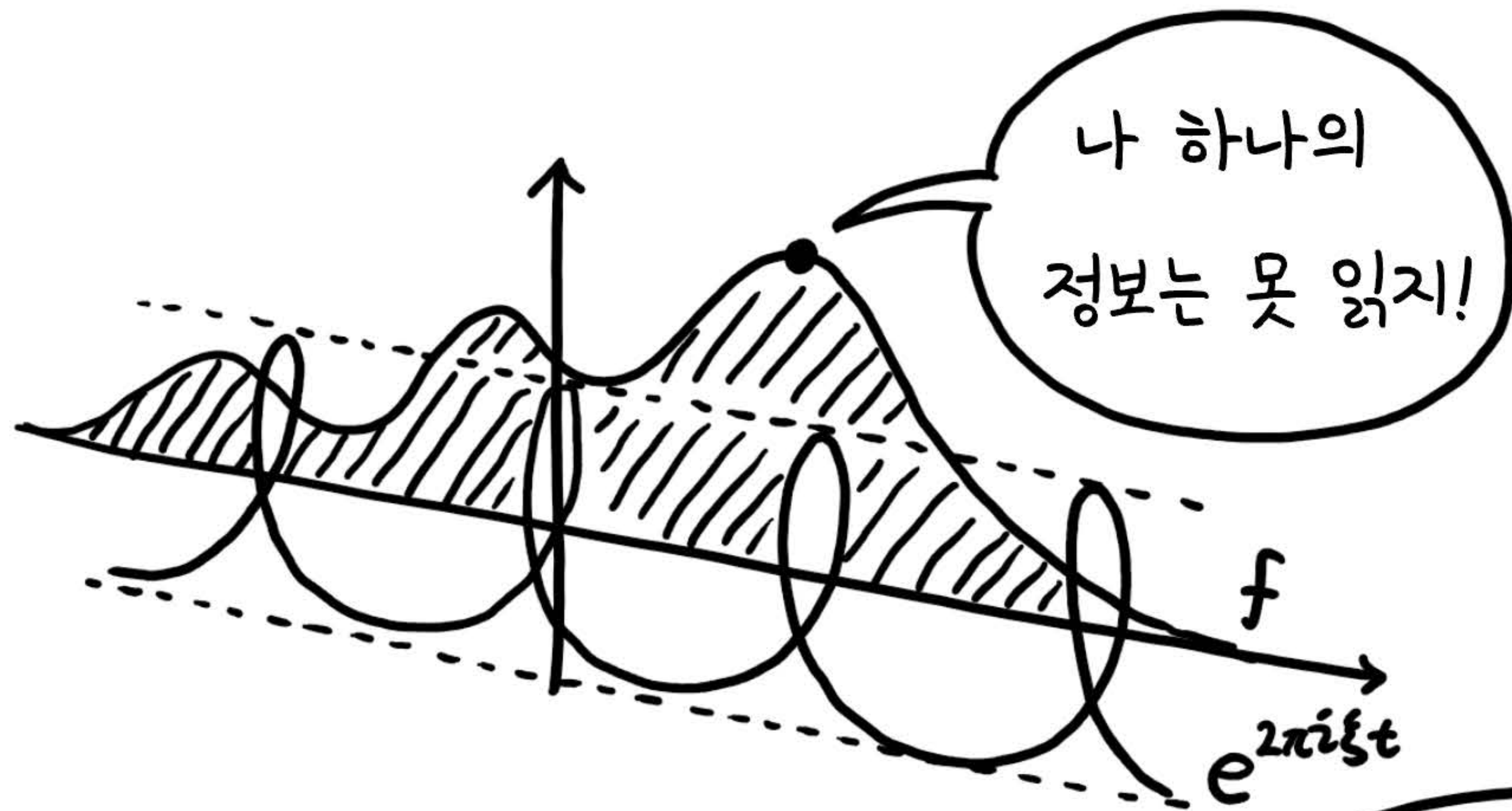
마찬가지로, 이 변환은

미분과 잘 어울리기 때문에

편미분방정식을 풀 때 유용하죠.

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} f(x)}_{\uparrow} e^{-2\pi i x \xi} dx = \widehat{(-2\pi i x f(x))}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \widehat{(2\pi i \xi \hat{f}(\xi))}$$



나 하나의  
정보는 못 읽지!

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) \quad \text{💡}$$



아니, 그게  
아니라니까!

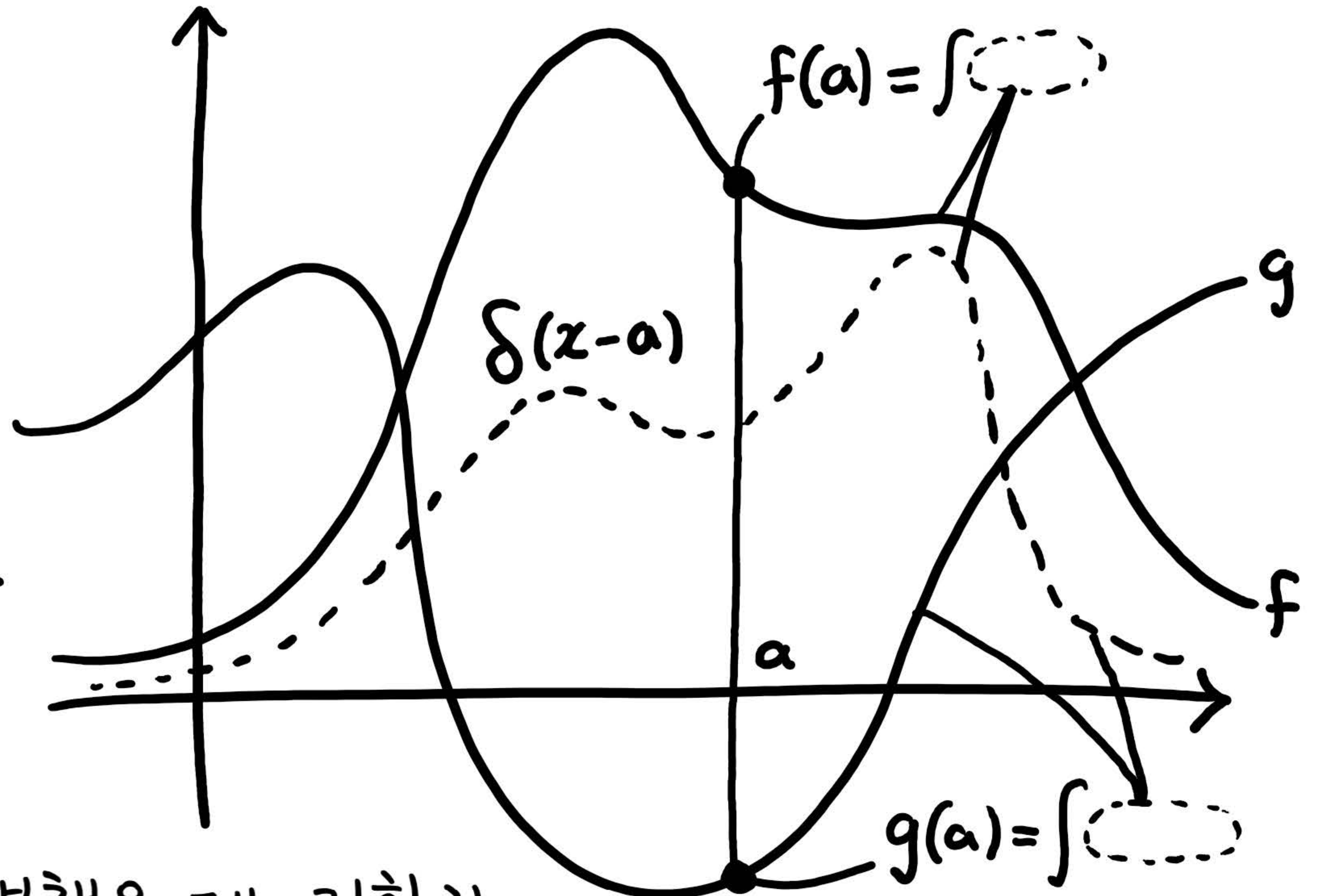
음, 디랙  
아저씨는  
불만이 있나  
보네요.

그러나 역시나 적분을 통한 변환이기 때문에,  
한 점 한 점에서의 정보는 잃을 수밖에 없...

디랙은 디랙 델타 함수라는 걸 양자역학 계산에 열심히 사용했어요.

그 함수의 역할은...

$$\delta(x-a)$$

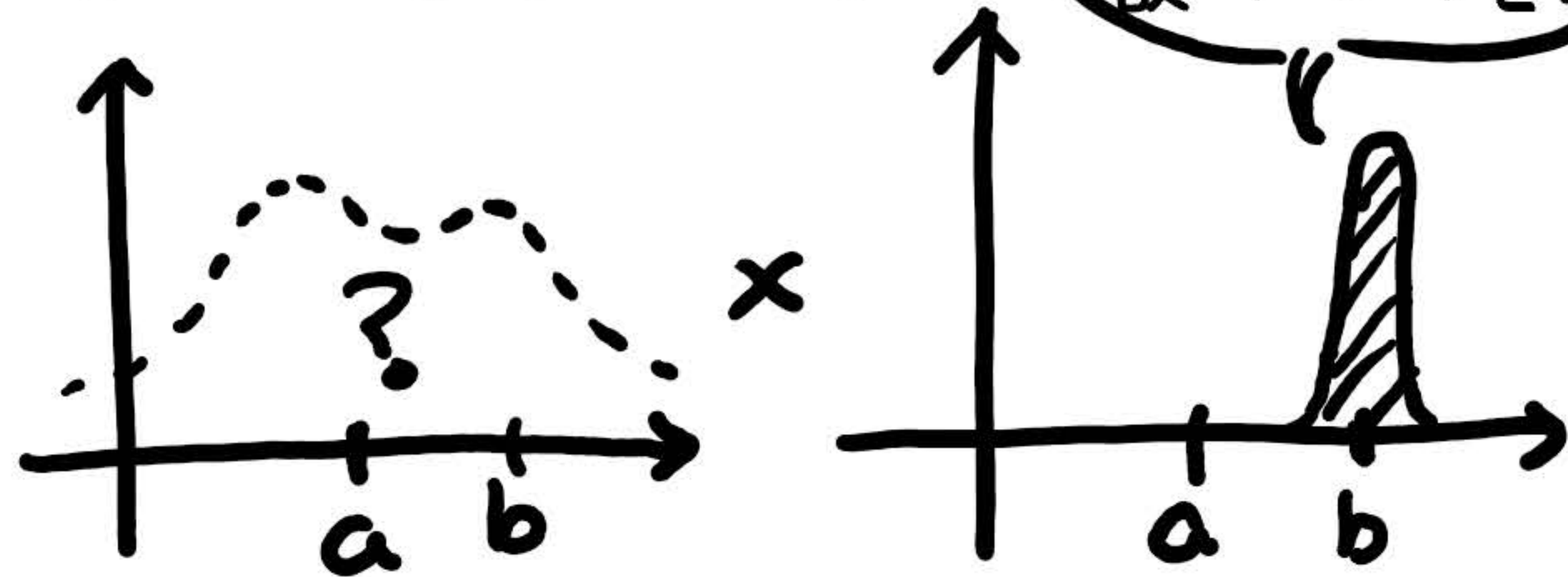


다른 함수  $f$ 와 곱해서 적분했을 때, 정확히

원하는 지점에서의  $f$ 의 값을 읽어내는 함수였죠.

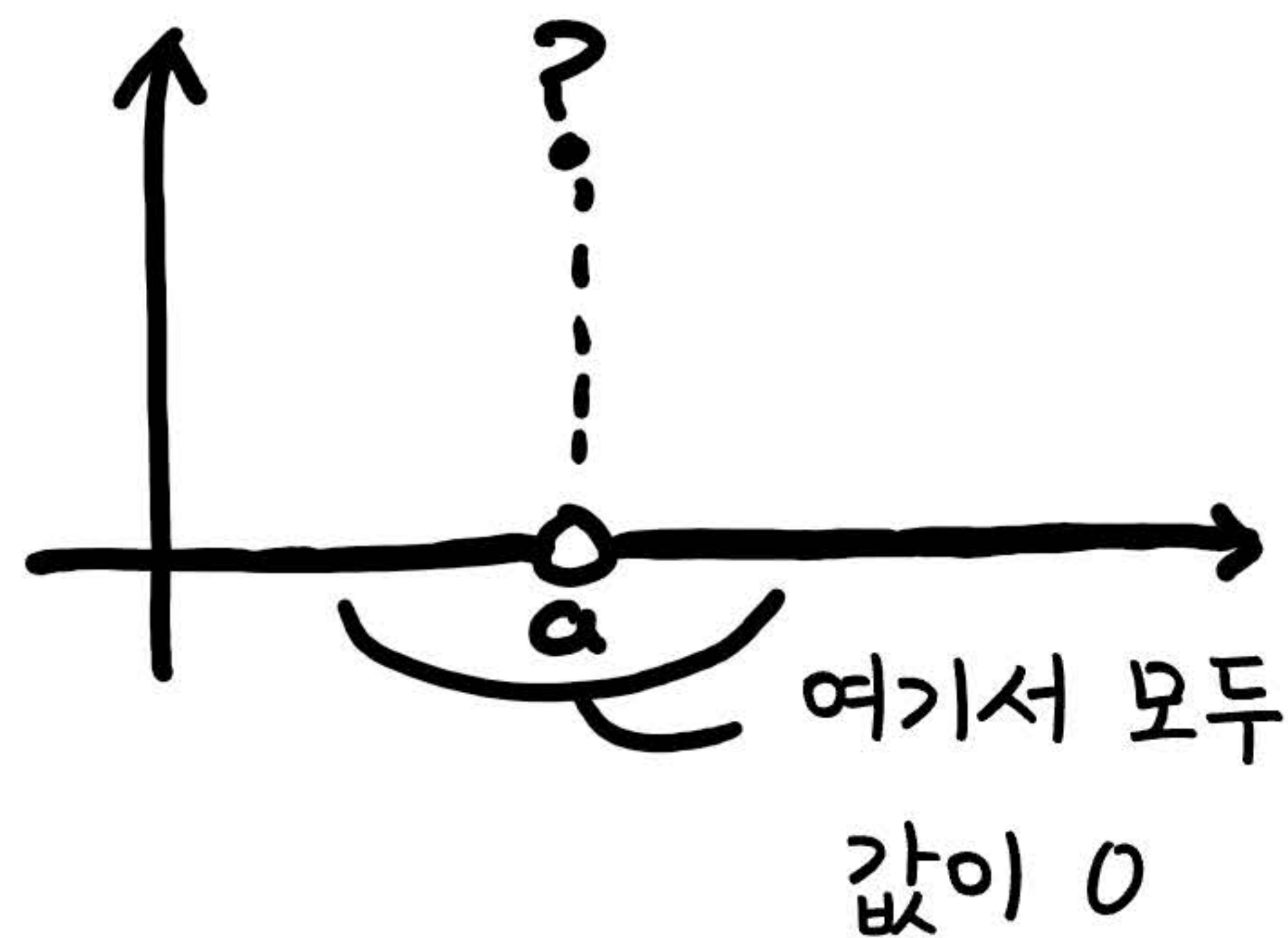
근데 잠시, 이런 현상이 일어날 수가 있나요? 적분 이론을 생각해 보면,

①  $a$ 를 비껴난 펄스를  
곱하면 항상 0이니,



$$= 0$$

$$\Rightarrow \delta(b-a) = 0$$



$a$  이외에는  
값이 0이군!

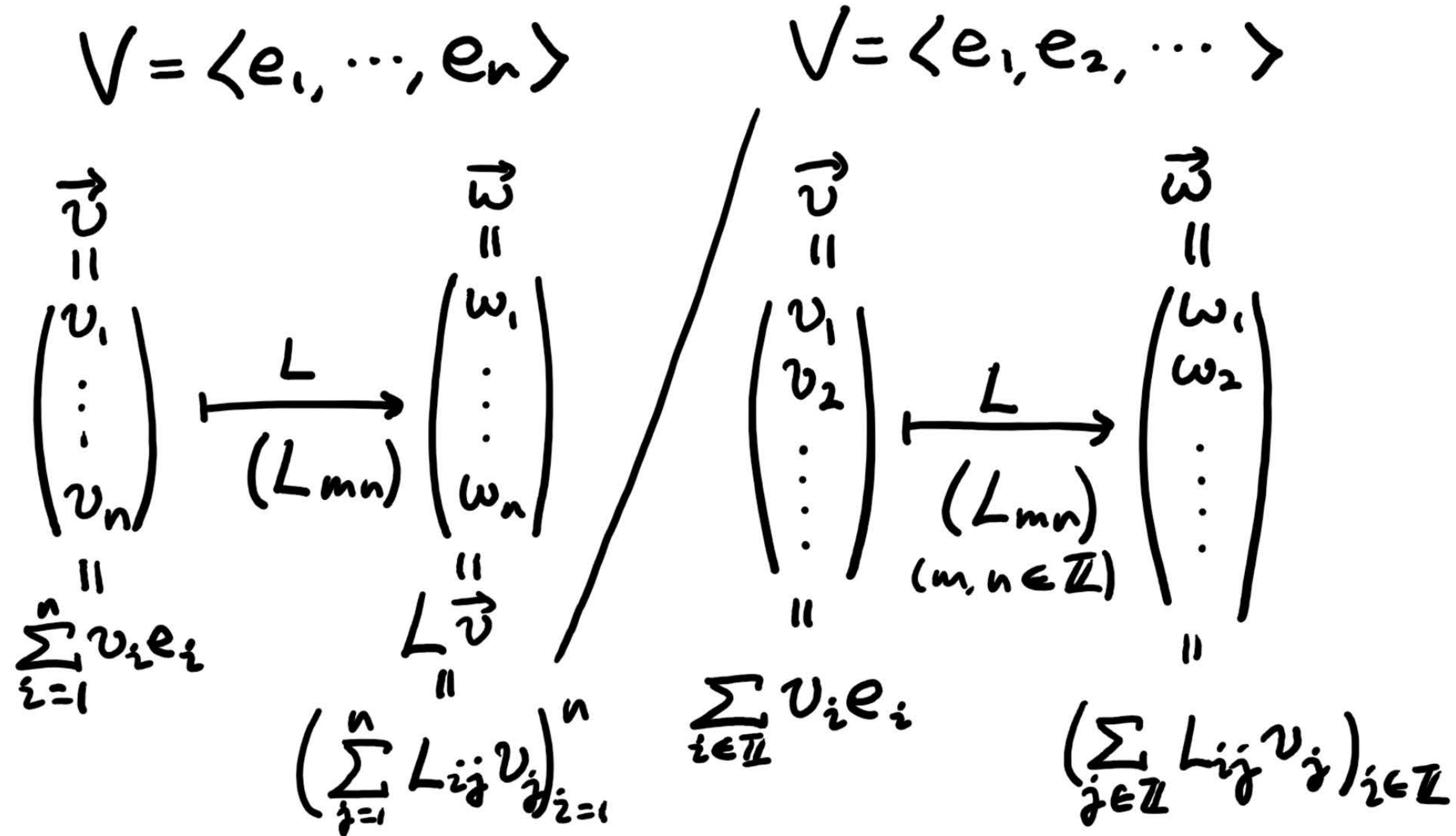
아니 딱 한 점  
빼고는 함숫값이 0이란  
건... 적분해도 0이죠 그럼

아니 이게  
적절한 함수는  
아닌데... 음...



음, 뭔가 이상하네요. 우리가 아는  
함수하고는 다른 것 같아요.

한번 다른 관점에서 살펴볼까요? 우리가 아는 선형대수 이론은 크게 두 가지가 있어요.



유한 차원 이론은 매우 깔끔합니다. 벡터의 유한합만 다루면 되고, 행렬들도 유한하죠.

그에 비해 가산 기저로 기술되는 공간에서는... 무한합 등을 잘 다뤄야 하지만, 여전히 비슷해요.

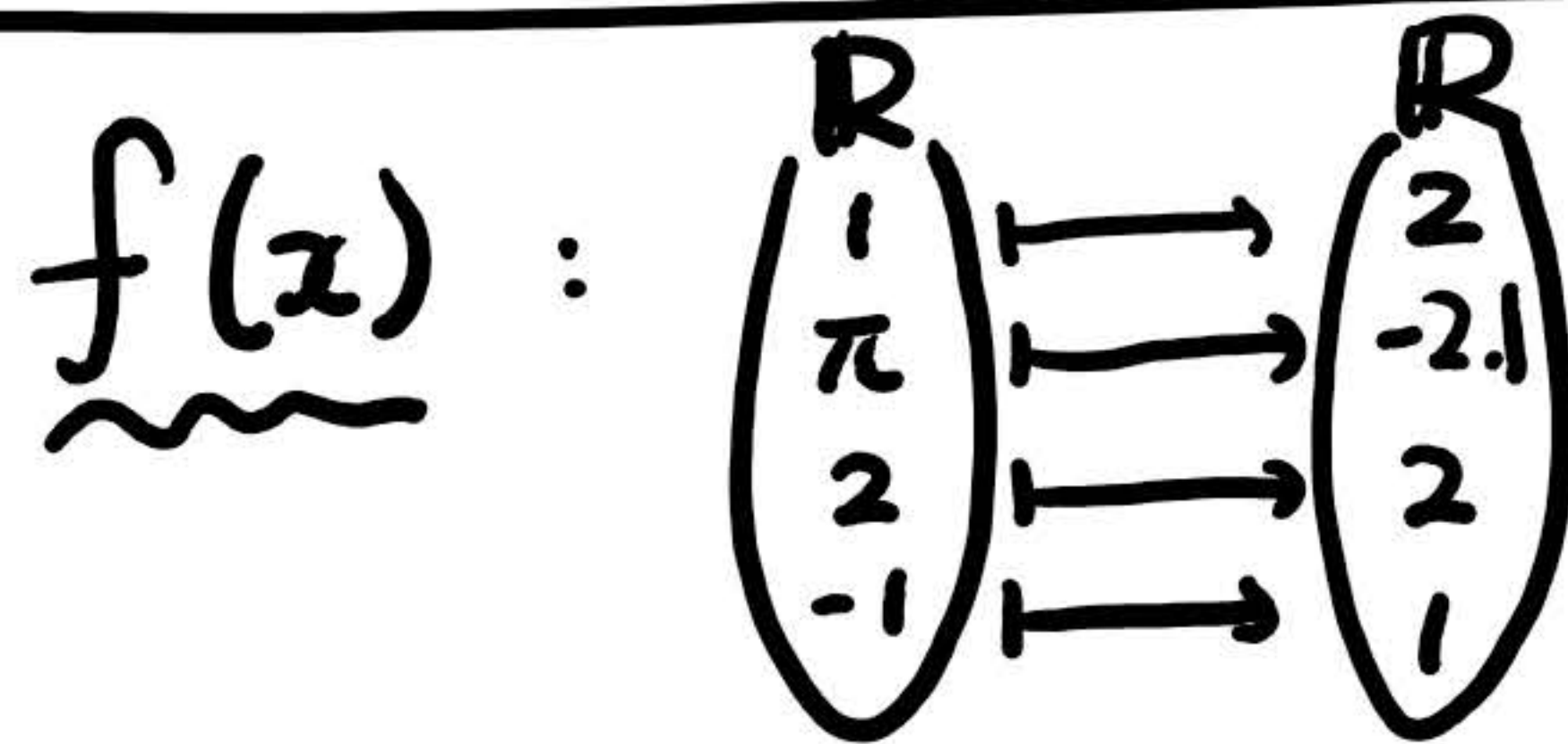


$$f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \text{ or } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

그런데, 디랙이 다루고 싶어한 공간은 사실 가산 기저로 만들어지거든요.



하지만 디랙은 굳이 가산 개를 벗어나 실수 개로 분해하겠다고 선언한 거예요.



$$: f(x) = \int_{\alpha} f(\alpha) \cdot \boxed{\phantom{f(x-\alpha)}}$$

각 지점  $x$ 에서의  $f$ 의 작용을 읽어내는 방식으로 분해하면, 실수 개의 함수로도 분해할 수 있단 거였죠.

$$\delta(x-\alpha)$$

그 작용을 해 주는 함수를  $\delta(x-\alpha)$ 라고 한 거구요.

그리고 이 과정은 또다른  
함수들에 대해서도 가능해요.  
바로 복소지수함수들이죠.

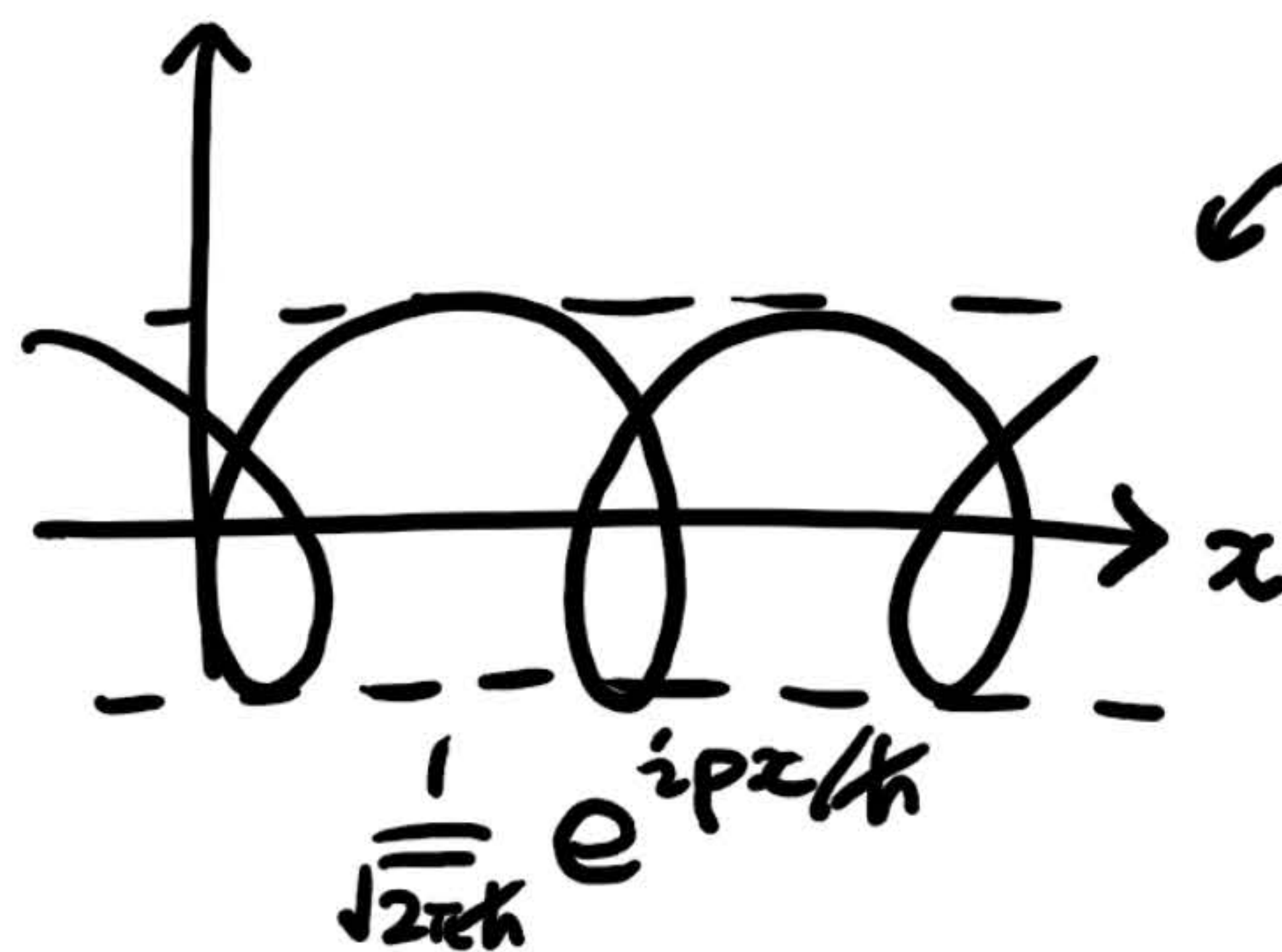
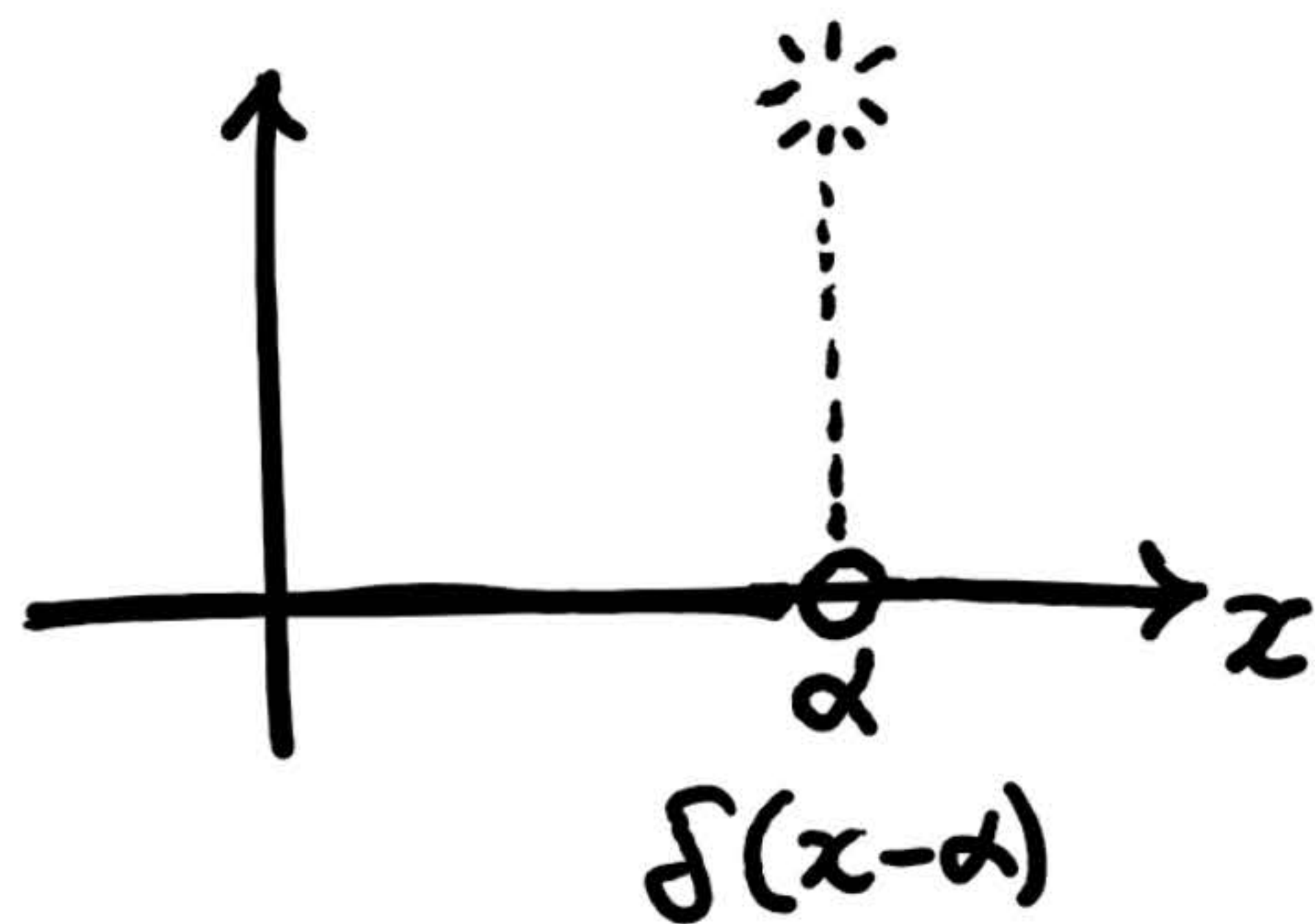
$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\beta x/\hbar}} \longleftrightarrow \boxed{\delta(x-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(p) = \int_{\beta} \left( \int_{\alpha} f(\alpha) \cdot \boxed{\frac{\delta(x-\alpha)}{e^{i\beta x/\hbar}}} \right) \delta(p-\beta) d\beta$$

유한 차원에서 좌표 변환을 하듯, 두 함수  
세트의 연관 계수만 곱해 적분하면...

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\beta\alpha/\hbar}$$

새로운 분해가 탄생했죠.  
이게 바로 푸리에 변환이었구요.

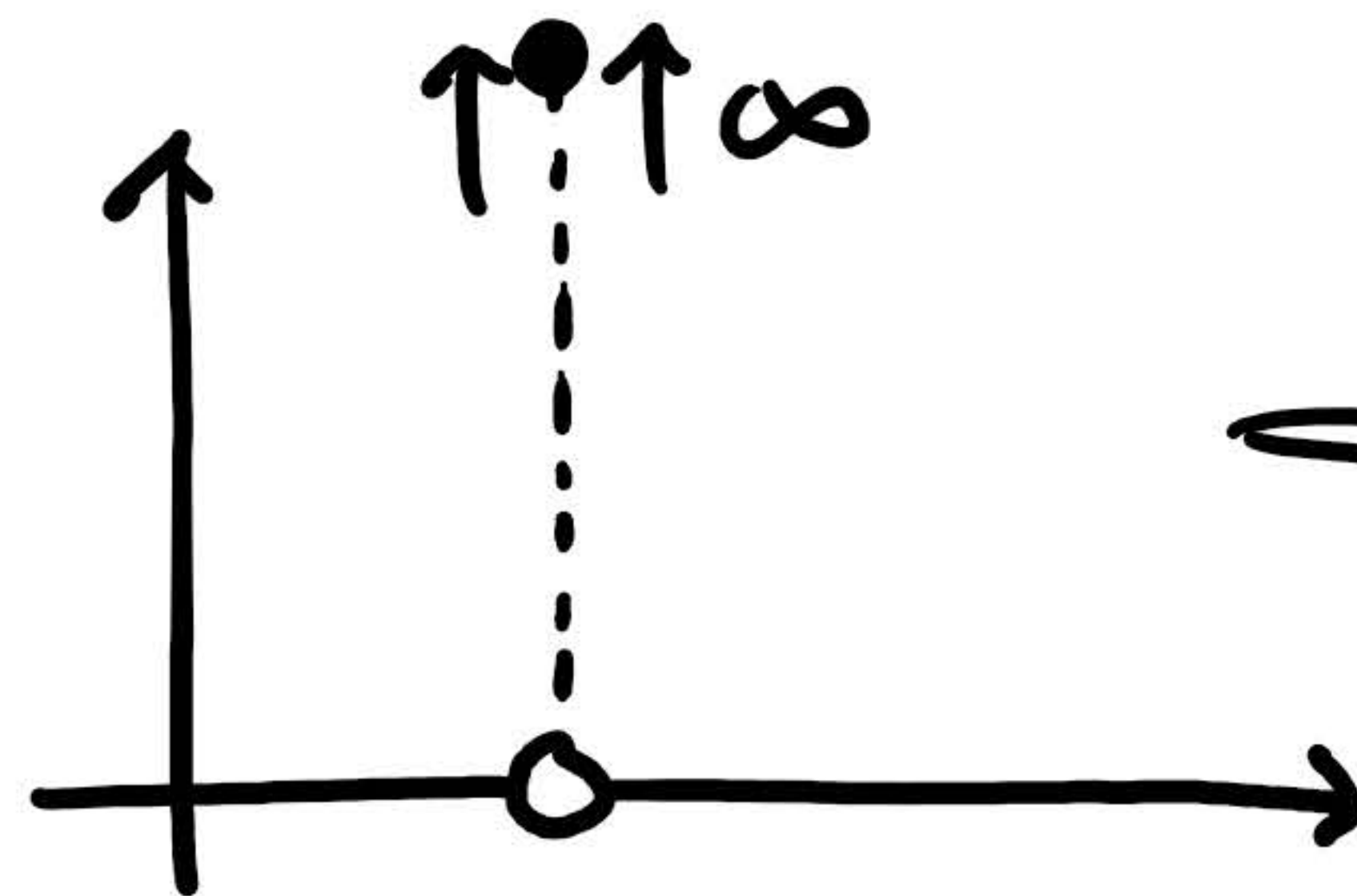


$$\int |f|^2 = \infty$$

하지만 가산 개를 어긴 만큼,  
두 함수 세트 모두 "제대로 된  
기저"는 아닌 모양이네요.

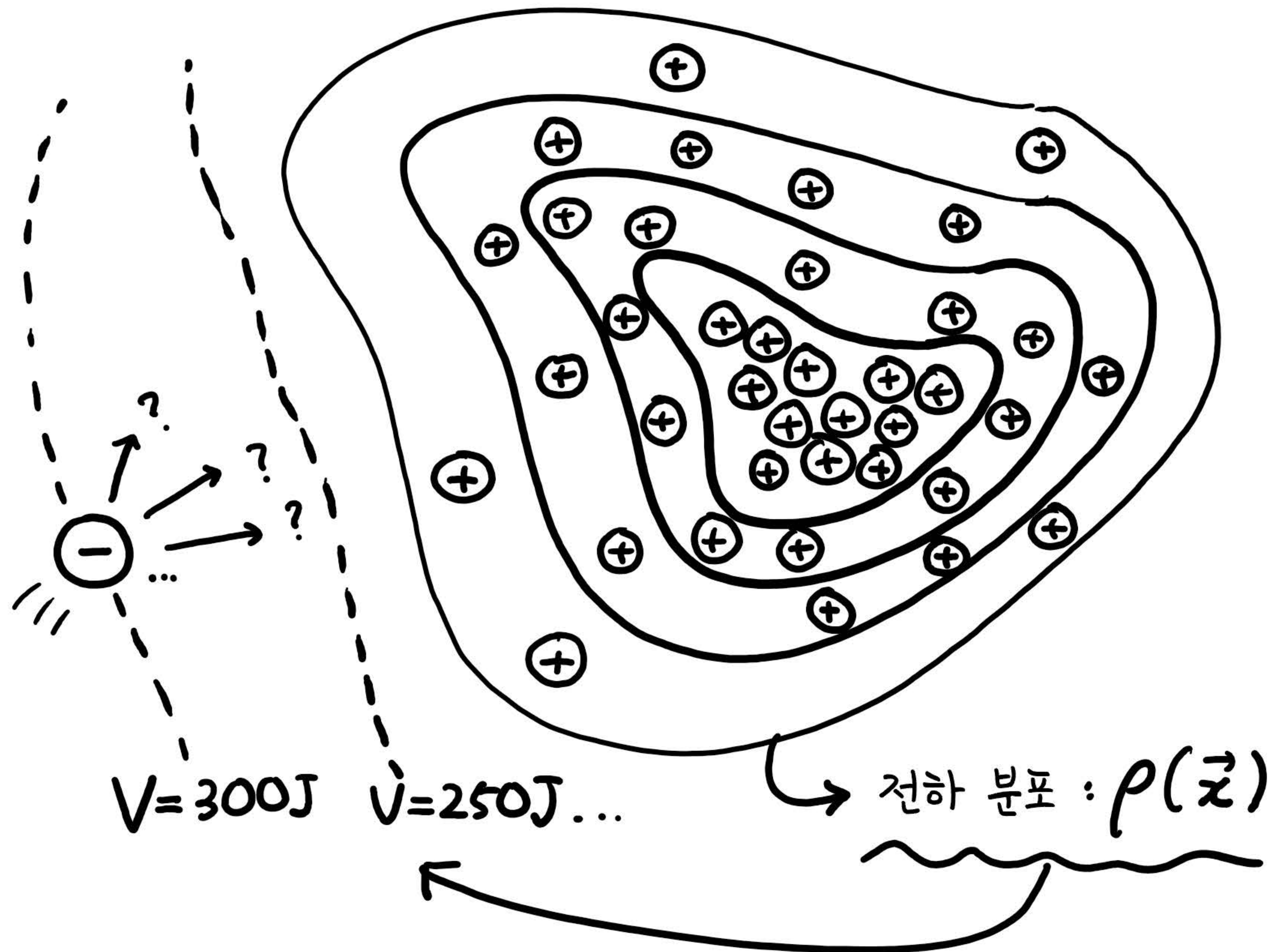


이건 좀 중요한데요, 디랙 델타 함수로  
분해하는 것은 선형대수에서 기저로 분해하는 것과는  
다른 작업이라는 겁니다. 그럼 도대체 기저도 아닌 걸  
어디에 쓰겠다는 걸까요?



함수도 아닌 내가  
어떤 역할을  
하는 거지?

머리도 식힐 겸, 물리에서 답을 찾아 봅시다. 다음 상황은 전자기학에서 가장 기본적인 문제인데요,

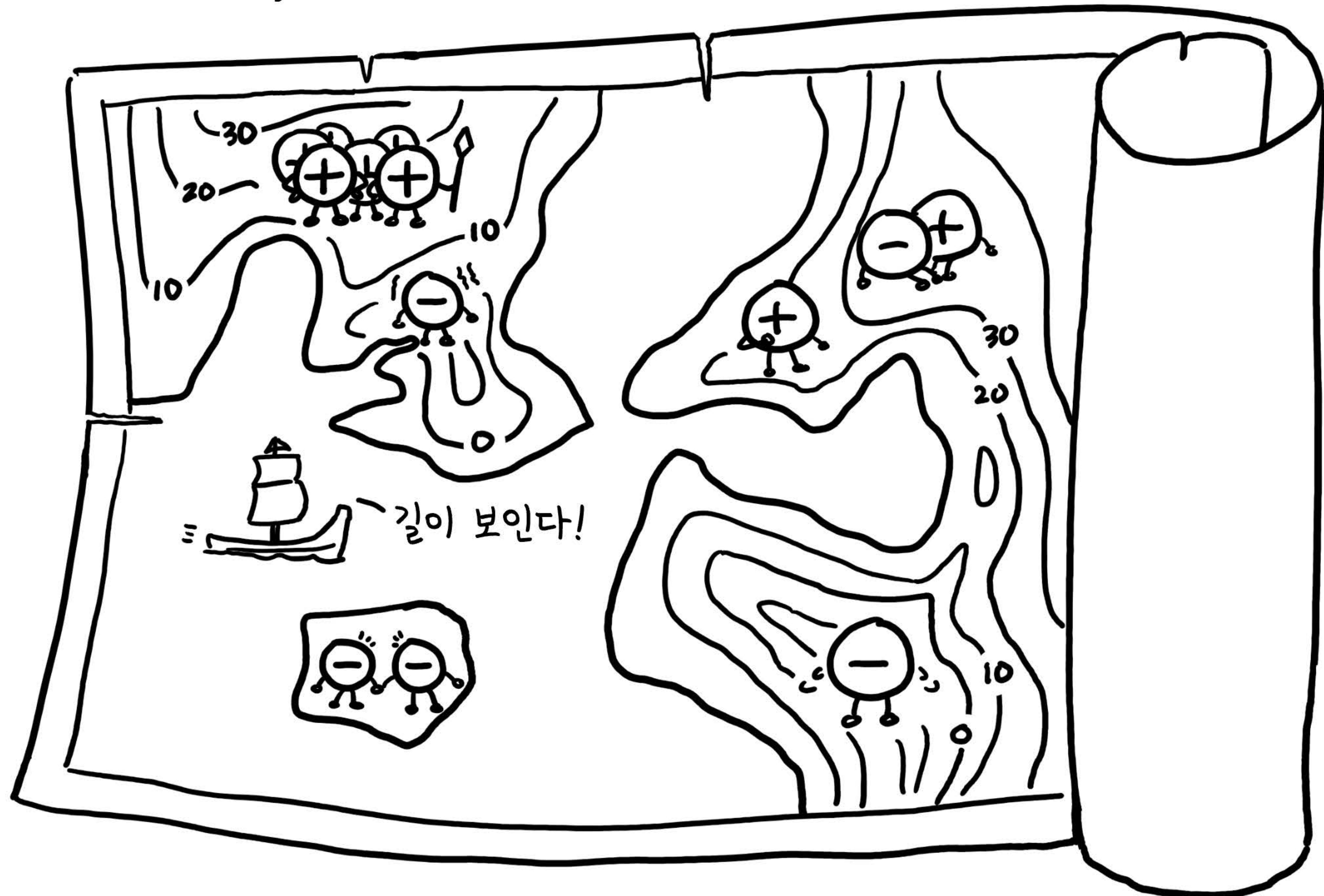


전하 분포가 고정되어 있을 때, 여기에 입장한 조그만 전하가 움직일 경로를 구하는 겁니다.

이 경로를 구하는 방법은, 전하 분포가 만들어 내는 퍼텐셜 함수라는 걸 읽어내는 겁니다.

그러니 우리 임무는, 다음 편미분방정식을 가지고 퍼텐셜 지도를 그리는 겁니다.

$$\nabla^2 V = -\rho(\vec{x})/\epsilon_0 \quad (+ V_\infty = 0)$$



그럼 여러분이라면, 어떤 전하 분포부터 잡고 풀어 보겠어요?

당연히 잘생긴 축전기부터지

아니야.

넵!

아, 좀 더 만만한 대칭적인 도형부터?

너네도 아님.

그럼 뭐야?

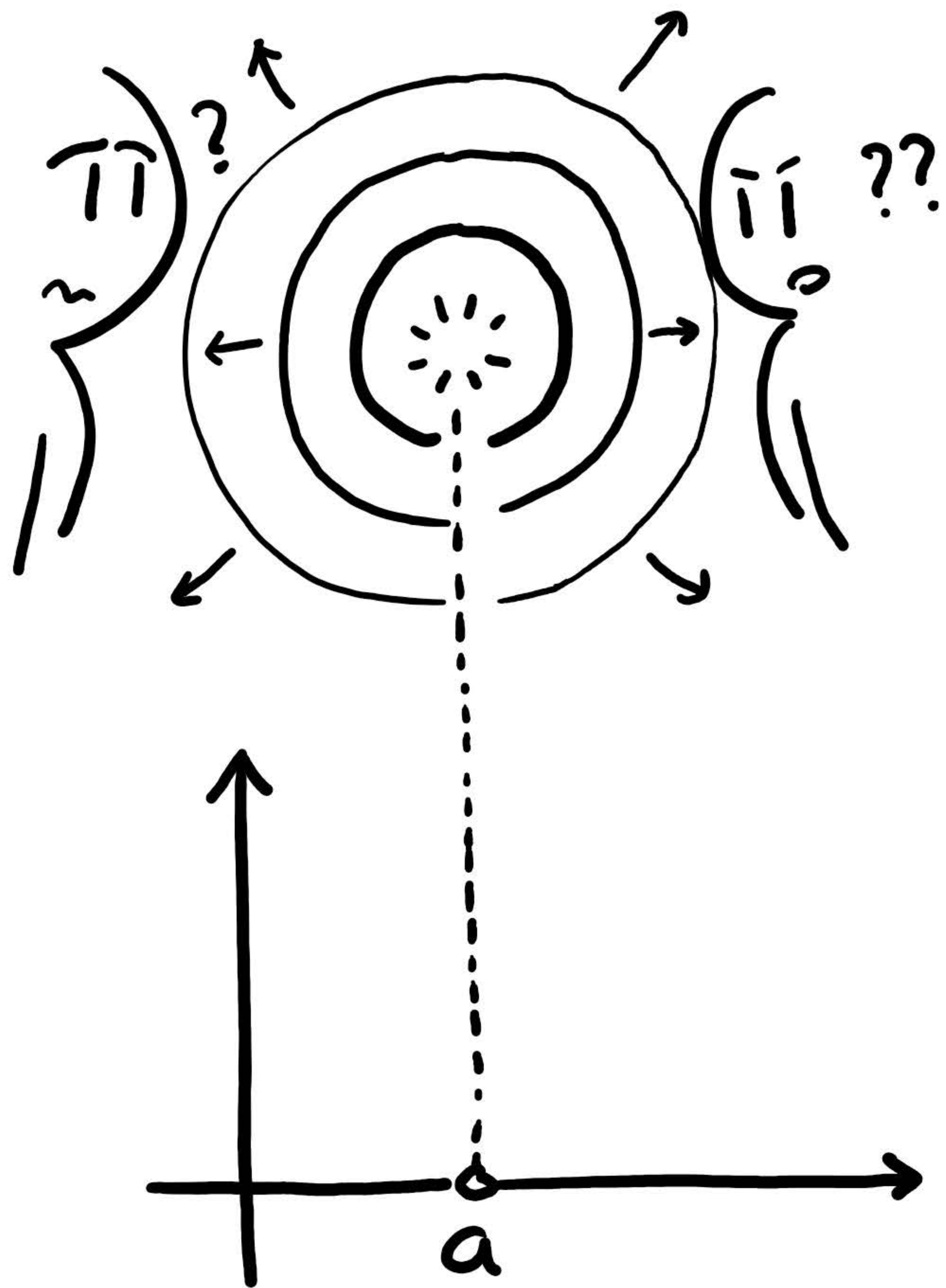
미, 1차원부터?

응 아님.

???

π π

물리학자들의 사고 방식은 가장 작은 단위부터 건드리는 거예요. "부피는 안 차지하지만 총 전하량은 양수인" 그런 전하 분포부터 해결하는 거죠.

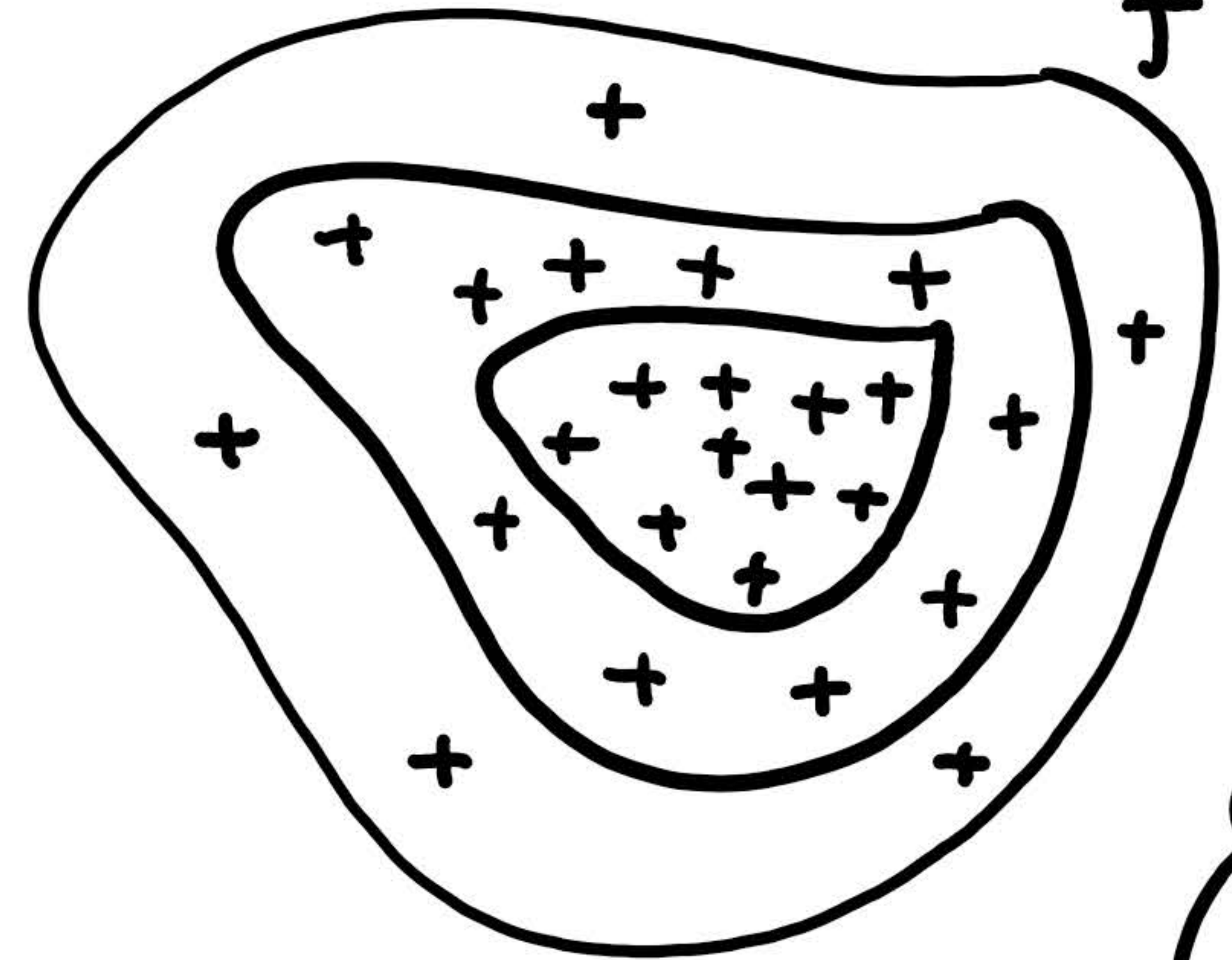
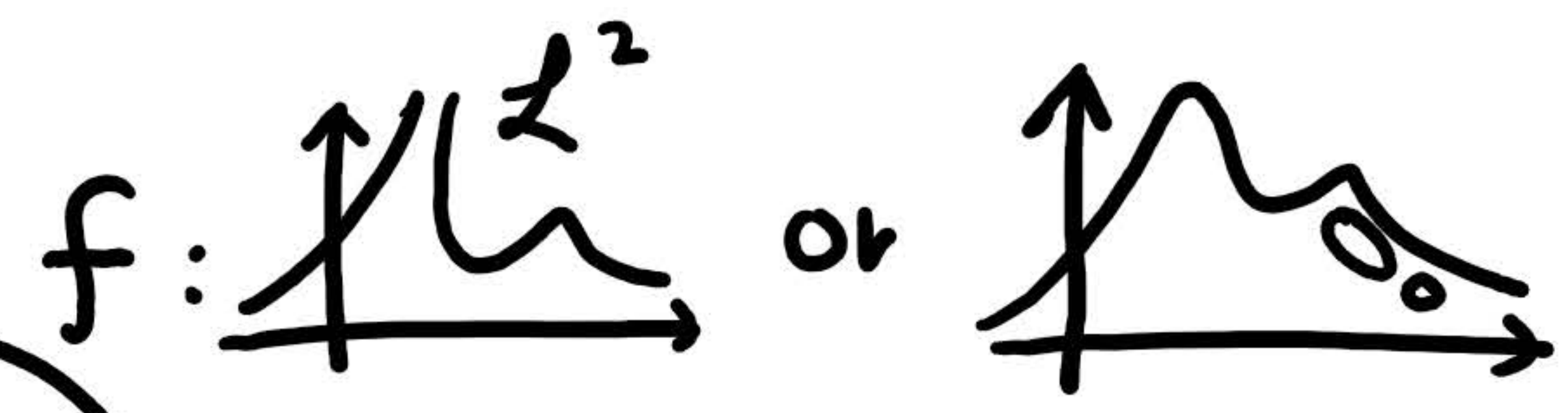


$$\nabla^2 u(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{a})$$

아니 재는 제대로 된 함수도 아닌데 어떻게 이게 미분을 저걸로 만들어요;;

마! 어떻게든 해보란 말야!

저 "알 수 없는 계산"과 함께, "알 수 없는 분해" 및 "알 수 없는 통합 과정"을 거치면 임의의 함수  $f$ 가 분포로 주어졌어도 할 만하다는 게 전략인데요, 음...



$$f(x) = \int f(\alpha) \delta(x-\alpha) d\alpha$$

$$\vec{\nabla}^2 F = \delta$$



너의 의미는?

나도 모르고 아무도 모름

$$V = \int F(x-\alpha) f(\alpha) d\alpha$$

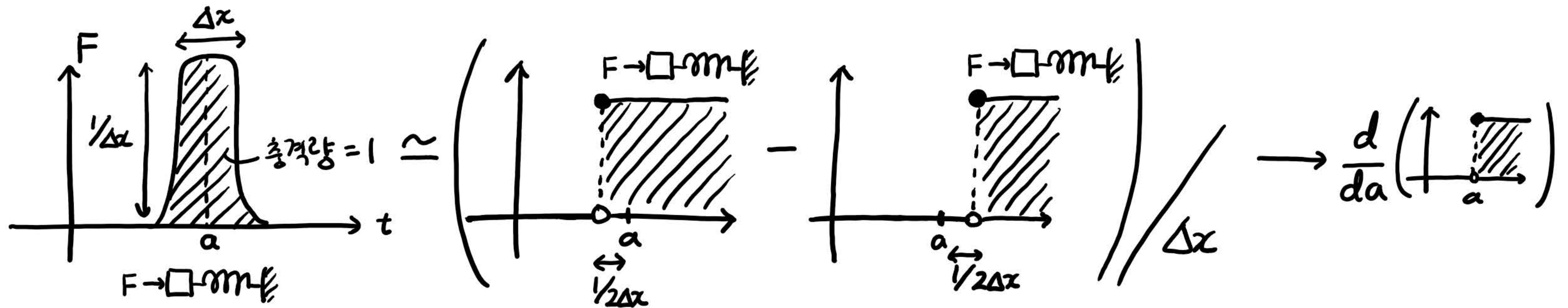
$$F = \square$$

정말 혼돈 그 자체군요!

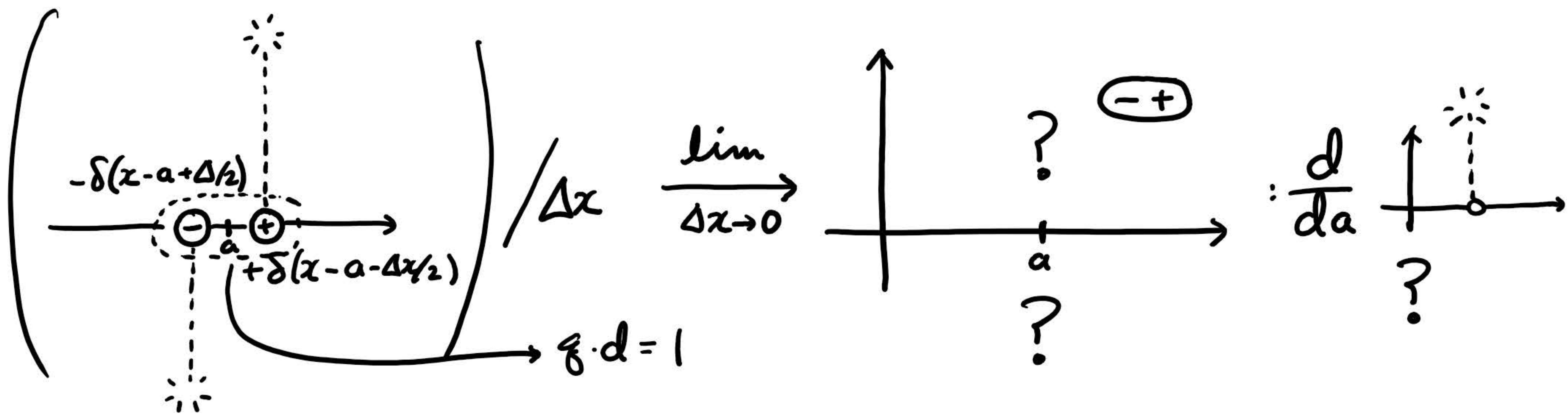
- "함수가 아닌 무언가"의...
- 푸리에 변환
  - 미분, 적분
  - 기타등등



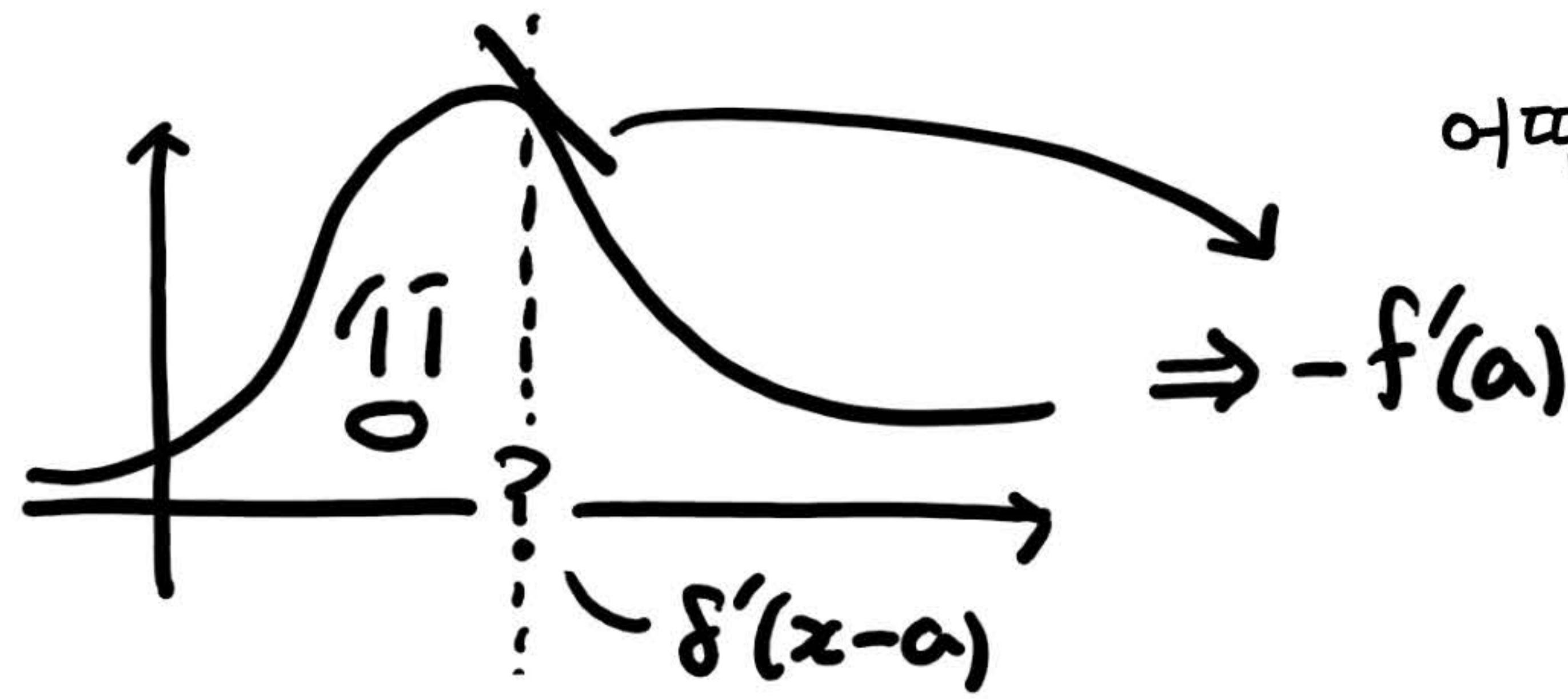
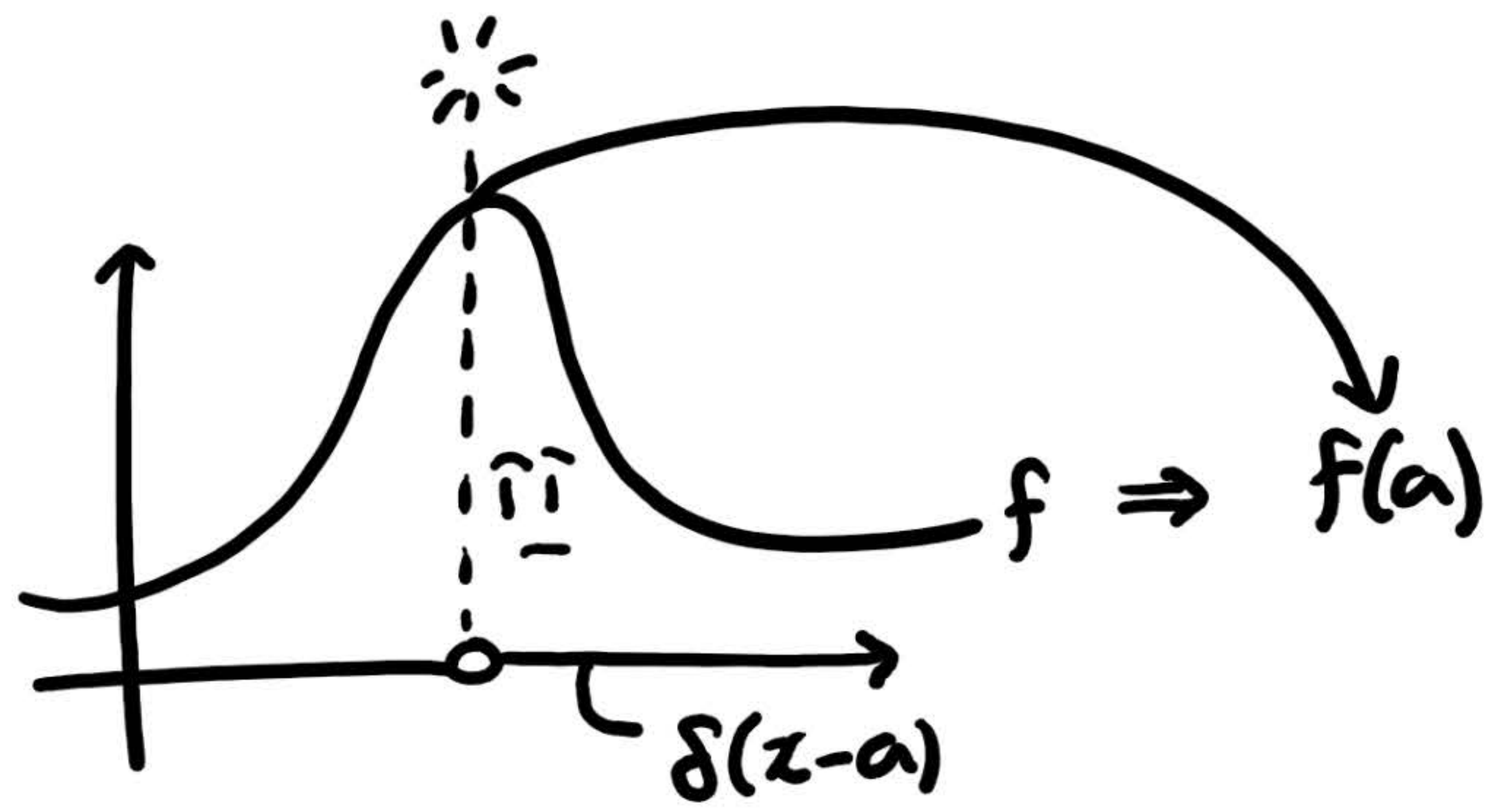
근데 이 이상한 걸 디랙은 또 곧잘 해냅니다. 디랙 델타라는 녀석 자체가...



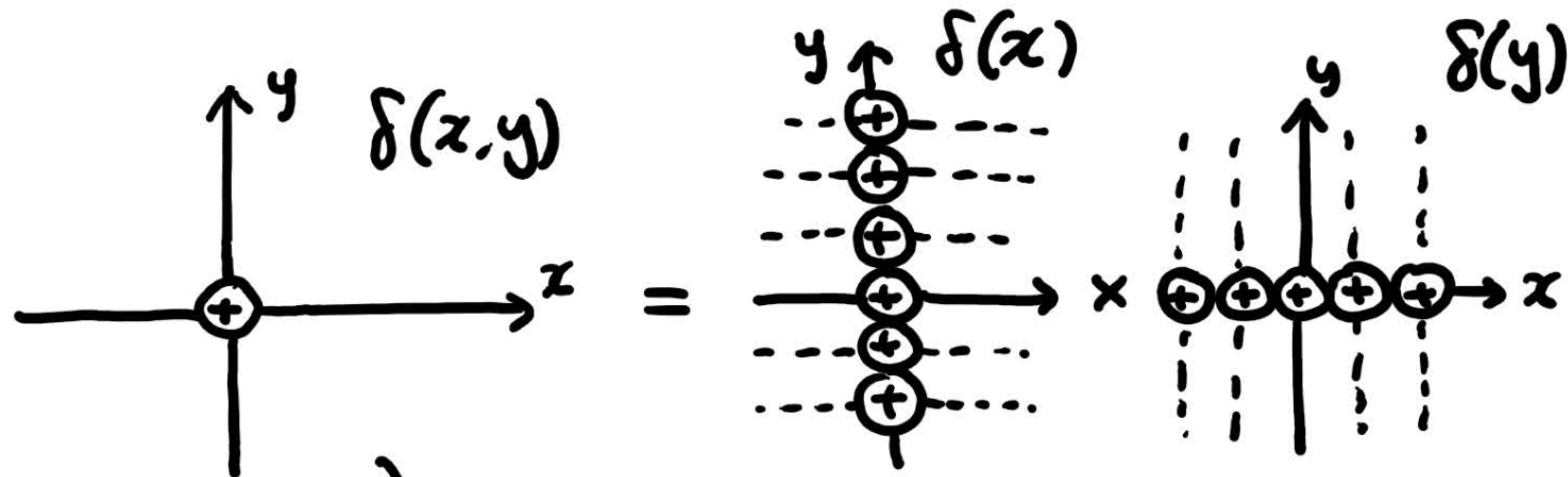
이렇듯 헤비사이드 함수라는 미분 불가능한 함수의 "알 수 없는" 미분이고,



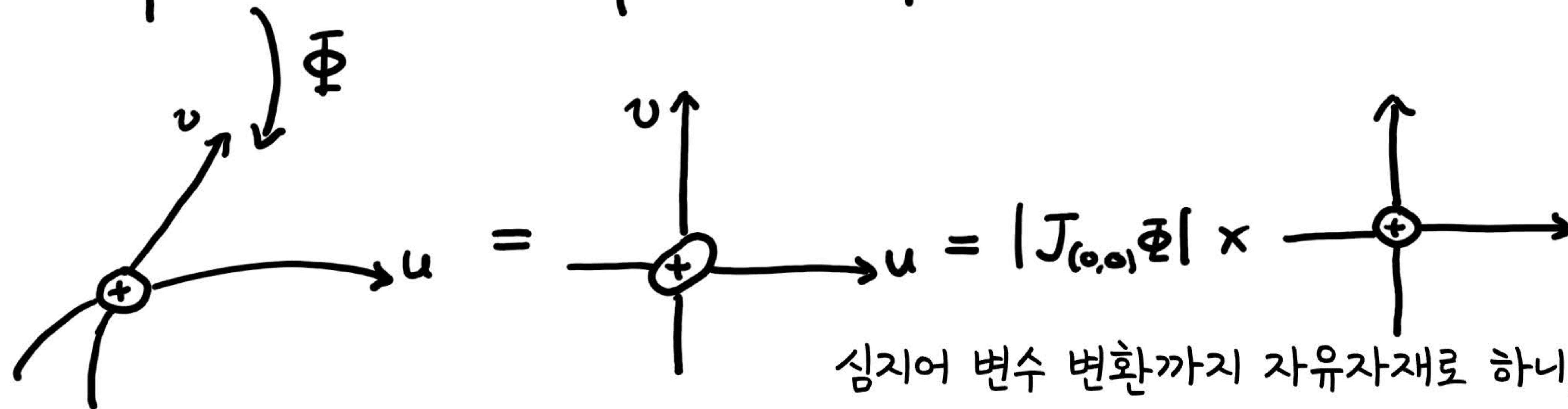
디랙 델타의 미분도 해내네요. 뭔가 쌍극자 비스무리한 거라고는 하는데, 도대체 그릴 수도 없는...



이 "이상한 미분"이 함수에는  
어떤 작용을 하는지도  
알아냈고,



차원이 높아져도 더 낮은 차원의  
"이상한 녀석"들로 분해도 곤잘 하고,



심지어 변수 변환까지 자유자재로 하니, 어떻게 사람들이  
"디랙의 기묘한 개념"을 안 사용하겠어요?

당연히, 수학자들은 이런 "마법 상자"를 그대로 놔둘 수는 없었습니다.

어떻게든 수학적 개념으로 만들려고 했지만,

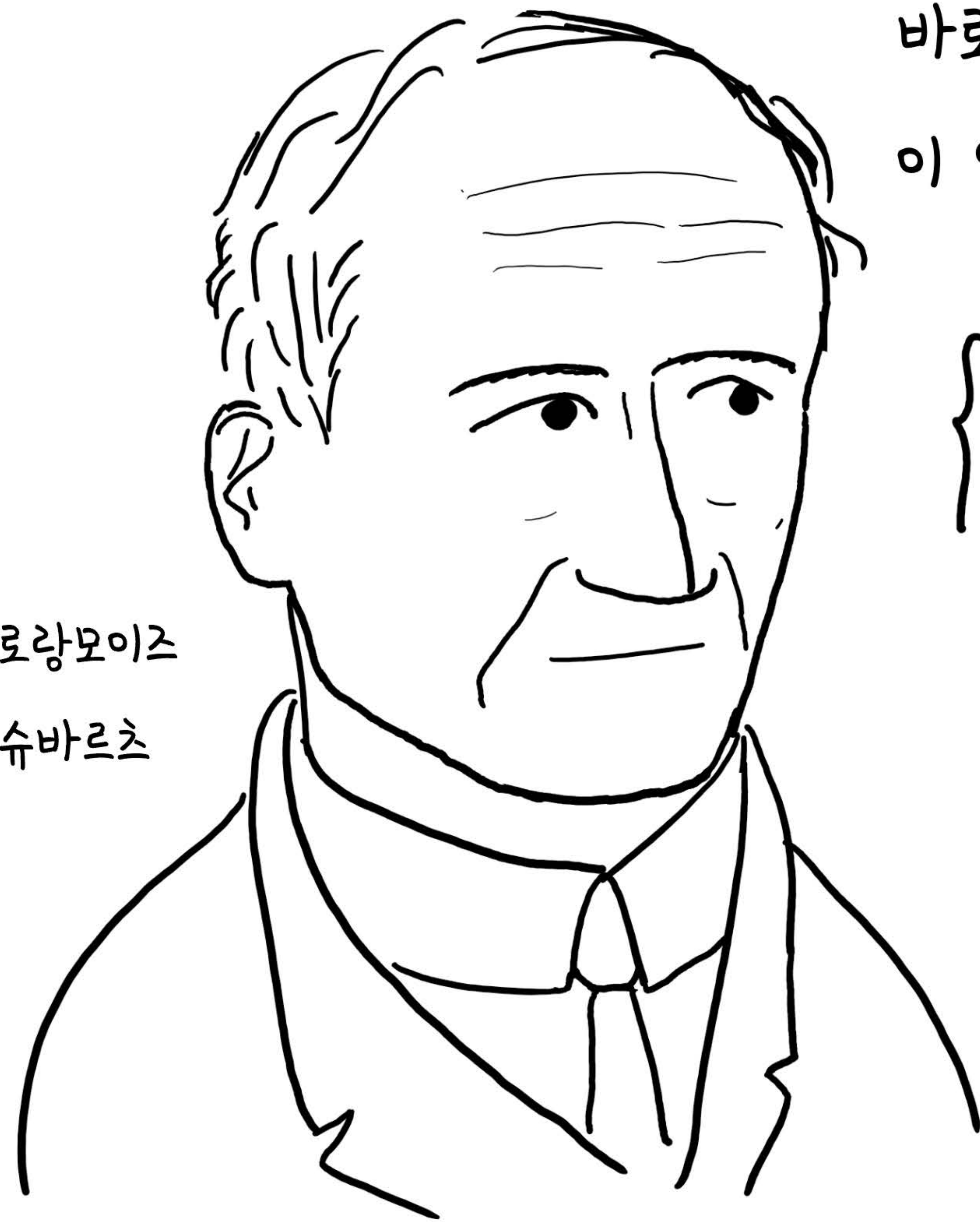


자크 살로몽  
아다마르

우리가 뭔가 좀 시도해보고 있는데  
잘 안되네 ㅠㅠ 하 분명 좋은  
이론이 있을 텐데...

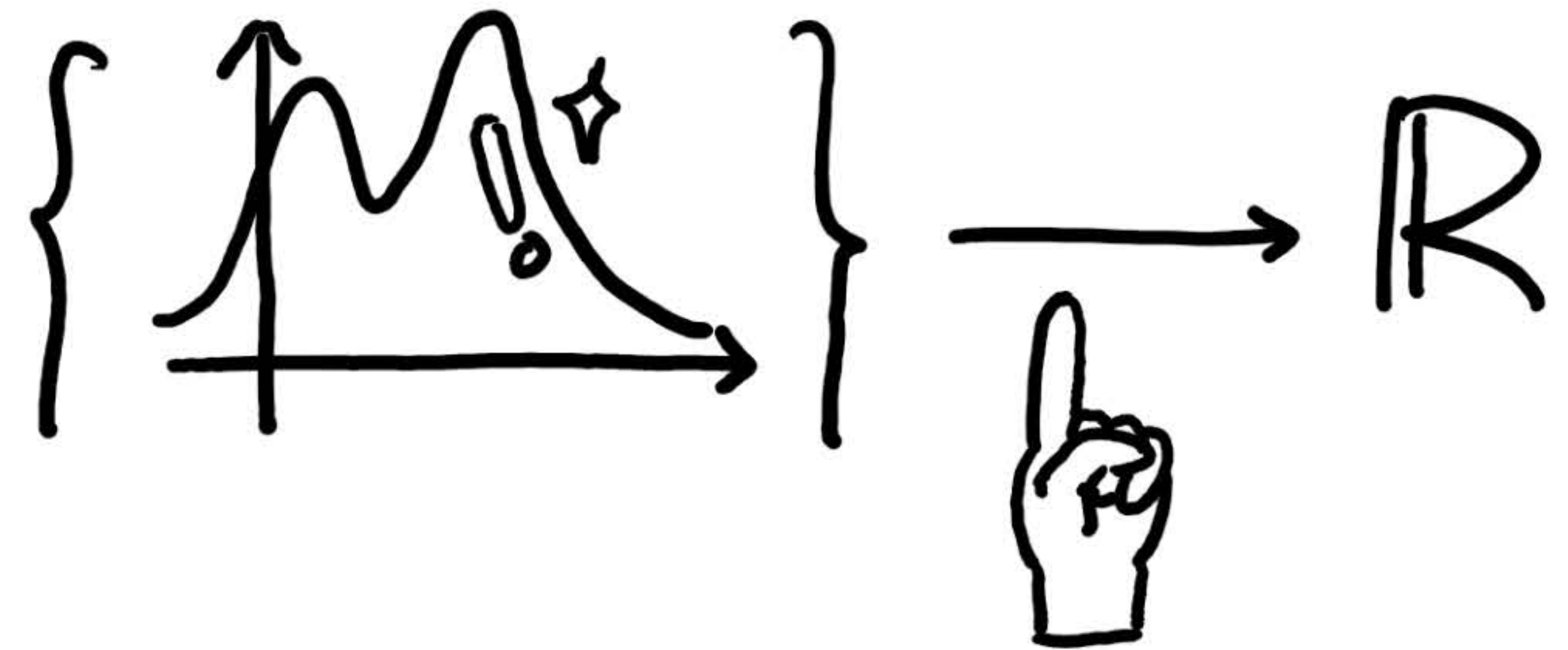
세르게이  
리보비치  
소볼레프

그렇게 쉽지는 않았던 것 같아요. 결국 이 일을 해낸 사람은...



로랑모이즈  
슈바르츠

바로 로랑 슈바르츠라는 사람입니다.  
이 업적으로 1950년에 필즈상을 받았죠.



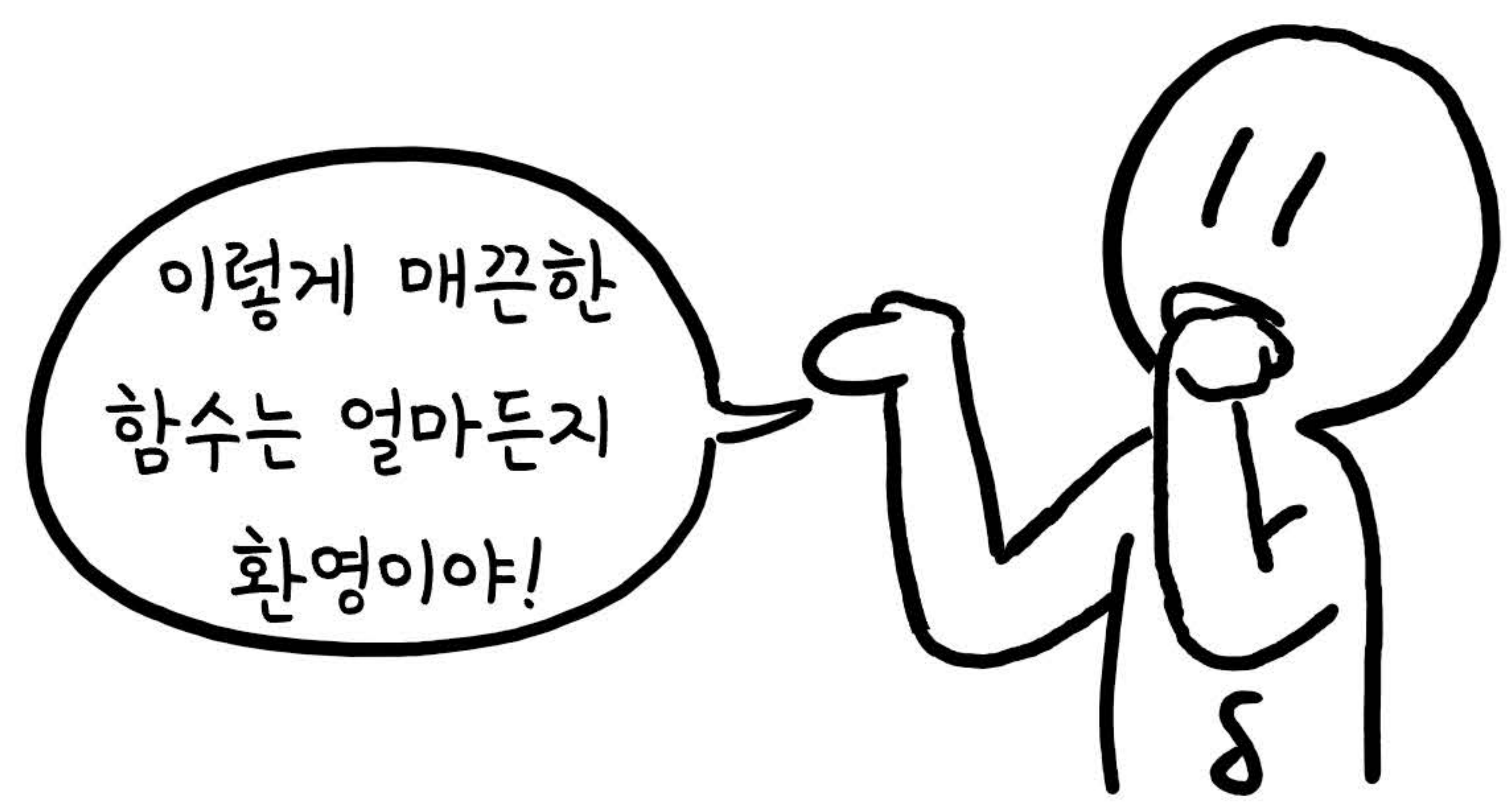
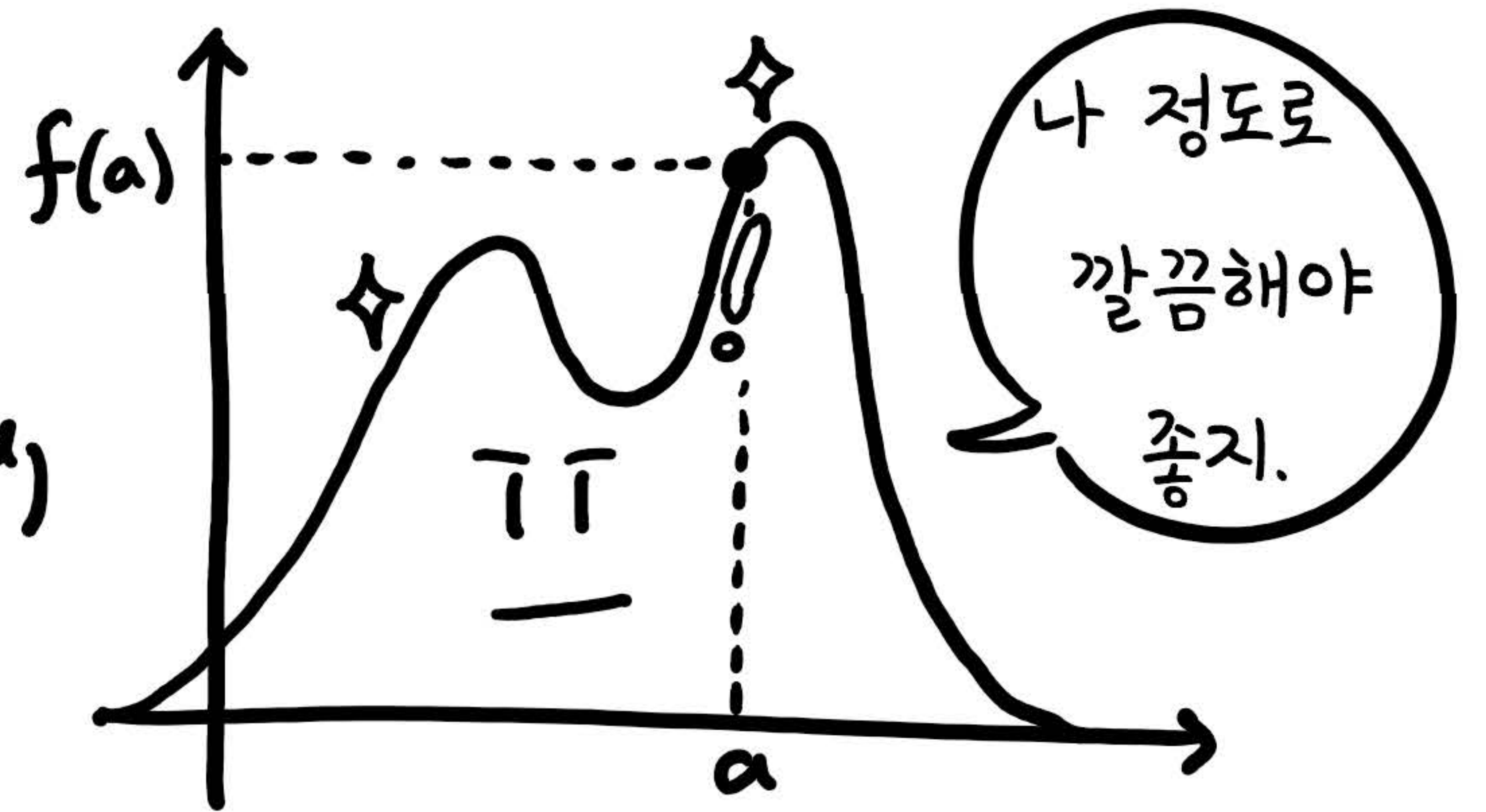
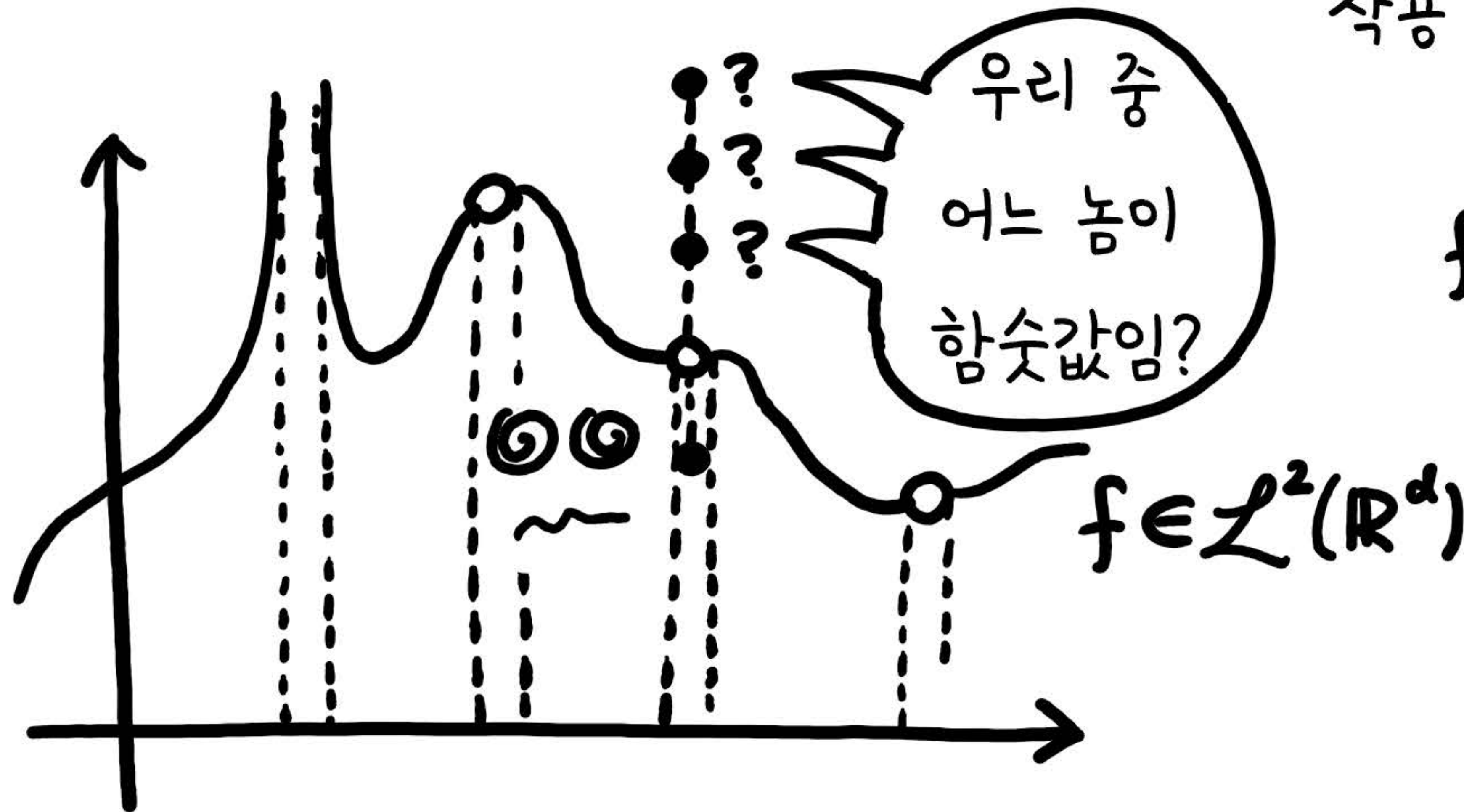
# Distribution

디랙이 처음 디랙 델타를 제안한 게 1926년,  
슈바르츠가 디랙 델타 개념을 배운 게 1935년  
이었는데, 15년간의 연구 끝에 <Théorie des  
distributions>이라는 책을 1950년에 냅니다.

그럼 슈바르츠의 이론을 따라 "디랙 델타 무언가"를 파악해 봅시다.

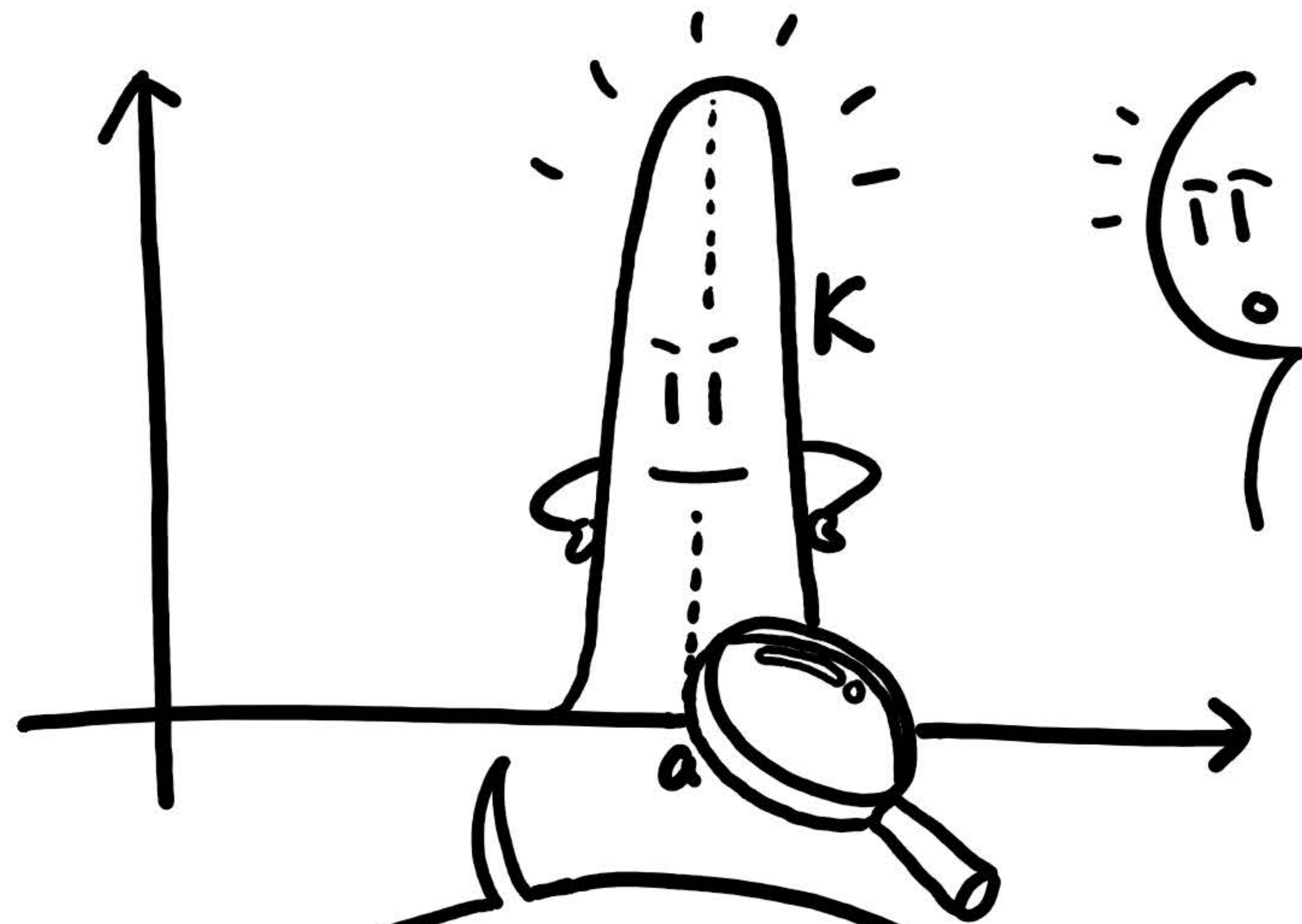
먼저, 특정 위치에서의 "함숫값"을 읽는다는 건, 함수값이 정의라도 되는 함수에나 의미가 있겠죠.

작용 대상 범위부터 가다듬을 필요가 있겠네요.



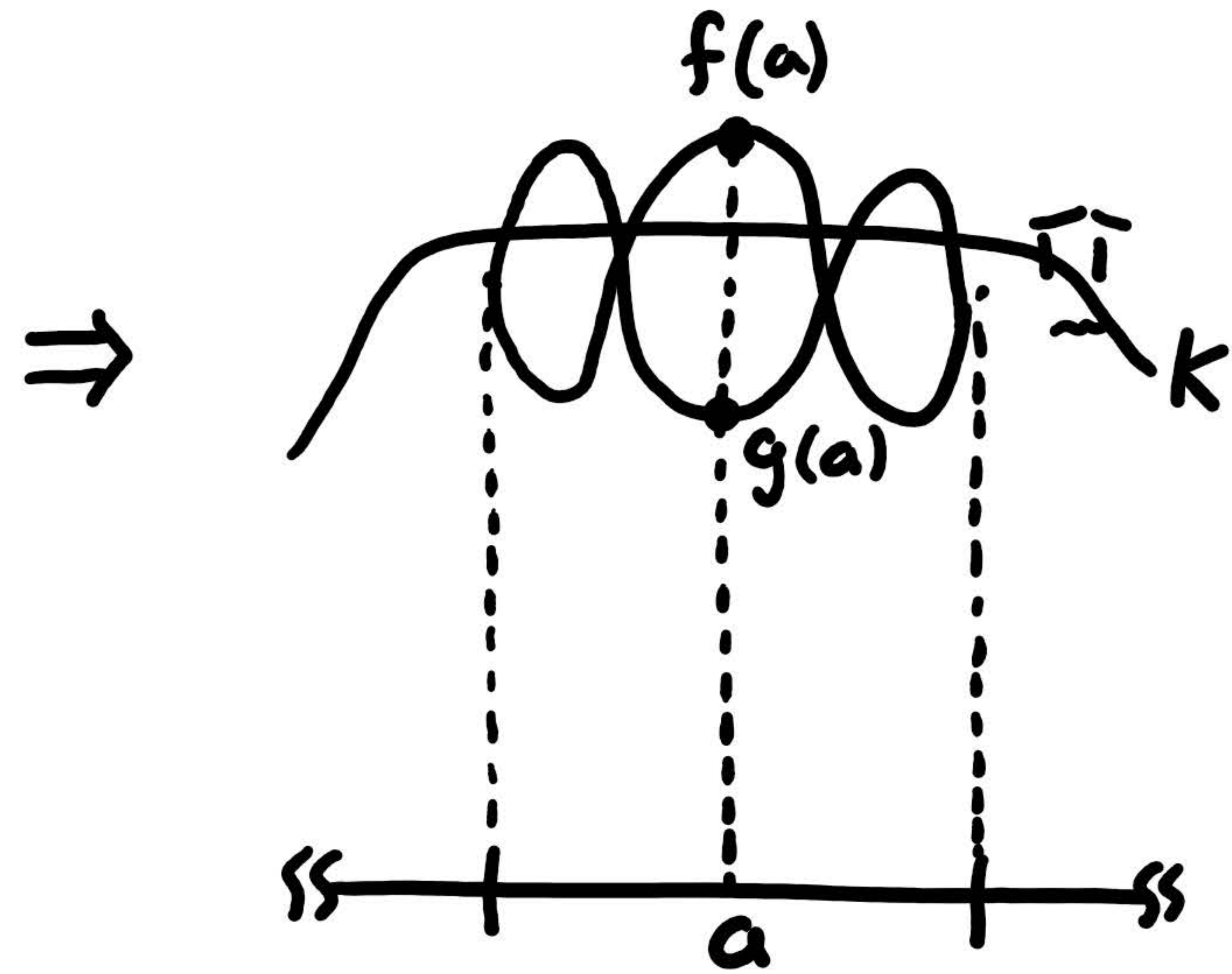
그러니 우리는 디랙 델타 같은 녀석을 "매끈한 함수"에 곱해서 적분값을 주는 녀석으로 생각할 거예요.

하지만 이미 살펴봤다시피, 이런 역할은 일반적인 함수는 할 수 없어요.



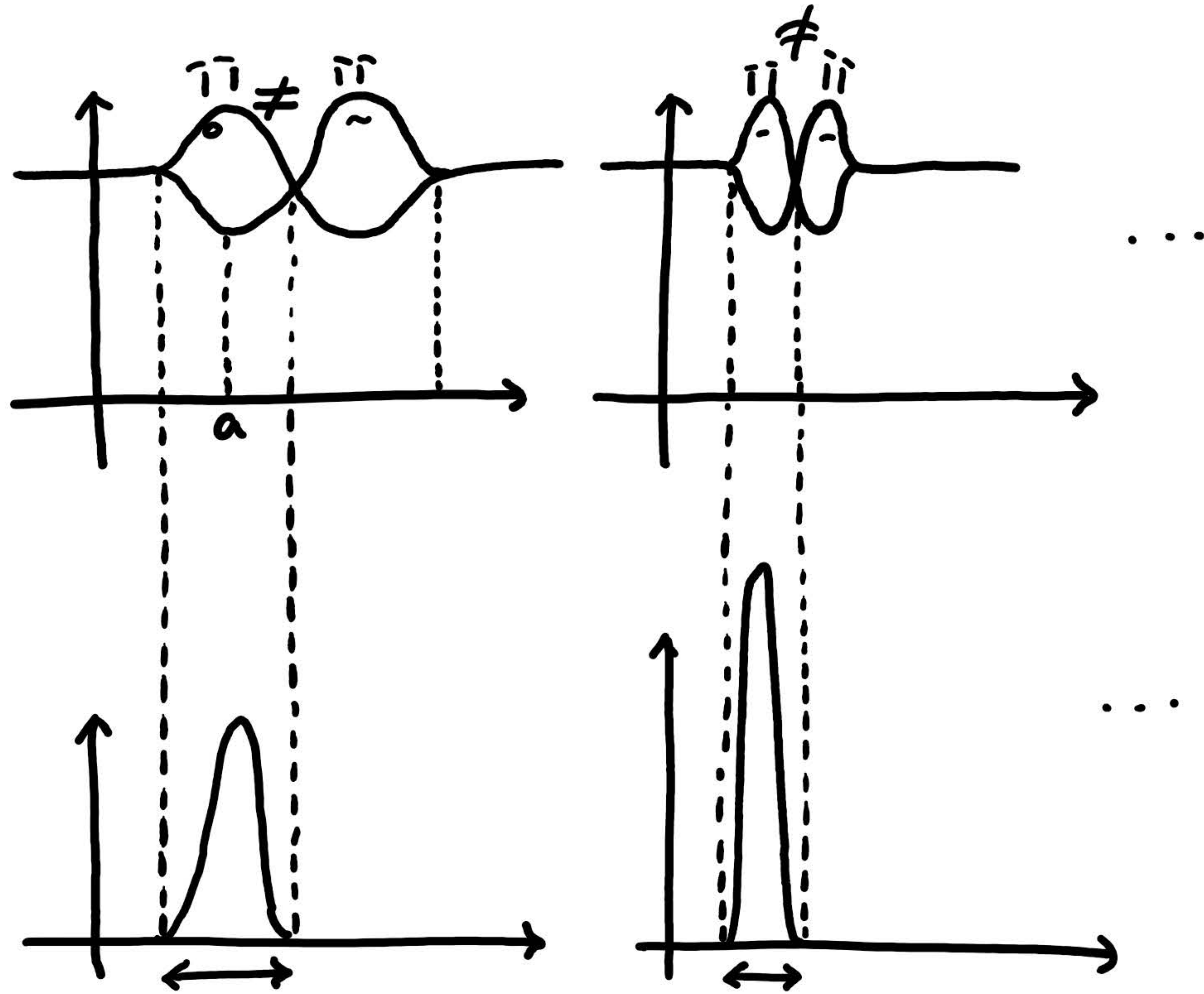
이 정도면  $a$  함수값을 읽어낼 수 있겠지?

제 아무리  $a$  근처에 모여 있는 함수를 가져온대도,

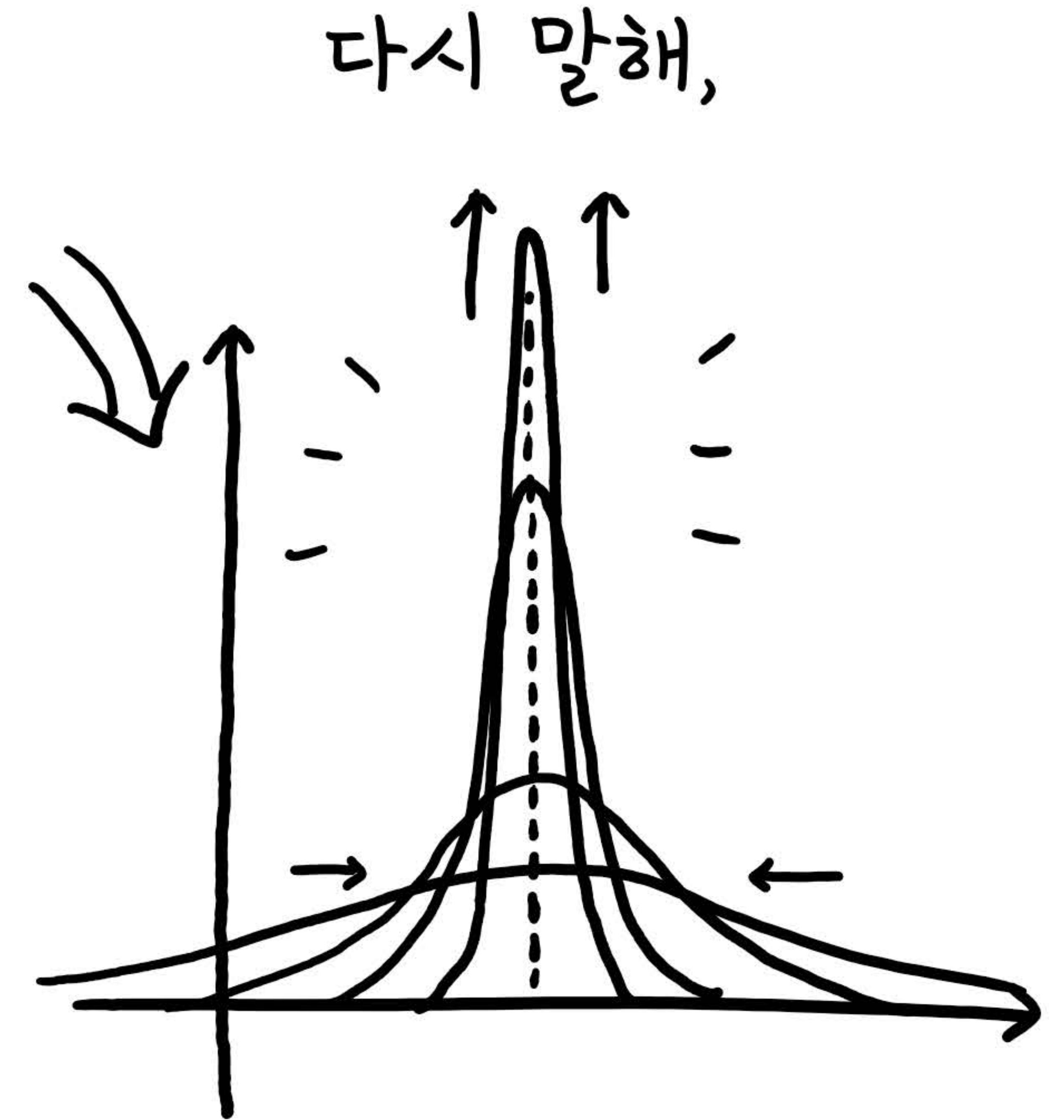


$f(a)$ ,  $g(a)$ 가 다르면서 똑같은 적분값 결과를 가지는  $f$ ,  $g$ 는 매끈한 함수 중에서도 찾을 수 있거든요.

그러니,  $a$  주위에서의 미세한 차이도 잡아내려면 폭을 점점 좁혀야겠죠.



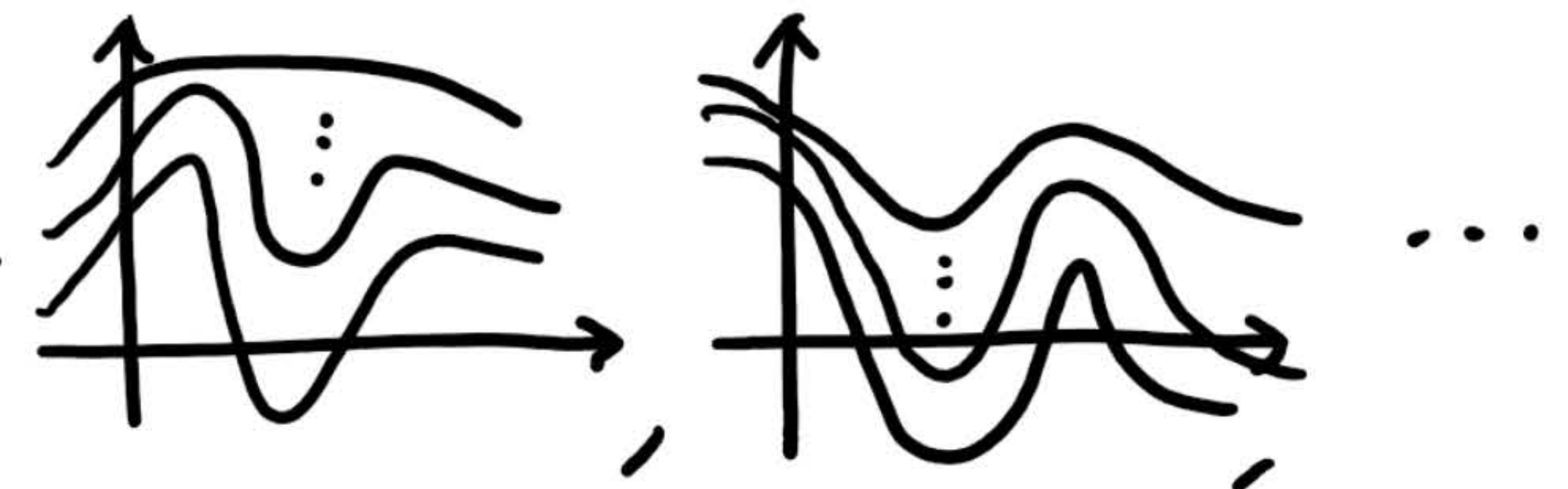
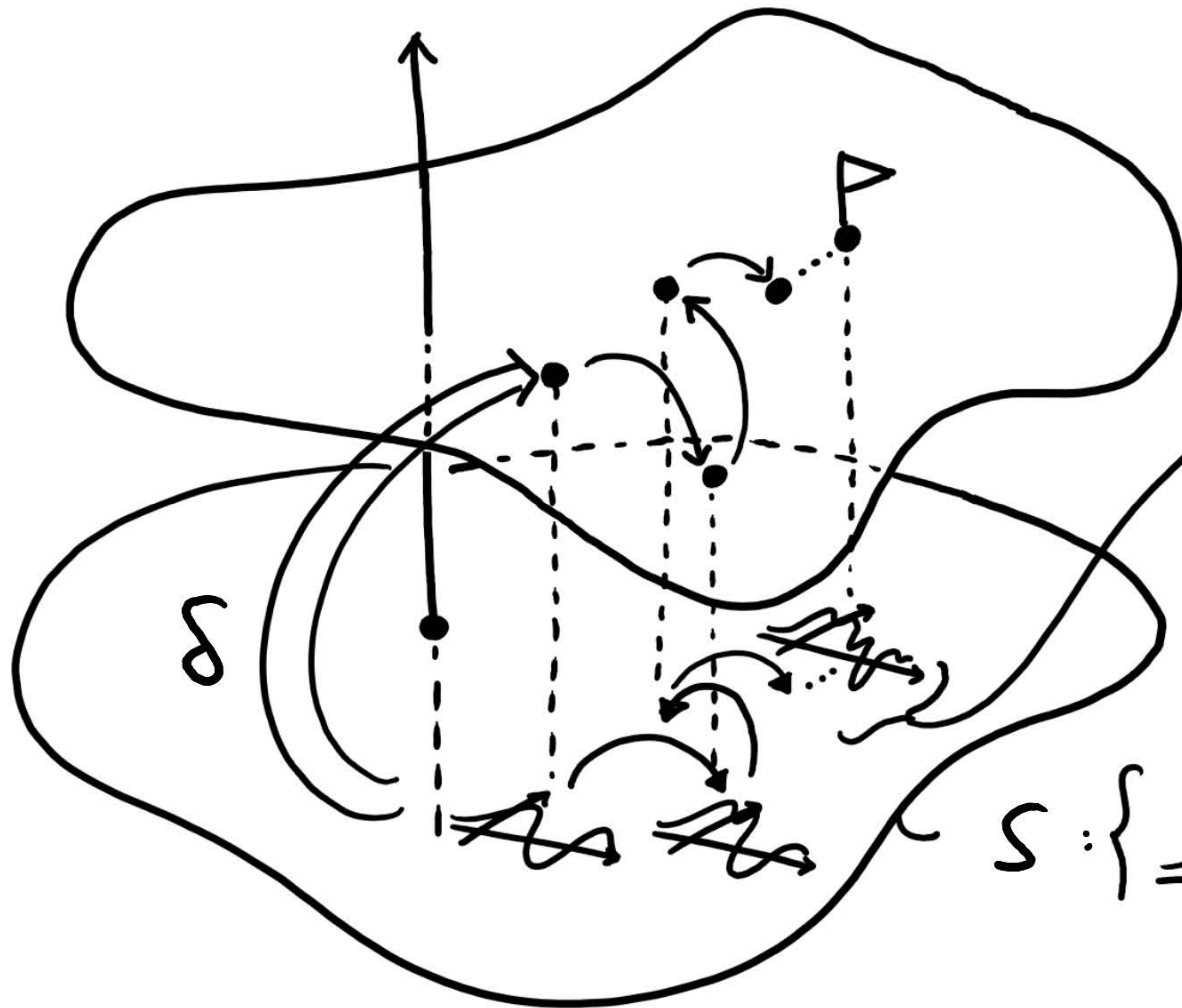
한 함수가 해내지 못하는 일을,  
함수를 계속 바꿔나가면 할 수 있어요.



매끈한 함수에 작용하는 함수의 작용뿐  
아니라, 그러한 작용의 극한도 고려하면  
디랙 델타를 생각할 수 있는 거예요.

여기서 정말 중요한 건 이거예요. 일반적인 함수든 디랙 델타든, 각  $x$ 에서 값을 가지는 함수처럼 보는 것이 아니라,

입력값 함수를 받아서 실수값을 내놓는 "함수의 함수"로서 보는 관점 말이에요.



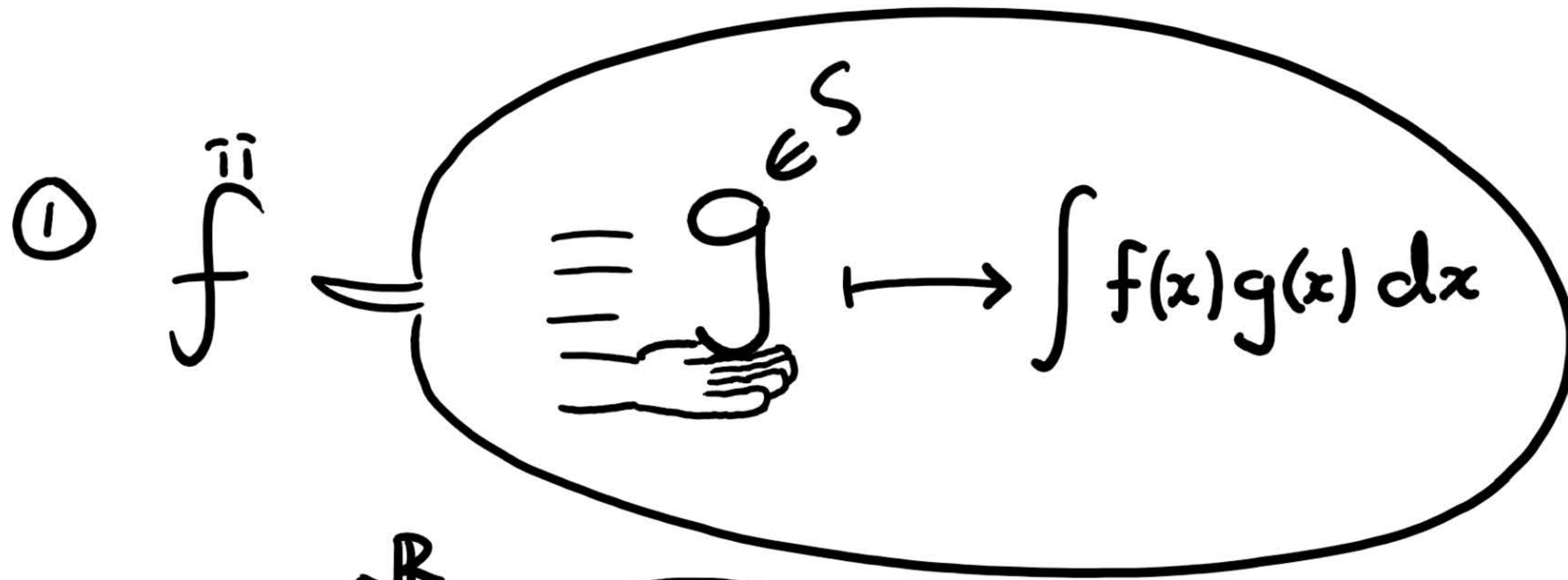
특히, 입력값에 대해 "선형"이고, 어떤 의미에서 "연속"하기까지 한 녀석이에요.

$$S : \left\{ \begin{array}{c} \text{graph} \end{array} \right\}$$

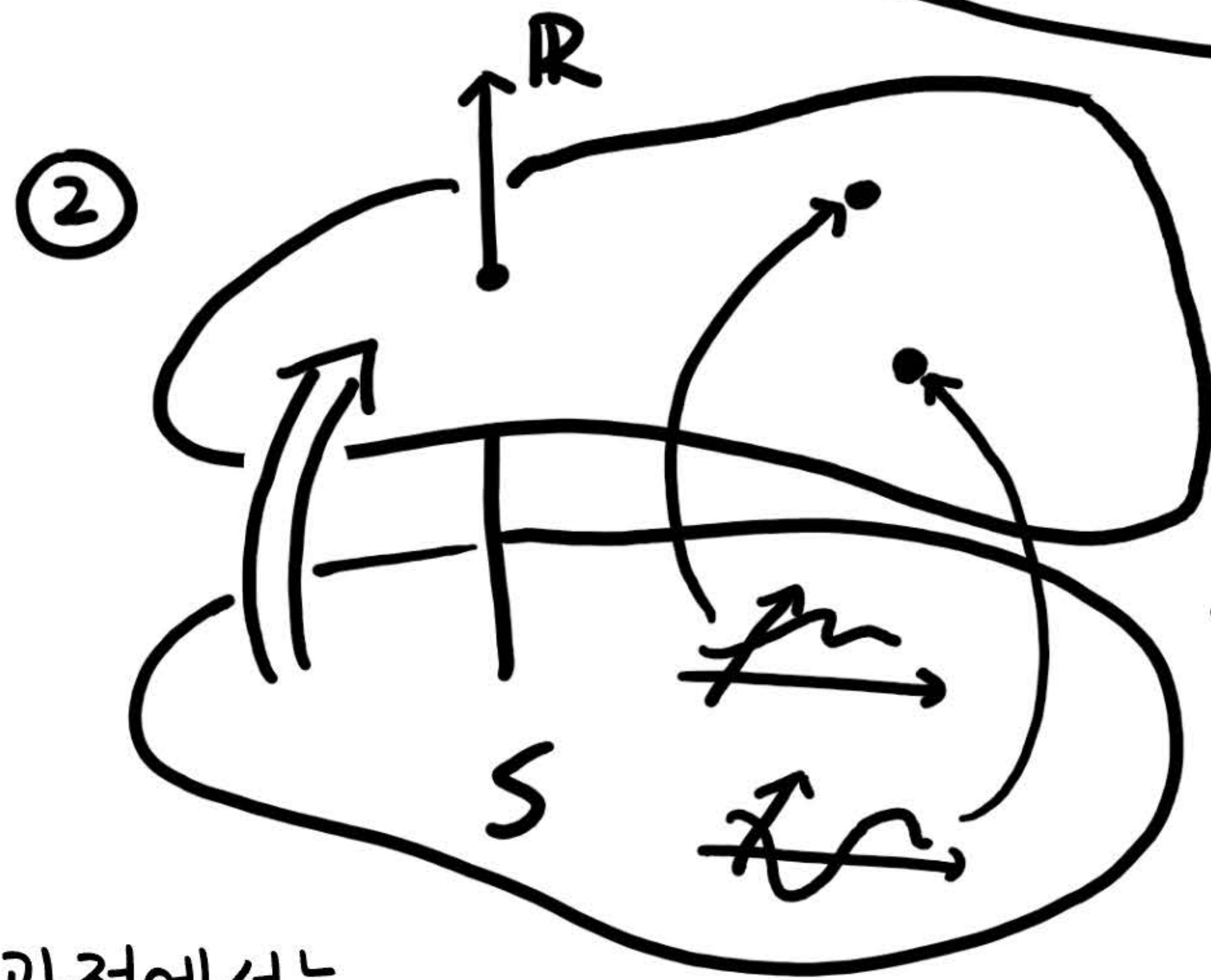
이런 "함수의 함수"를 초함수라고 부르고, 여기서 입력값 역할을 하는 함수는 테스트 함수라고 부릅니다.



이제 대충 초함수가 정의된 세팅을 봤으니, 미분도 정의를 해야 하는데...



흔히 미분할 수 있던 함수들도  
이제는 "함수의 함수" 관점에서  
봐야 하고,

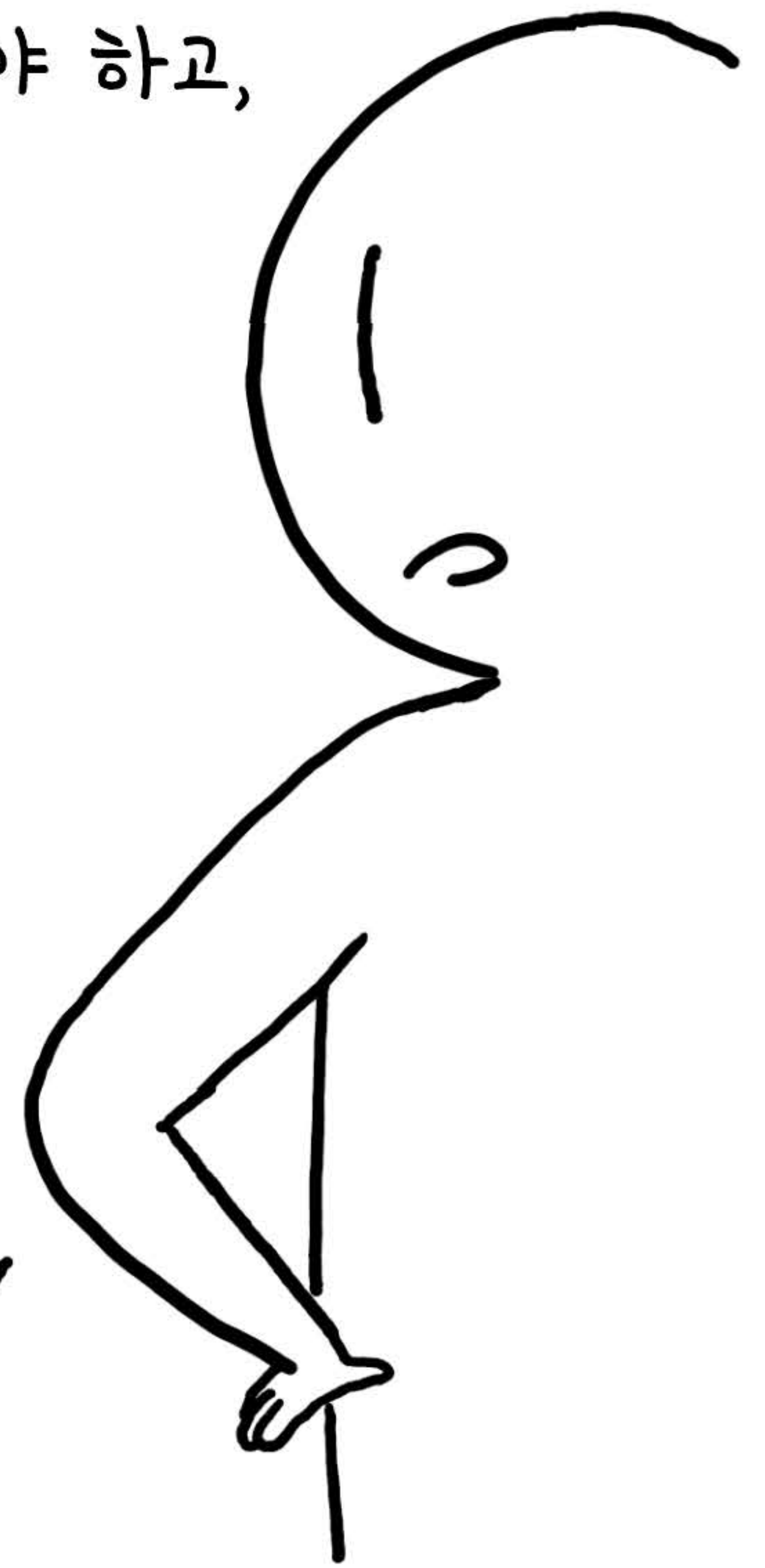


정의역에는 함수들만  
있지  $x$ 가 없어요...

이건 뭐 어떻게 해야  
한다냐... 미분할 변수가  
없는데 끔

이 관점에서는...

" $x$ "가 없는데 어떻게  $x$ 로 미분을 하죠 ㅋㅋ

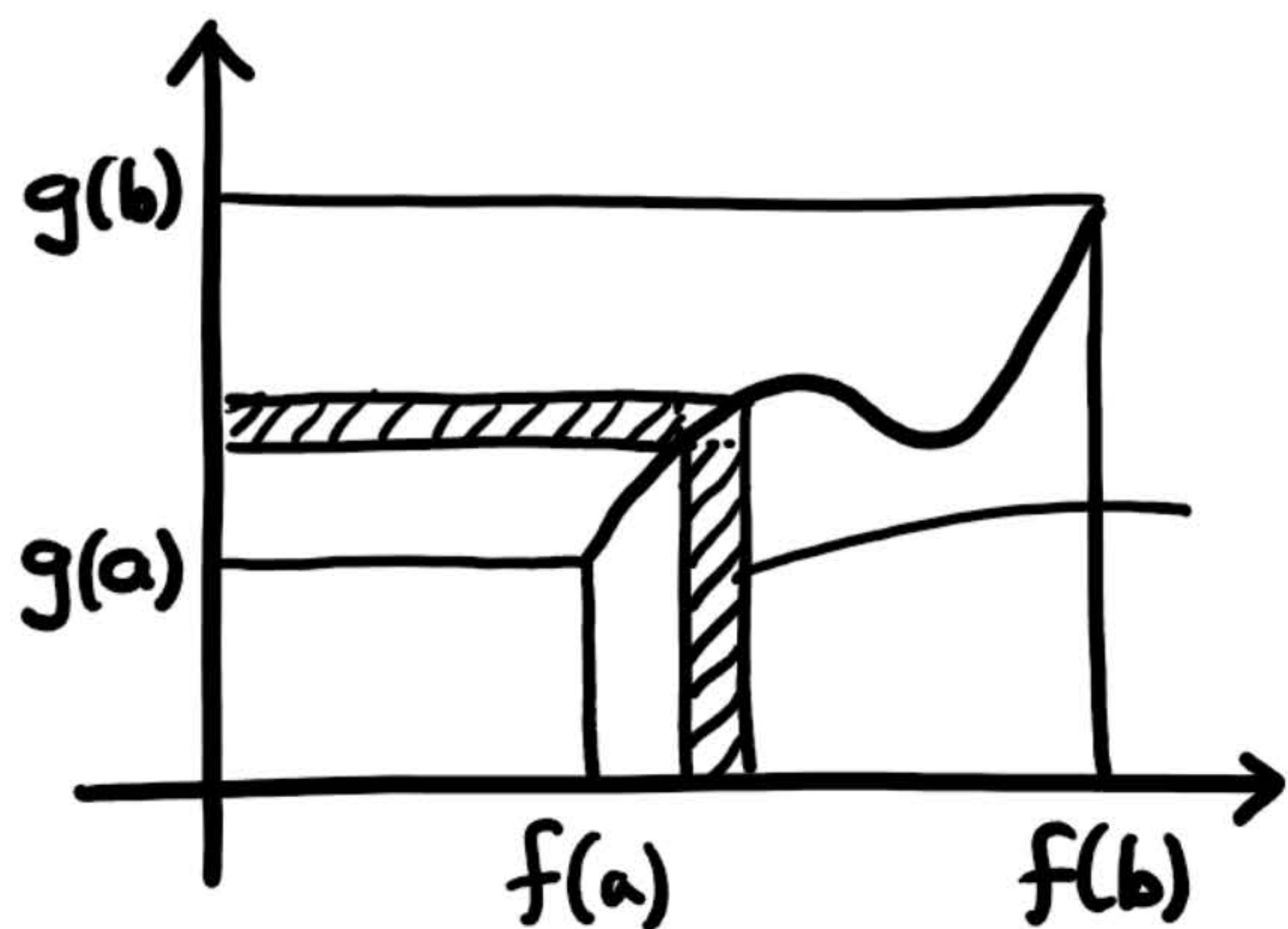


일단은 미분이 가능하더라도 한 함수들로부터 영감을 얻어야겠어요.



아, 저랑 f가 초함수로서 어떤 관계가 있냐구요? 그야 당연히... 부분적분 관계죠!

앗, 그렇네요! 아래와 같이 생각해 보면, "f에 미분을 취하지 않고도" f'가 함수 용에 어떻게 작용하는지 알 수 있어요.



$$\int f'g = -\int fg' + [fg]_{-\infty}^{\infty}$$

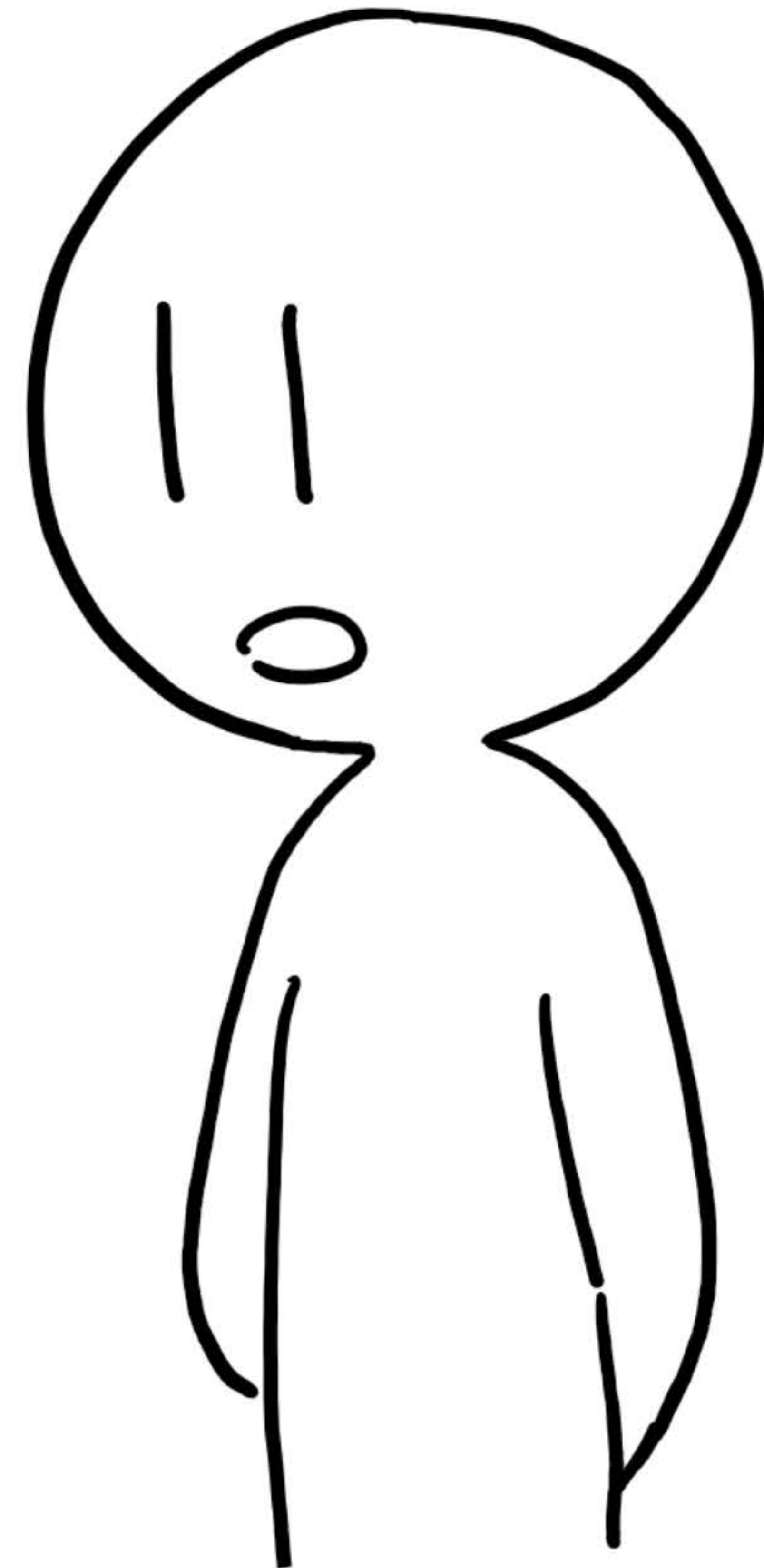
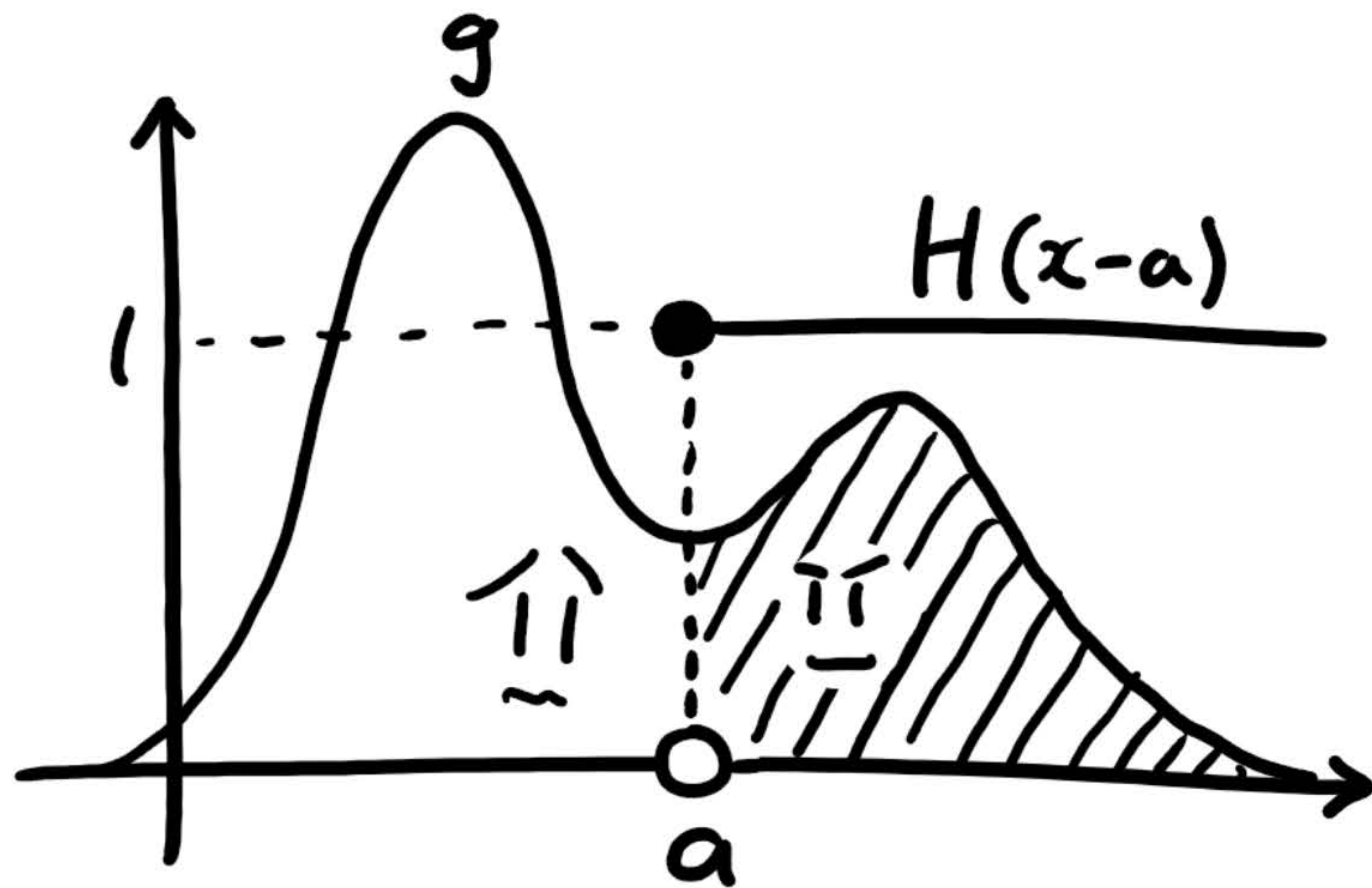
:  $fg' + g'f$



여기서 f 자신 혹은 입력 함수 용이 무한대에서 죽으면 이런 등식을 얻죠.

그러니 이것 훑내내서, 일반적인 초함수의 미분도 정의할 수 있지 않을까 싶죠.

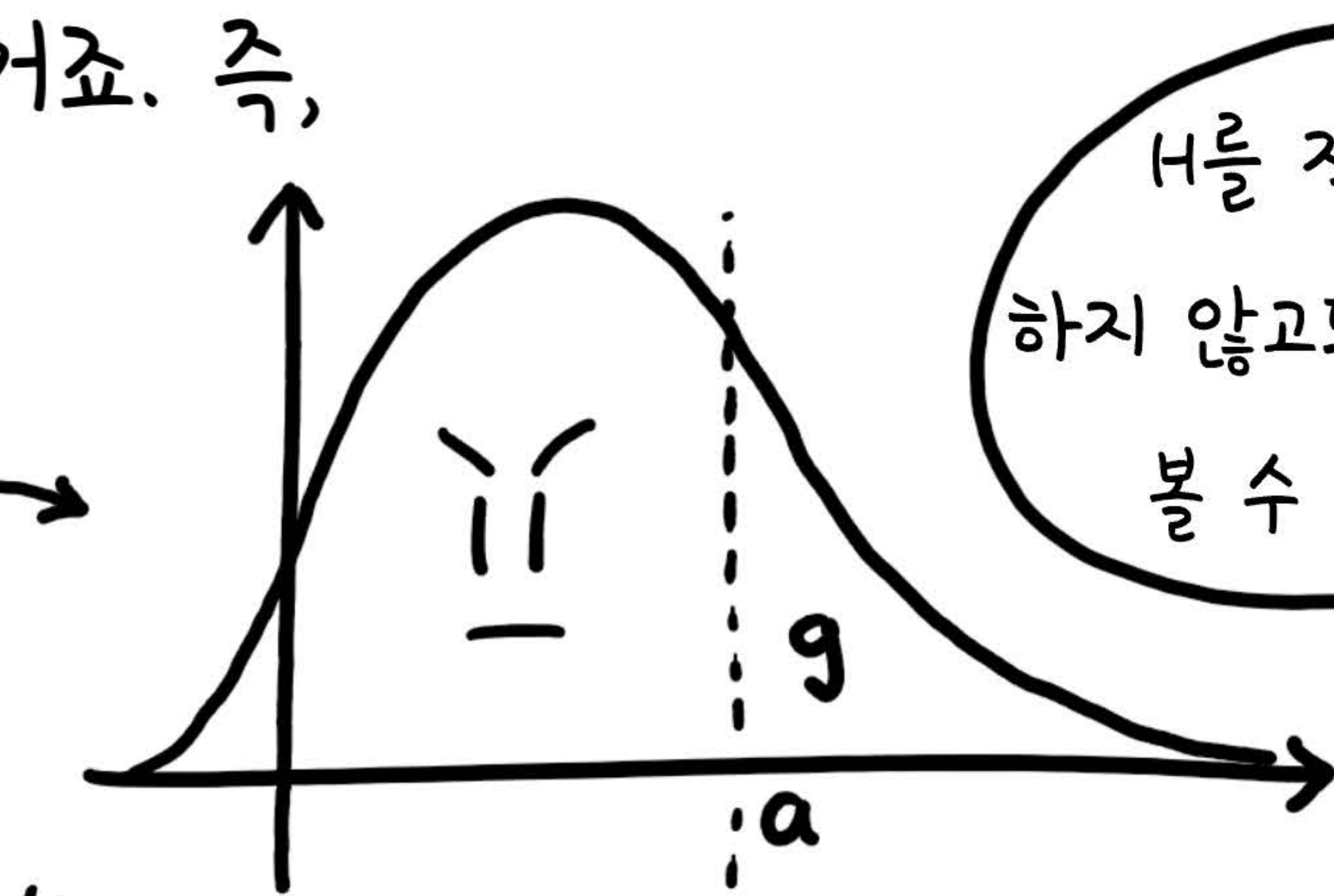
예를 들어, 원래라면 미분이 불가능한 함수인 헤비사이드 함수를 이 방식으로 미분해 봅시다.



방금 본 것처럼 부분적분을 이용해, 초함수 대신 테스트 함수에 미분을 취해 초함수에 집어넣는 거죠. 즉,

$$\frac{d}{dx}[H(x-a)] \rightarrow$$

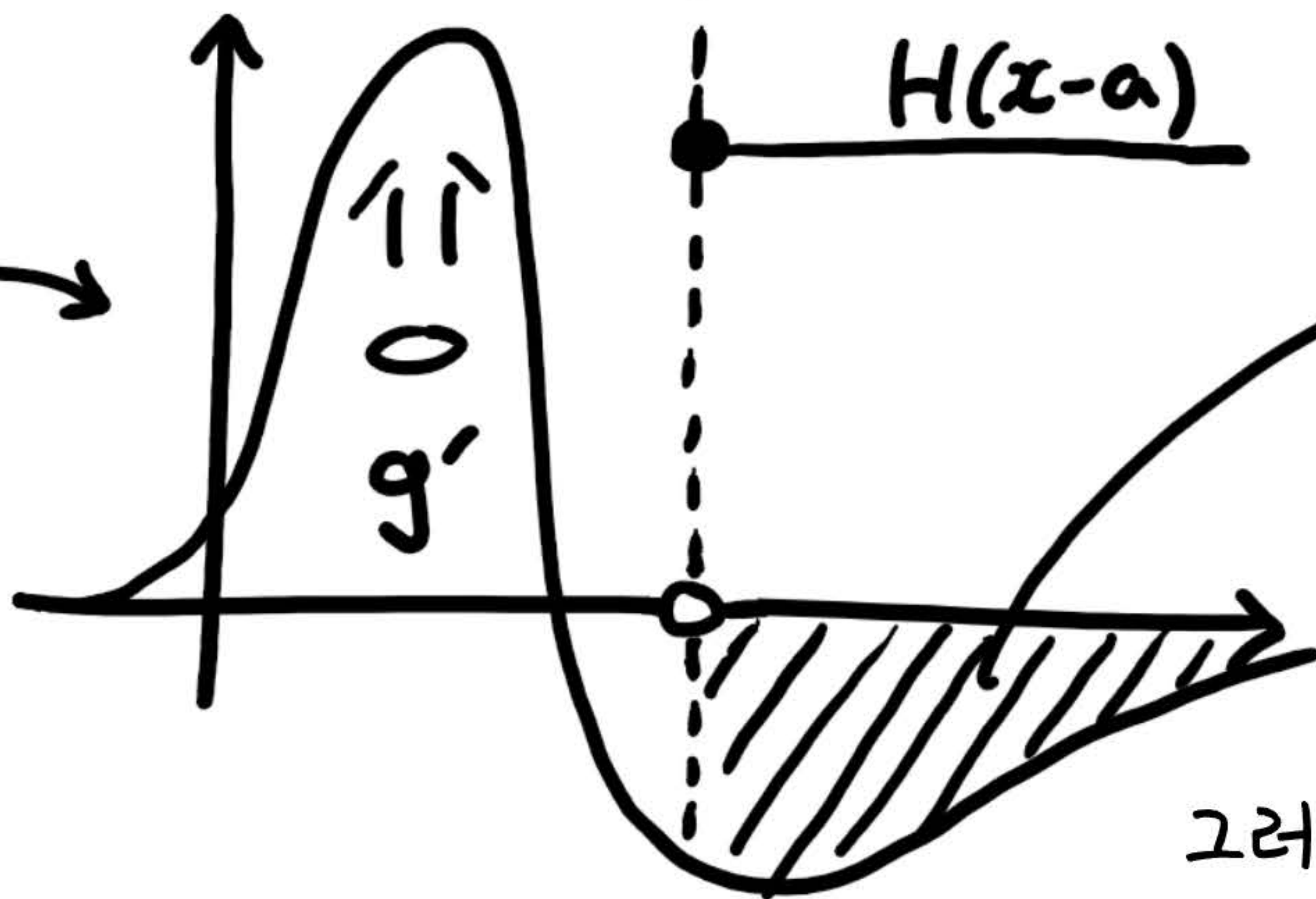
이렇게 "표기한" 초함수는,



||

$$H(x-a) \rightarrow$$

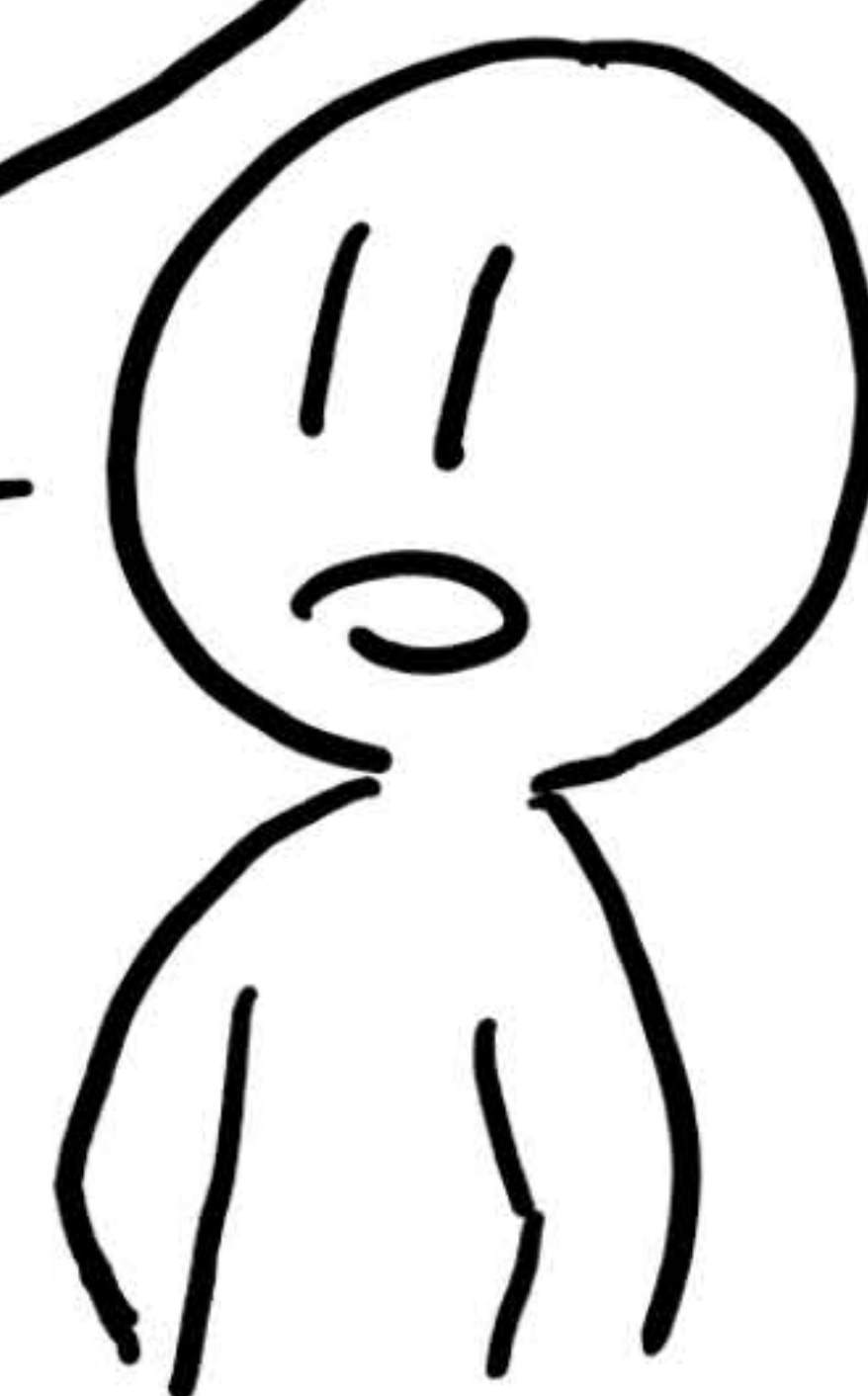
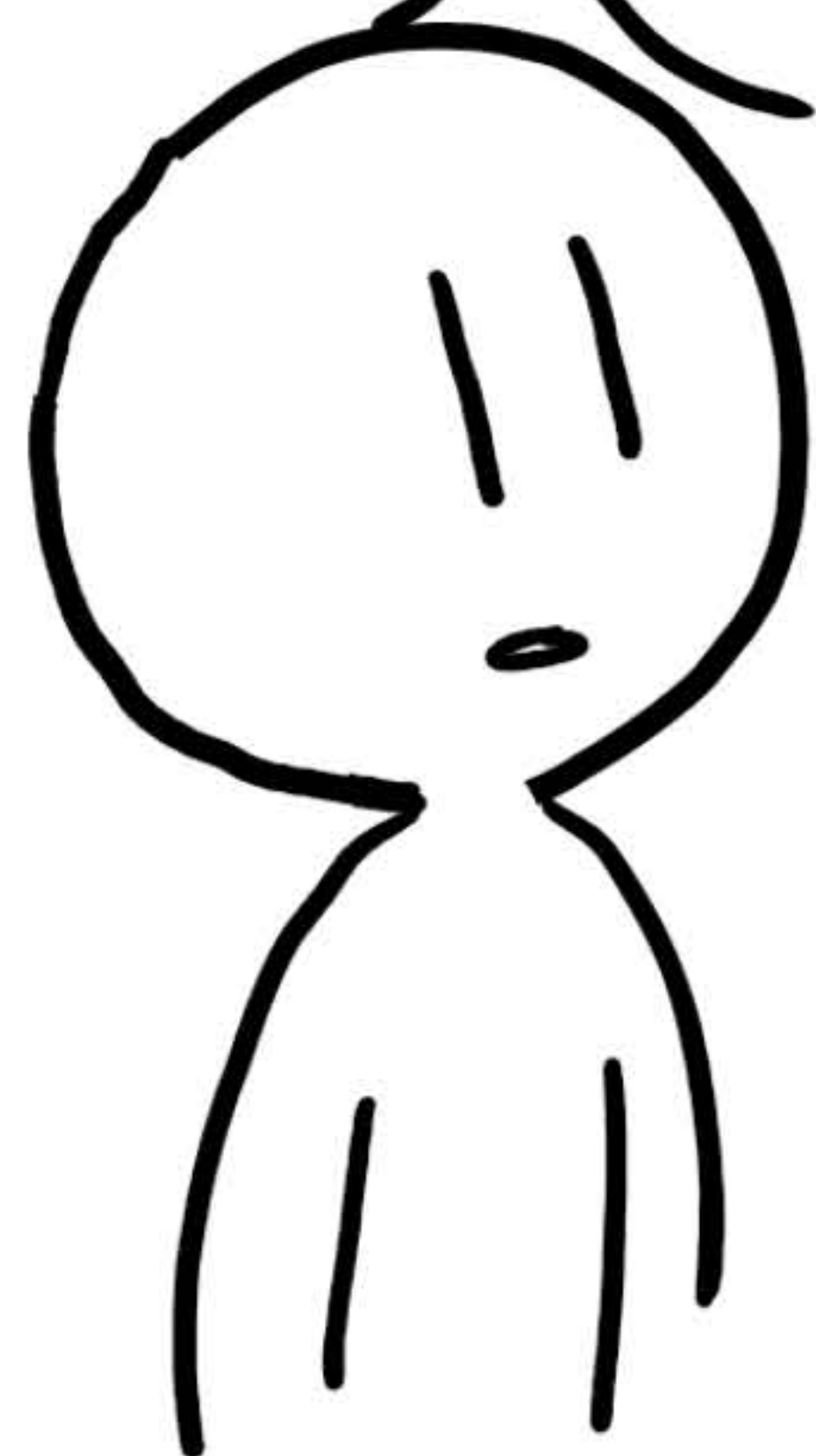
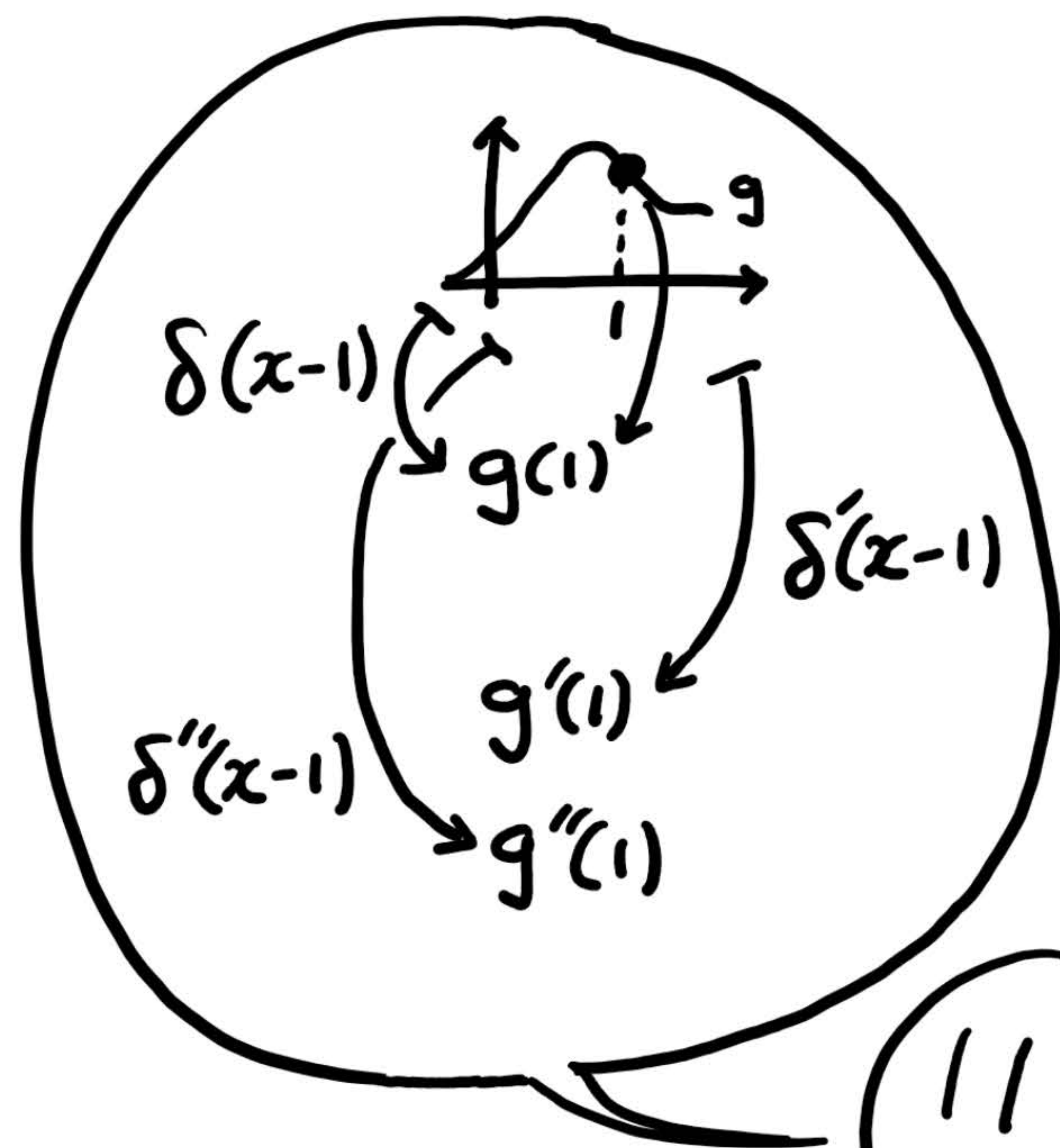
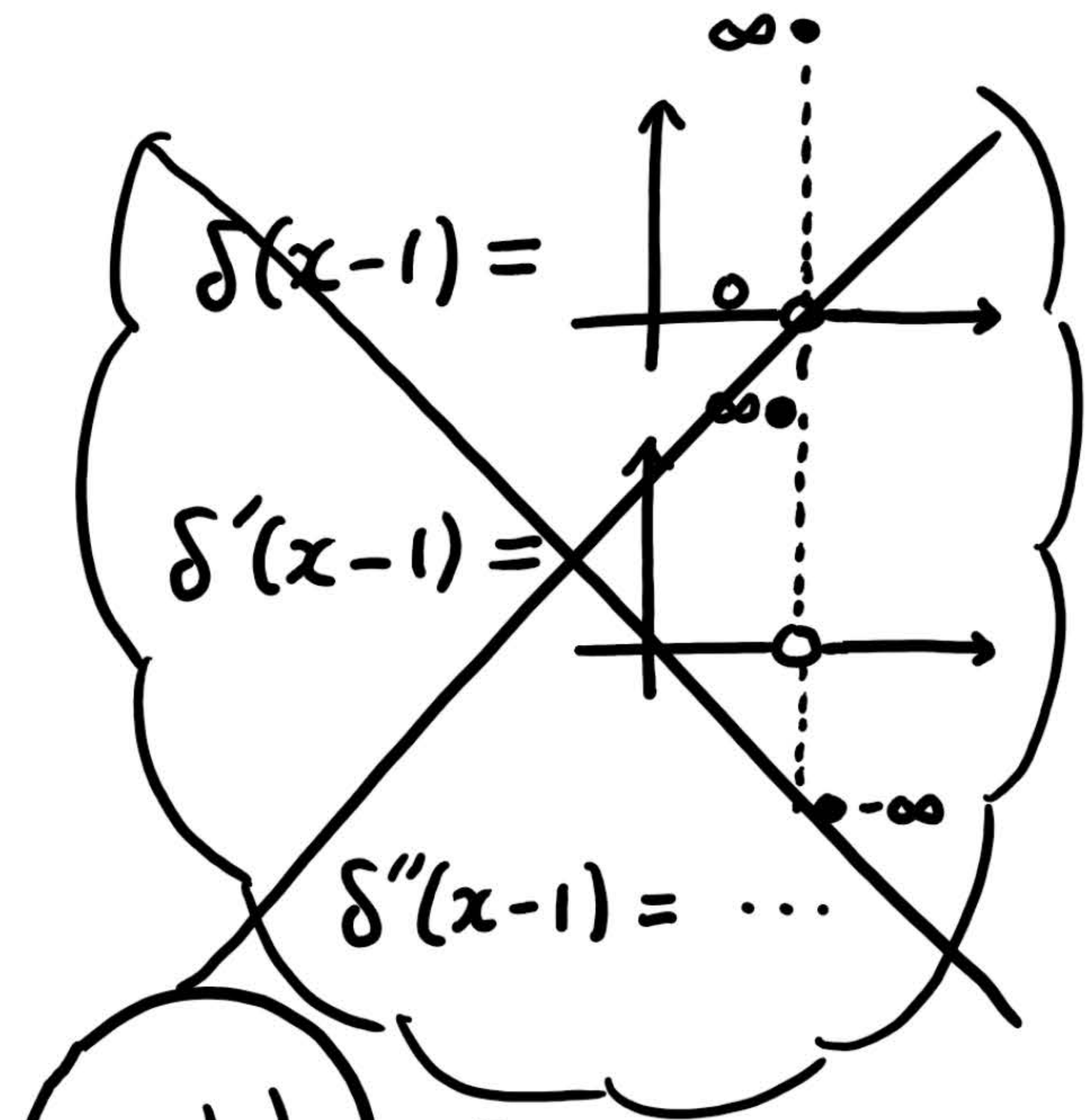
원래 초함수에  $\delta'$ 를 집어 넣고 계산하는 역할을 한다는 거죠.



$$\begin{aligned} & - \int_a^\infty g'(x) dx \\ &= g(a) - \cancel{g(\infty)} \\ &= g(a) \end{aligned}$$

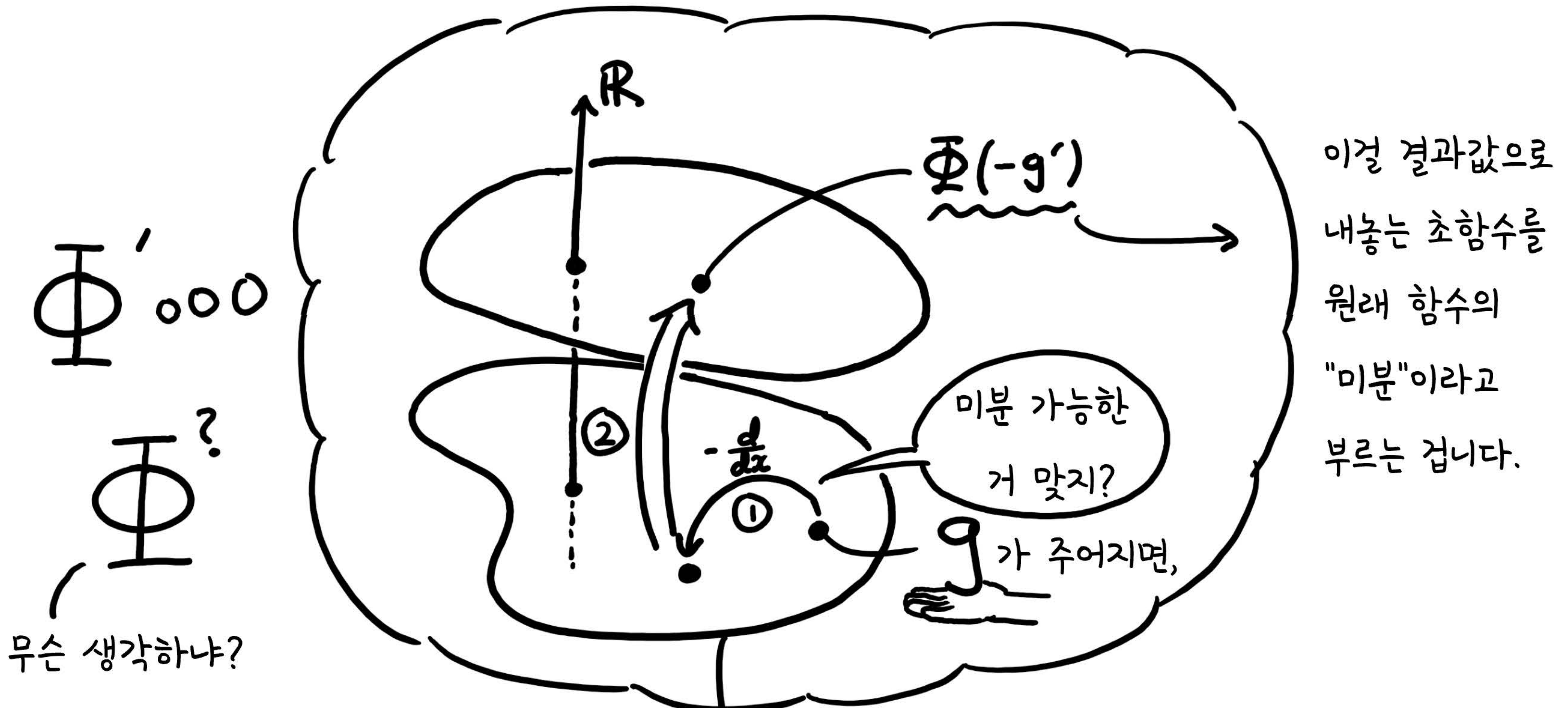
그러면  $\delta(a)$ 를 읽어 내는 디랙 델타의 효과를 보여준단 걸 알 수 있죠.

그러니 애초에 "x에 대한 함수"도 아니던 녀석을 x에 대한 함수로 볼 필요 없이,



"함수에 대한 함수"로 인식하는 게  
중요하단 걸 항상 명심해야 해요.

이런 식으로, 일반적인 초함수의 미분도 정의할 수 있어요. 아래와 같이.



이걸 결과값으로 내놓는 초함수를 원래 함수의 "미분"이라고 부르는 겁니다.

무슨 생각하냐?

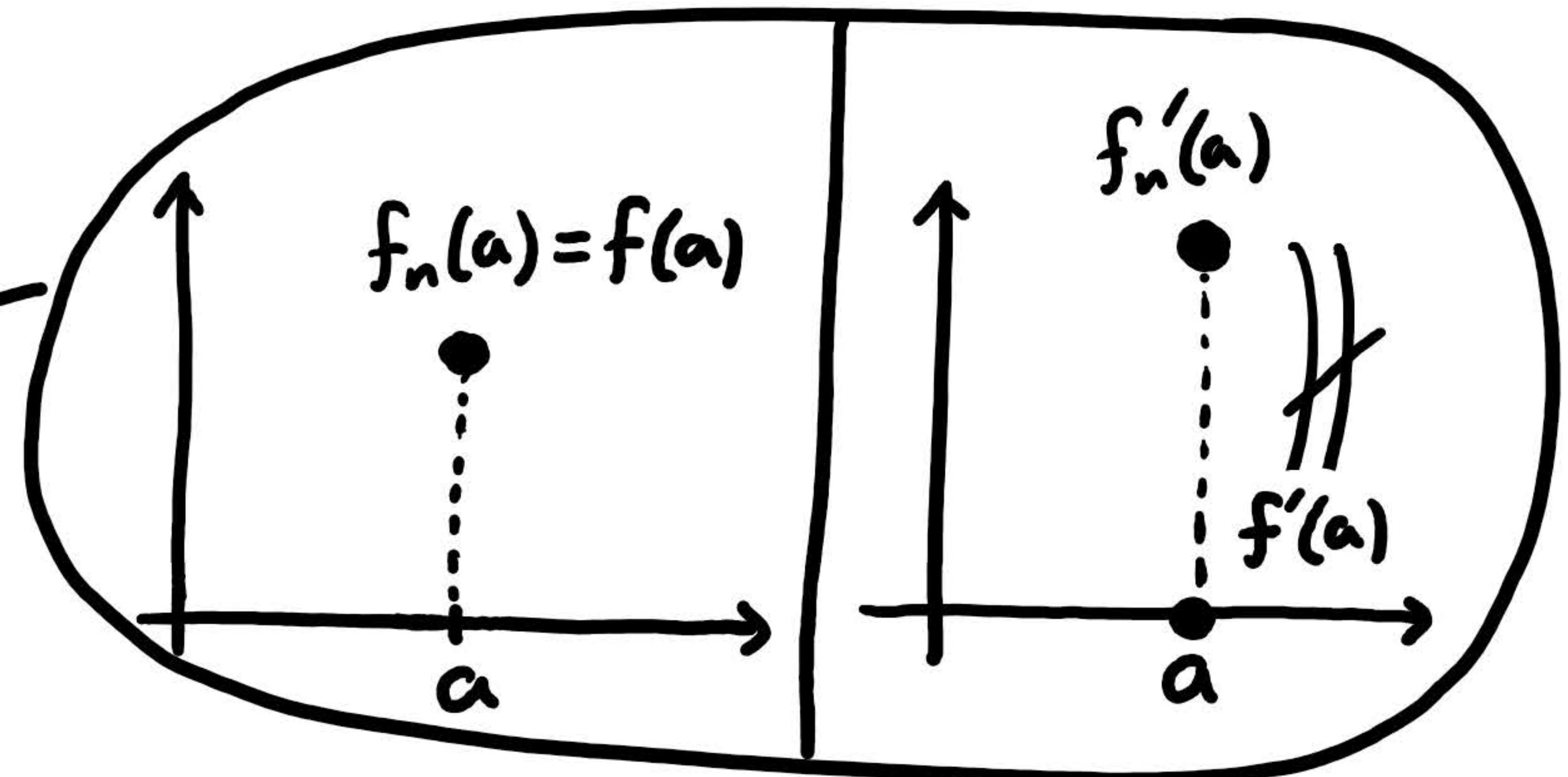
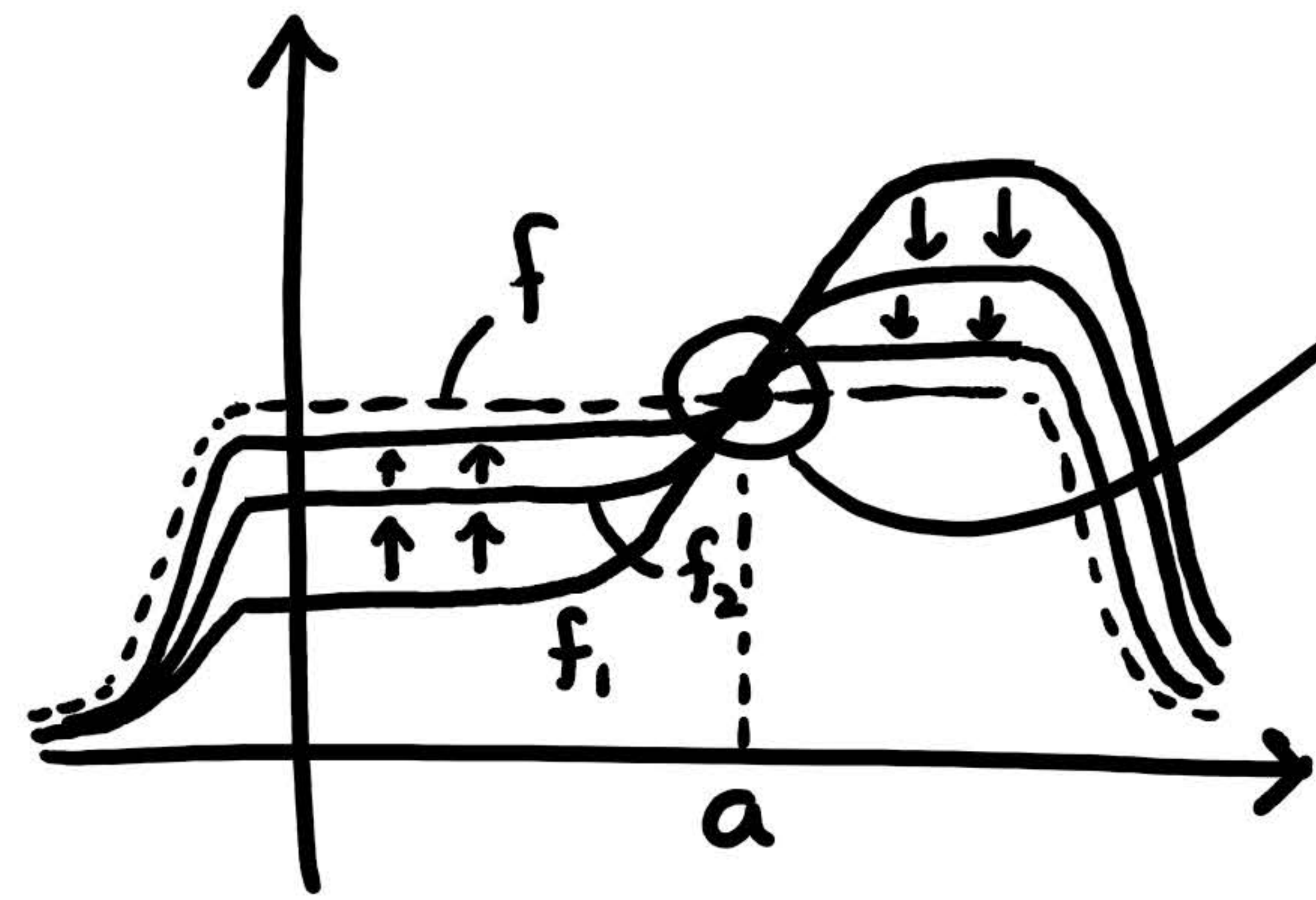
물론 이게 가능하려면, 테스트 함수  $\phi$ 는 무한 번 미분 가능하면서  $x$ 가 무한히 커질 때  $\phi(x), \phi'(x), \dots$ 가 0으로 가야겠죠.

$$S : \frac{d}{dx}, \dots, 0$$

$$\subseteq C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \left\{ \frac{d^n}{dx^n} g \mid_{\pm\infty} = 0 \right\}$$

그리고 어떤 테스트 함수열이 다른 테스트 함수로 "수렴한다"는 말의 의미도 다시 생각해 볼 수 있어요. 예를 들어,

이런 함수열을 고려해 보면,



$$\delta(x-a)$$

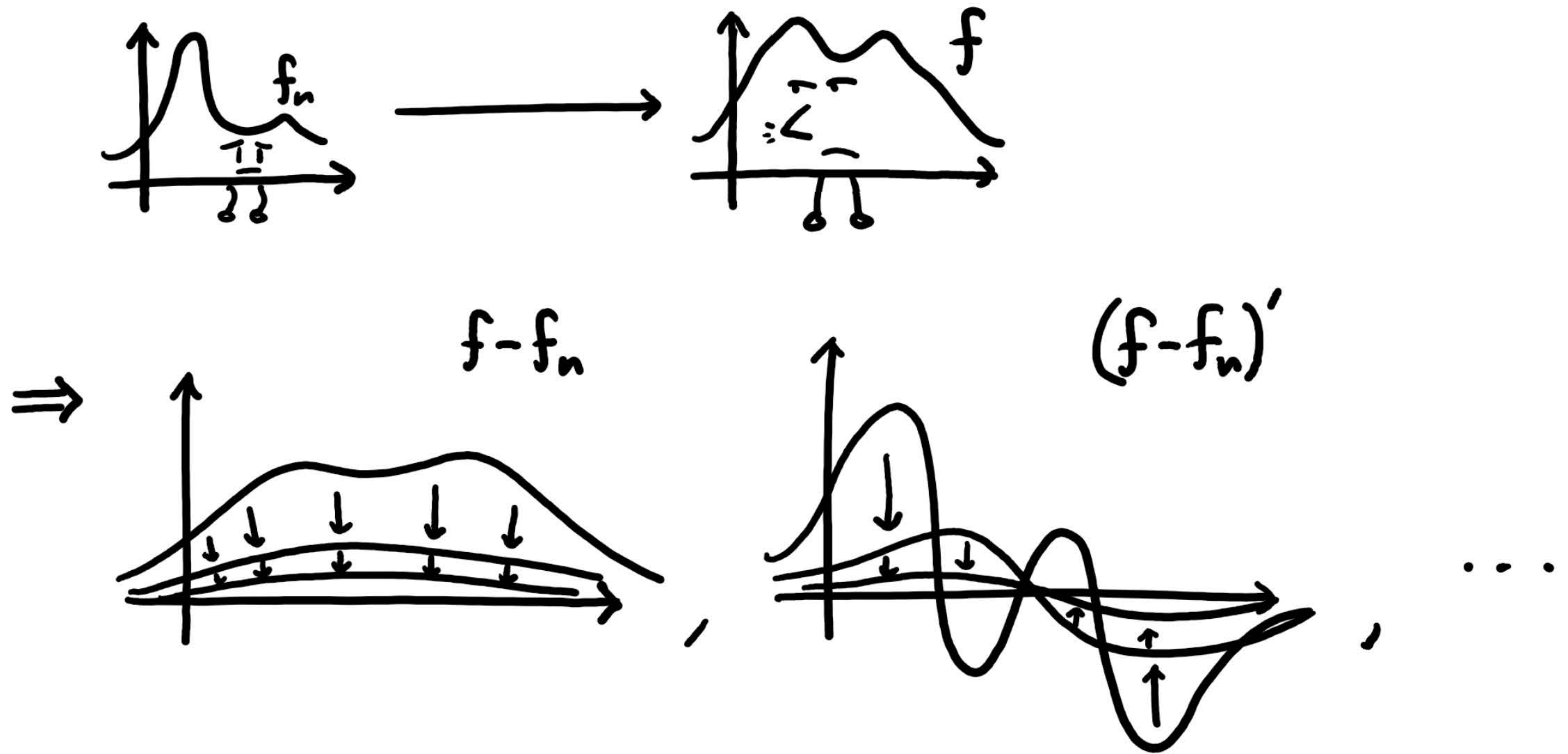
아, 결과값들이 잘 수렴하네!

$$\delta'(x-a)$$

음, 나한테는 그렇지 않은걸;;

함숫값들은 수렴하고 있지만 도함숫값들은 수렴하지 않아, 디랙 델타 입장에서 보면 좋지만 그 미분에게는 좋지 않은 함수열이죠.

그러니 테스트 함수 공간에서 수렴성을 얘기할 때는,



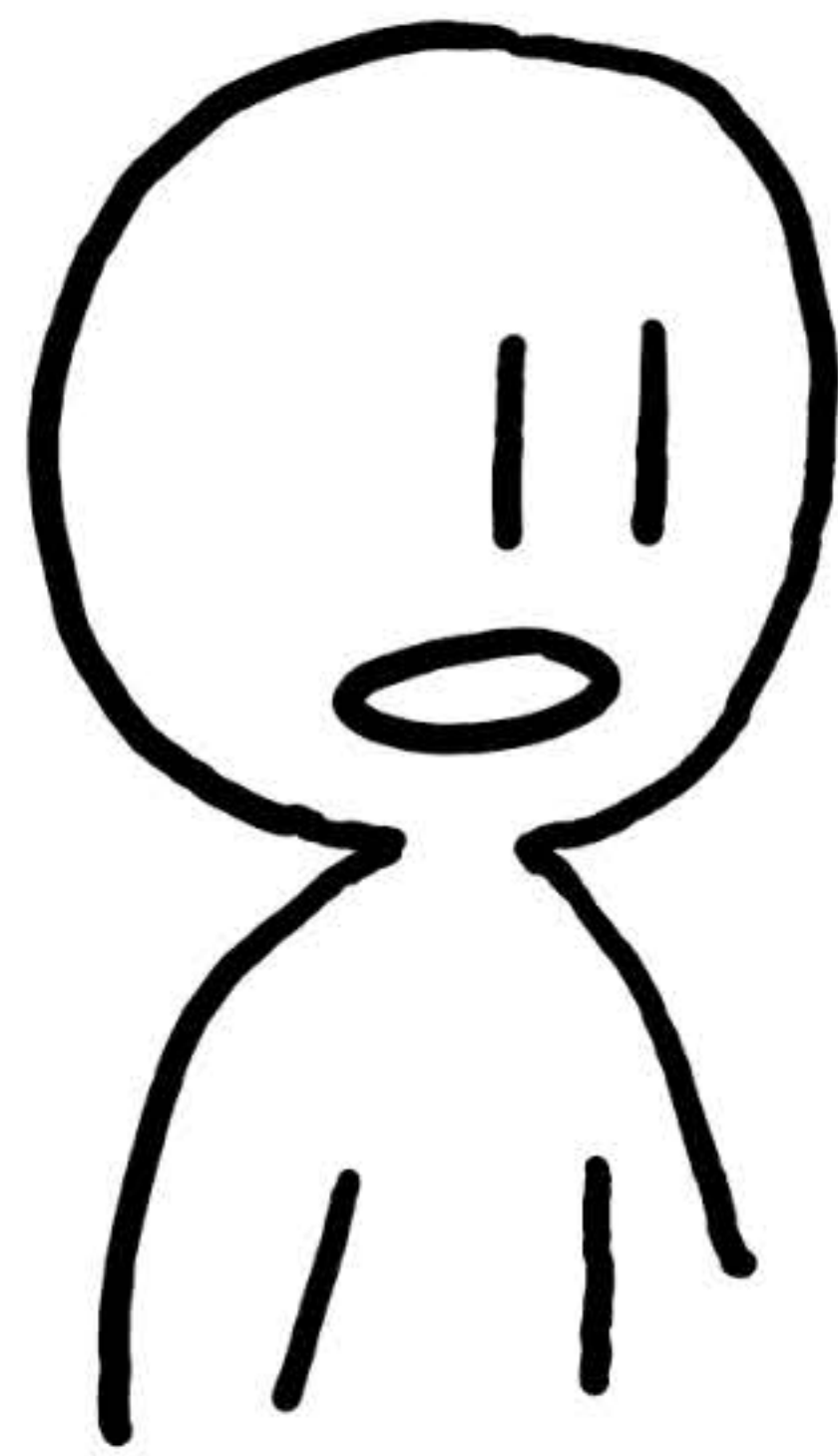
함숫값뿐만 아니라 그 도함수(및 고차도함수들)도 모두 균등하게 수렴하는지를 살펴봐야 한다는 걸 알 수 있어요. 초함수의 "미분"을 잘 정의하려면 말이예요.



이제 다음으로 정의해야 하는 건 초함수의 푸리에 변환이에요.



왜냐면 제가 능력이 너무 출중하기  
때문이에요! (상수 계수인) 편미분방정식을 사실상  
다항방정식으로 바꿔놓는 역할을 하니까요.



$$\nabla^2 u = f$$



$$(2\pi i)^2 |\xi|^2 \hat{u} = \hat{f}$$



$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{4\pi|\xi|^2}\hat{f}\right) \leftarrow \hat{u} = -\frac{1}{4\pi|\xi|^2}\hat{f}$$

왼쪽보다는  
오른쪽 방정식이 더  
편안하네요.

여기서  $f$  자리에  
초함수도 넣을 수  
있었으면 좋겠단  
거죠.

이번에도, "좋은 함수"의 푸리에 변환이 테스트 함수에 어떻게 작용하는지를 보면 힌트를 얻을 수 있겠군요.



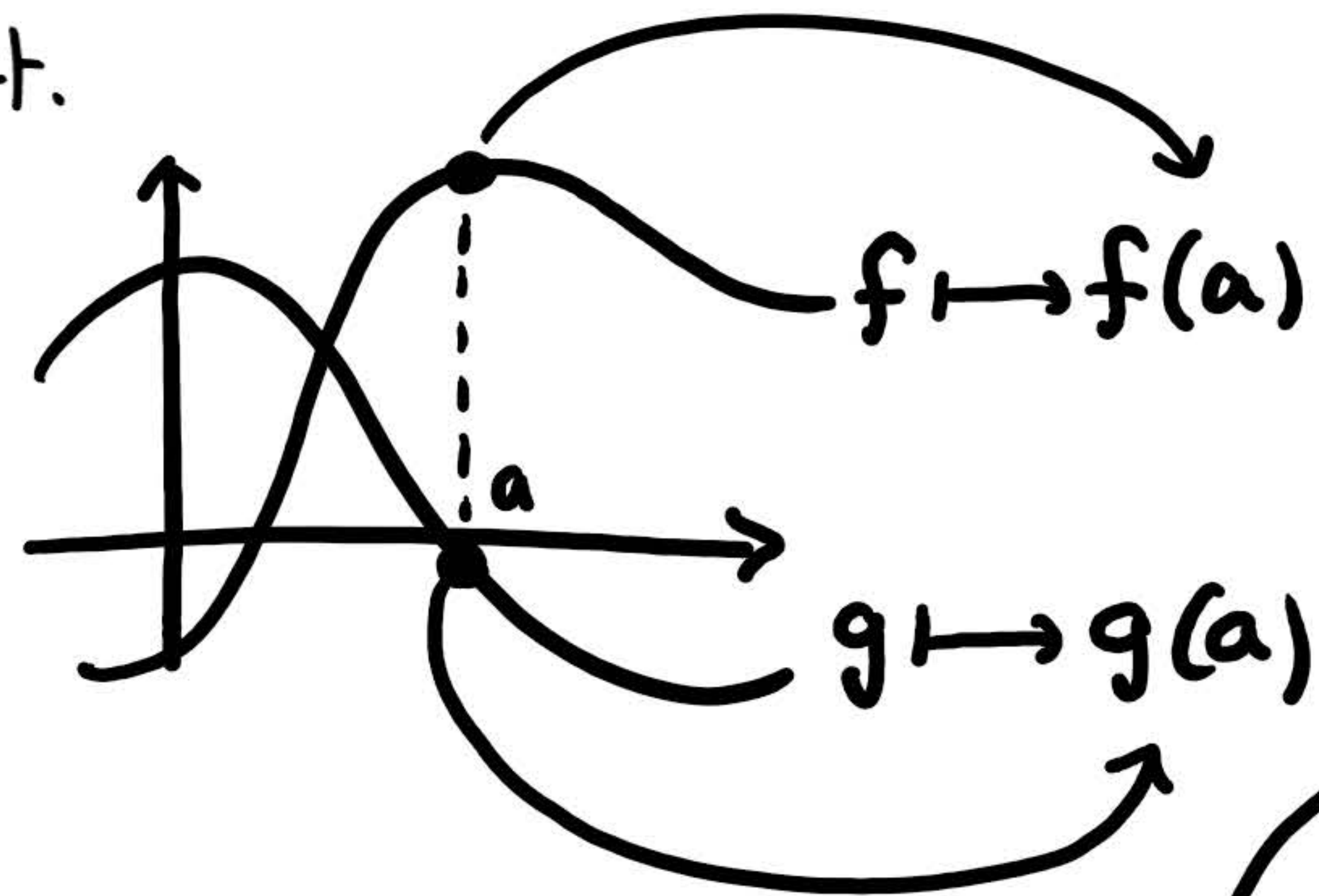
흠흠, 제 역할은 테스트 함수에 푸리에 변환을 떠넘기는 겁니다. 간단하죠?

실제로,  $f$ ,  $g$ 가 적분 가능한 함수이기만 하면 푸비니 정리에 의해 다음이 성립합니다.

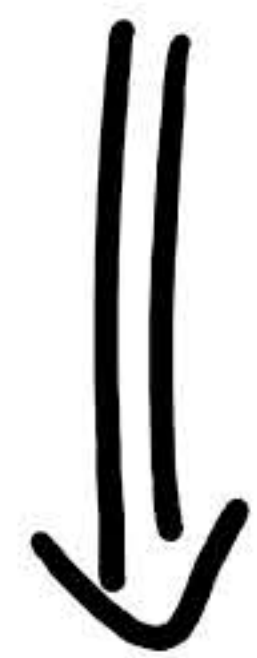
$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(\xi)}_{x, \xi : \text{대칭적}} \underbrace{g(x)}_{x, \xi : \text{대칭적}} e^{-2\pi i x \xi} dx d\xi$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx$$

예시로 디랙 델타를 다시 가져와 봅시다.

$$\delta(x-a) :$$



여의 푸리에 변환이  
 용에 작용하는 방식은,



$$\left( \mathcal{F}(\delta(x-a)) \right) g(\xi) = \delta(x-a) (\mathcal{F}g)$$

$$= \mathcal{F}g(a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-2\pi i a \xi} d\xi$$

난  $a$ 에서의  
 값을 읽어내지.

원래 디랙 델타가 용의 푸리에  
 변환에 작용하는 방식인데,  
 이 결과물을 살펴보면...

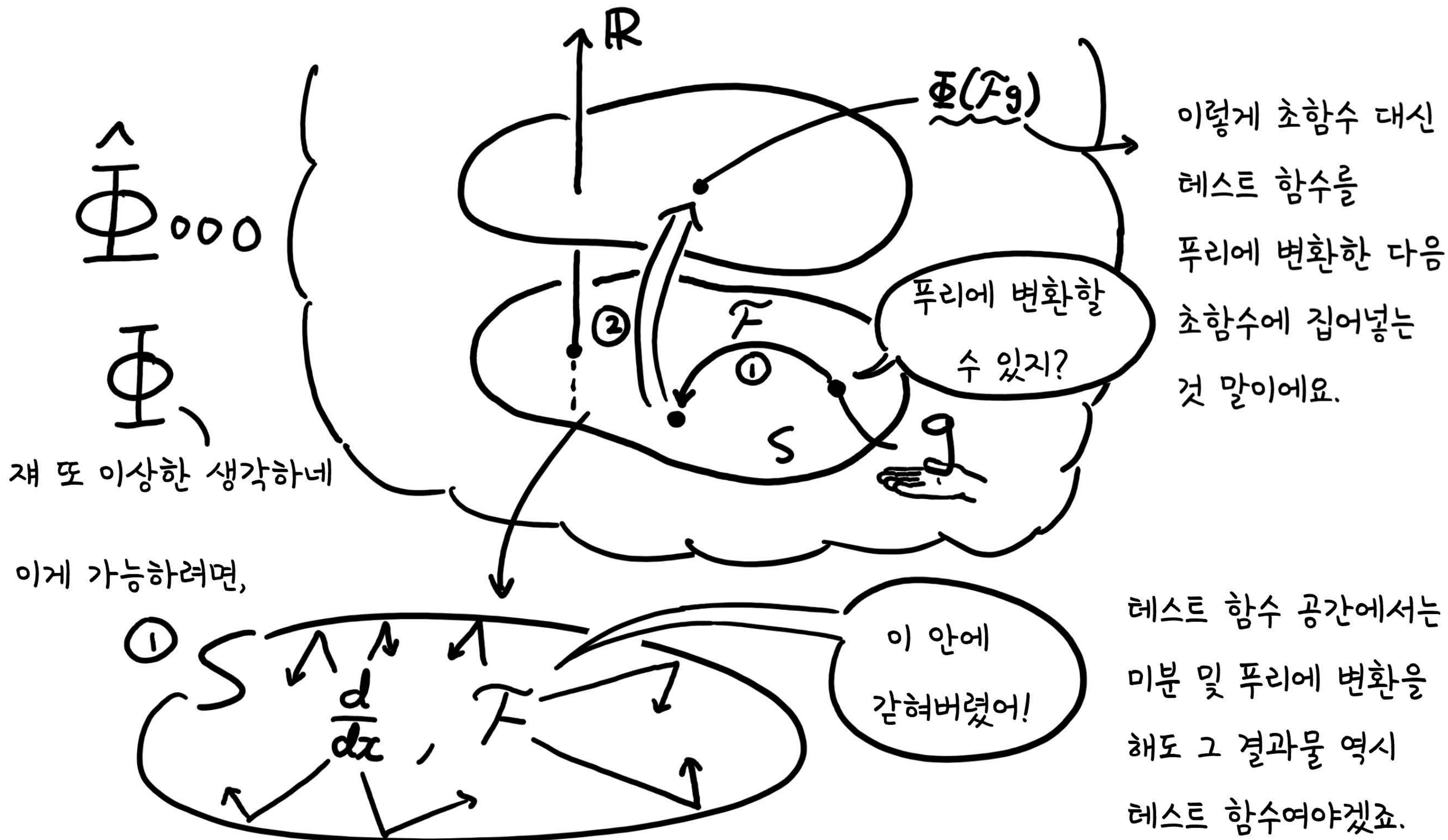
$$e^{-2\pi i a \xi}$$

내가 작용하는  
 방식이랑 똑같네!

$$\mathcal{F}(\delta(x-a)) = e^{-2\pi i a \xi}$$

초함수로서 !

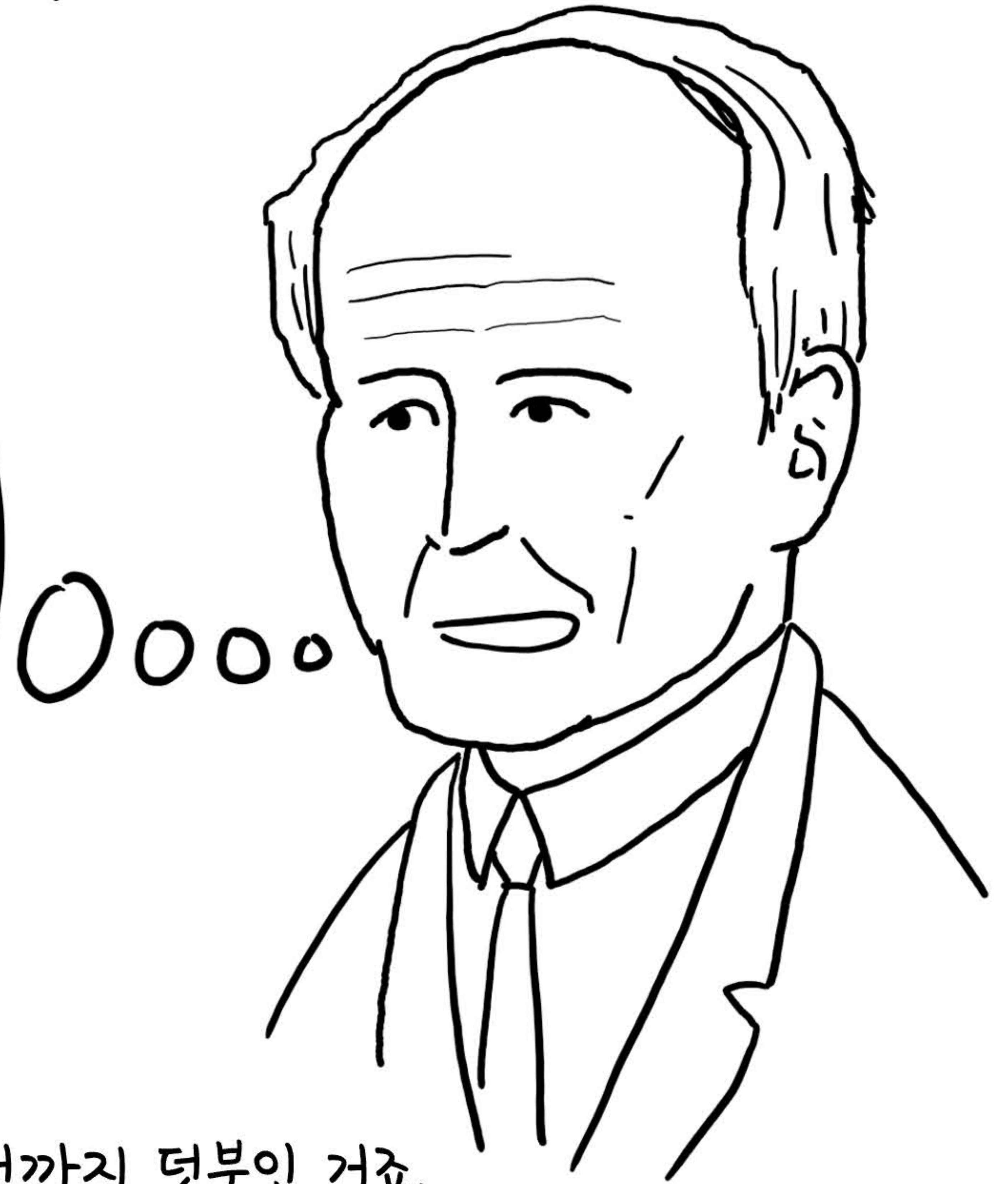
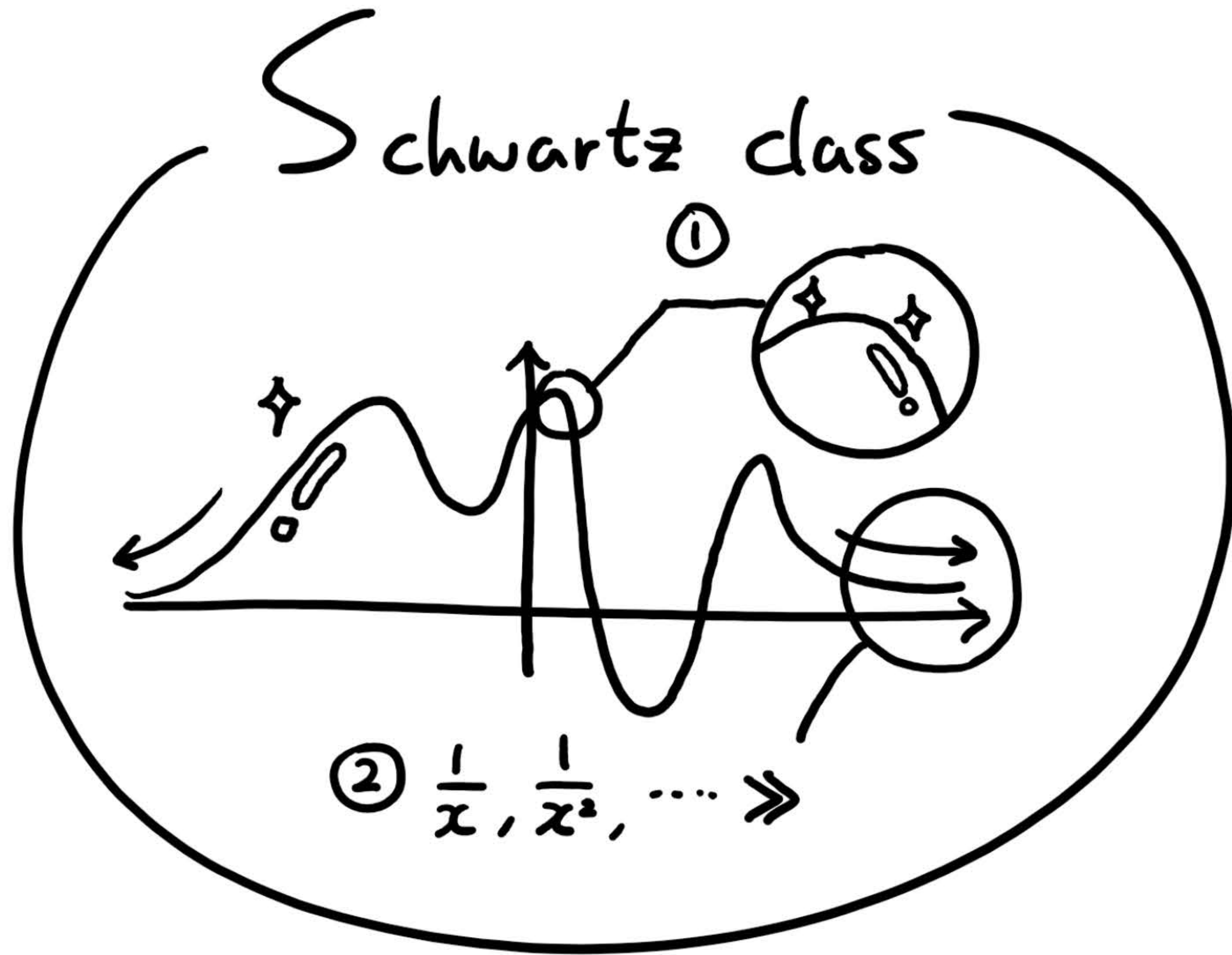
그럼 이번에도 일반적인 초함수에 이런 전략을 적용할 수 있겠네요.



이렇게 초함수 대신 테스트 함수를 푸리에 변환한 다음 초함수에 집어넣는 것 말이에요.

테스트 함수 공간에서는 미분 및 푸리에 변환을 해도 그 결과물 역시 테스트 함수여야겠죠.

그래서 슈바르츠는 다음과 같은 테스트 함수 공간을 제안했어요. 무한 번 미분 가능하다는 매끄러움 조건은 당연하고,

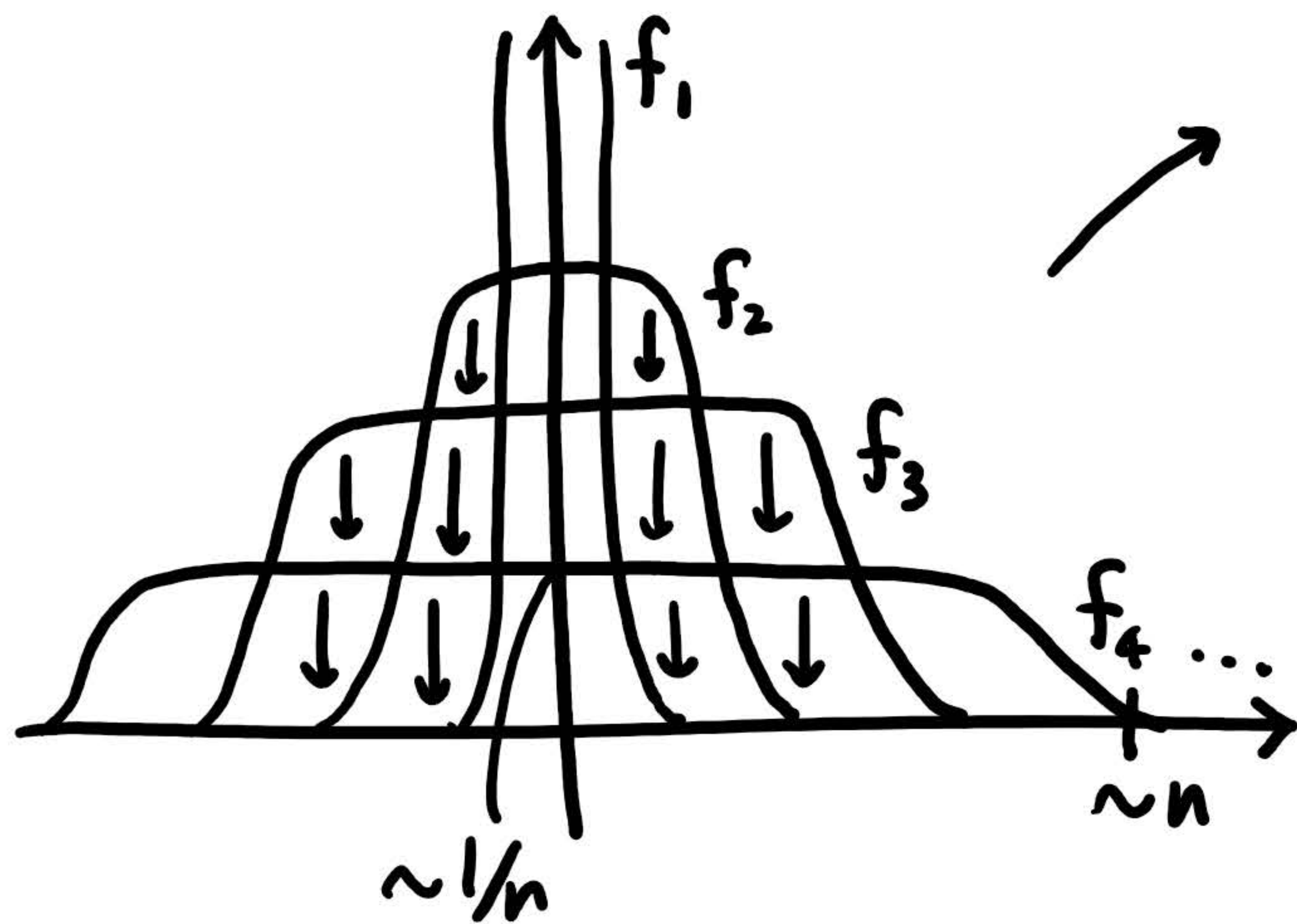


그 어떤 다항 함수보다도 더 빠르게 감소해야 한다는 조건까지 덧붙인 거죠.

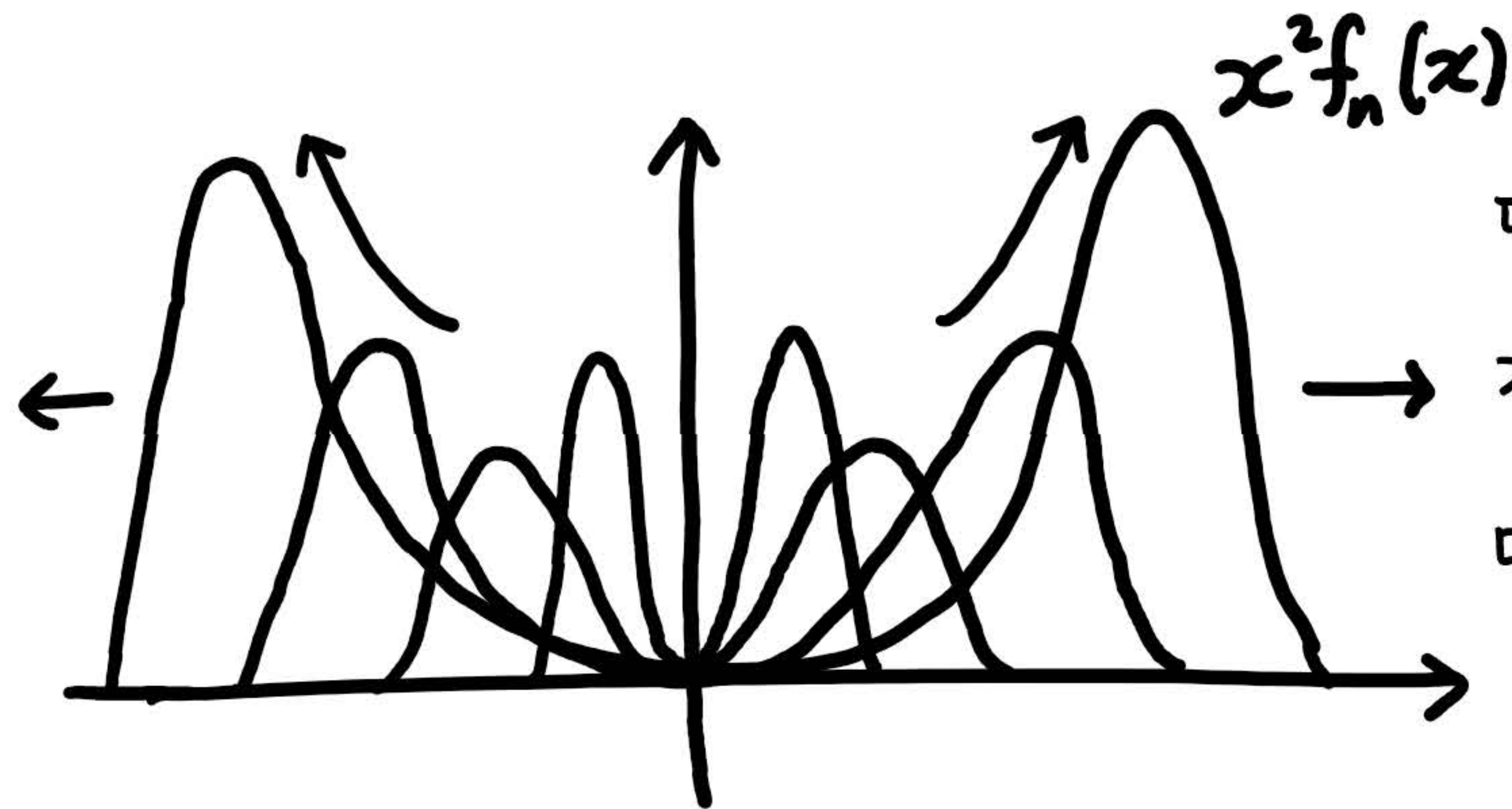
이 두 조건은 미분 및 푸리에 변환에도 끄떡없이 보존됩니다.

그리고 테스트 함수열에서의 수렴 조건도 조금 바뀌어야 할 것 같아요.

예를 들어 테스트 함수열의 함수값 및 그 도함수들은 0으로 균등하게 수렴한다 해도,



어떤 초함수에게는 수렴하는 함수열처럼 관찰되지만 그 푸리에 변환에게는 수렴하지 않는 것처럼 보일 수 있어요.



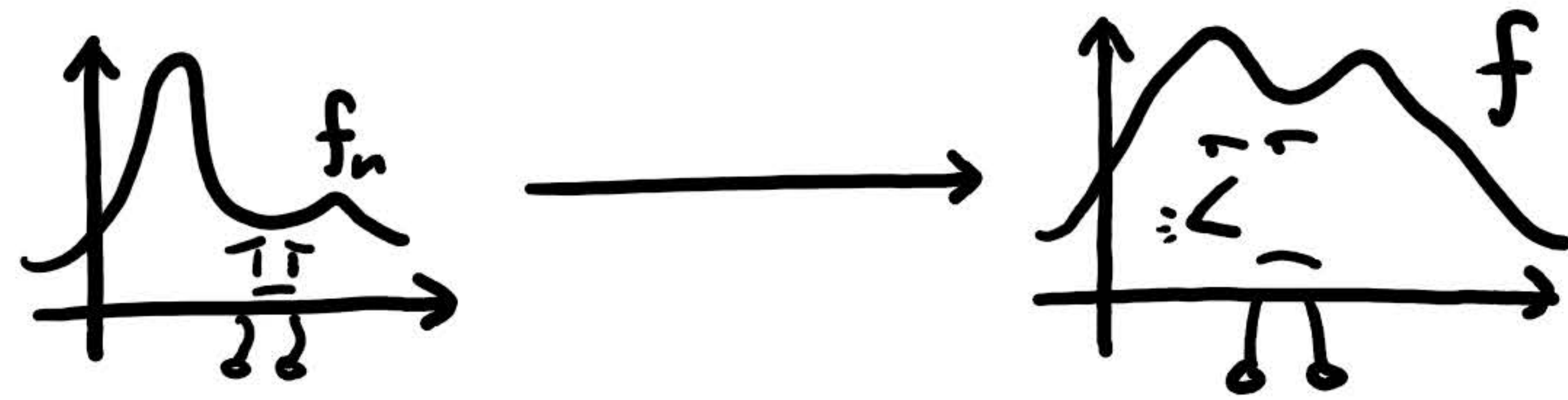
다항식을 곱하면  
감쇄가 상쇄될  
만큼 약하다면...

$$\sum_{n=0}^{\infty} (0)$$

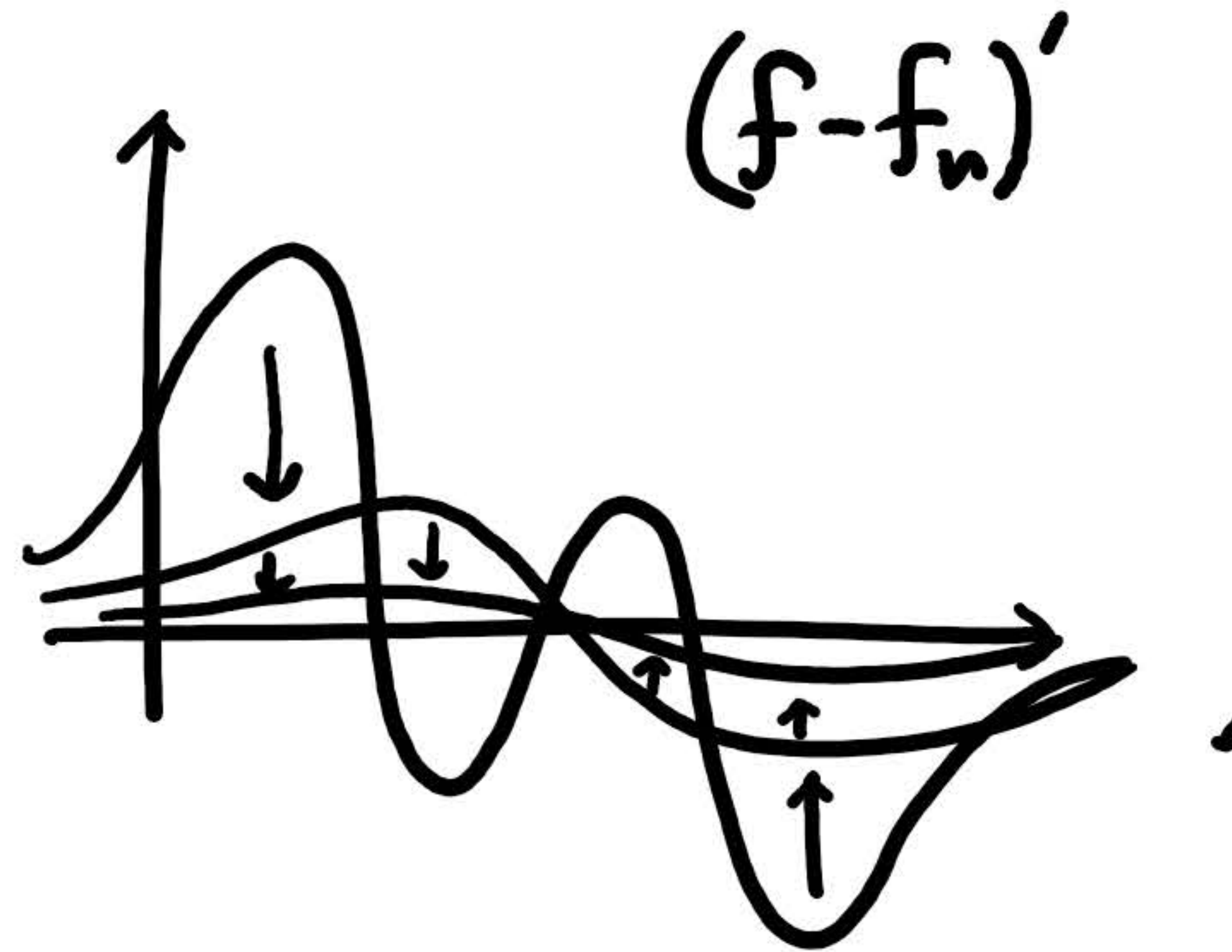
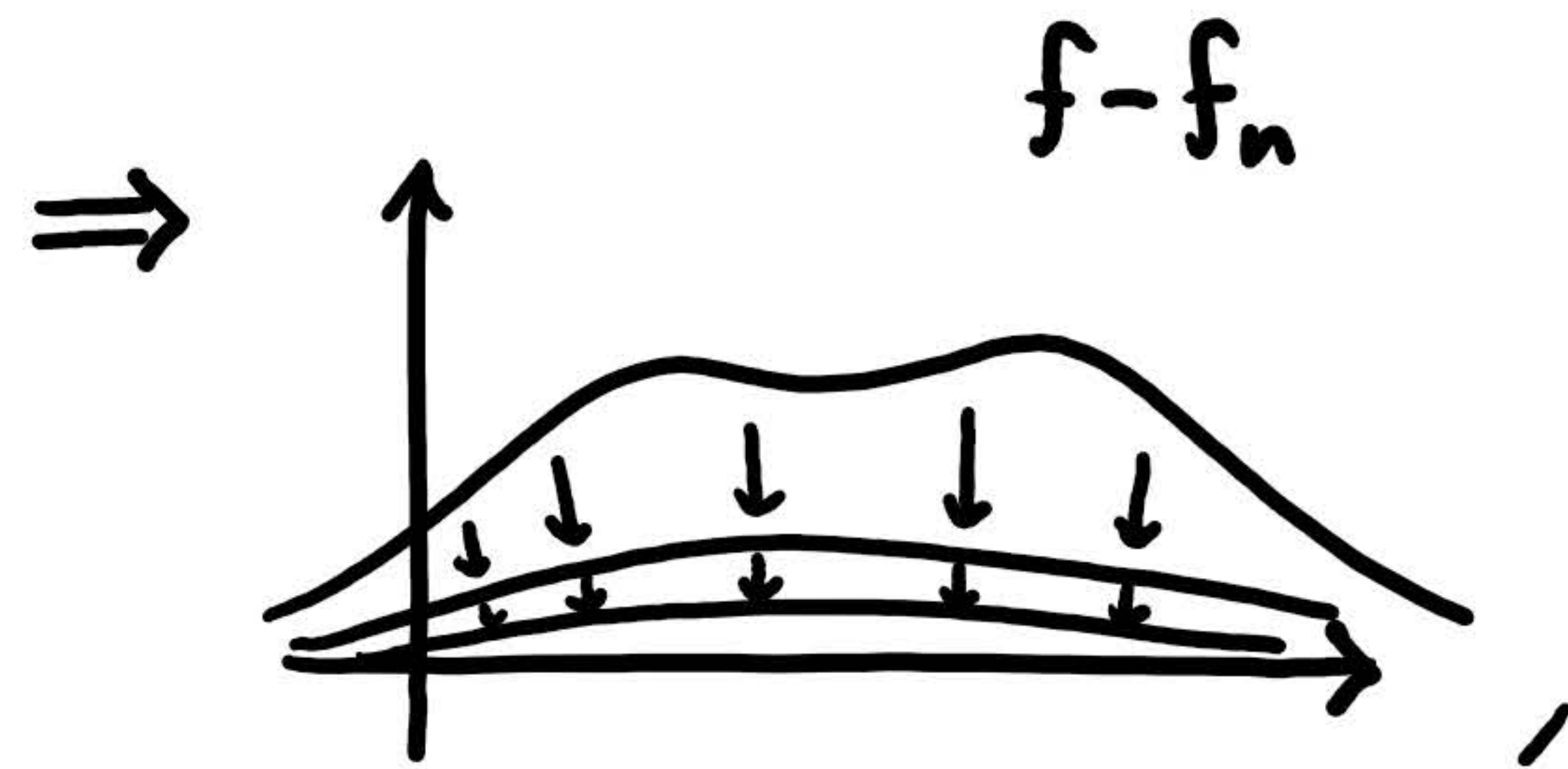
나한테는  
괜찮아 보여.

$$e^{2\pi i 0 \cdot x} = 1 \quad (f \mapsto \int f)$$

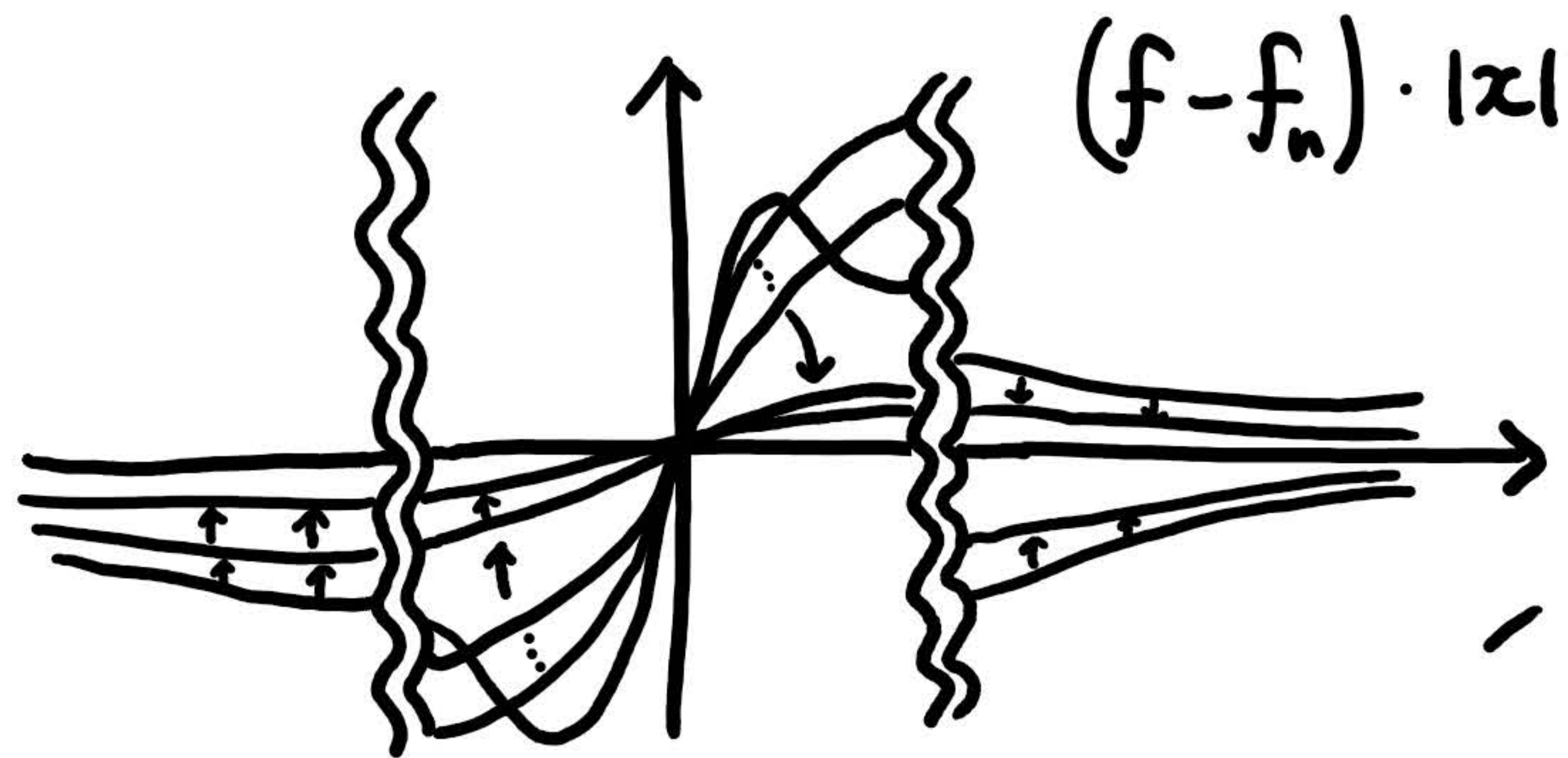
하지만 내가 보면  
이상한 함수열인걸...



그러니 슈바르츠 공간에서 어떤 함수열이  
다른 함수로 수렴한다는 건,



함수 및 도함수값들이  
... 균등하게 수렴하는 건  
물론이고,



거기에 다항식을 곱해도  
... 여전히 균등하게 수렴하는  
상황을 말하는 거예요.

...

좀 테크니컬한 부분이 있지만, 요약하자면 다음과 같아요.

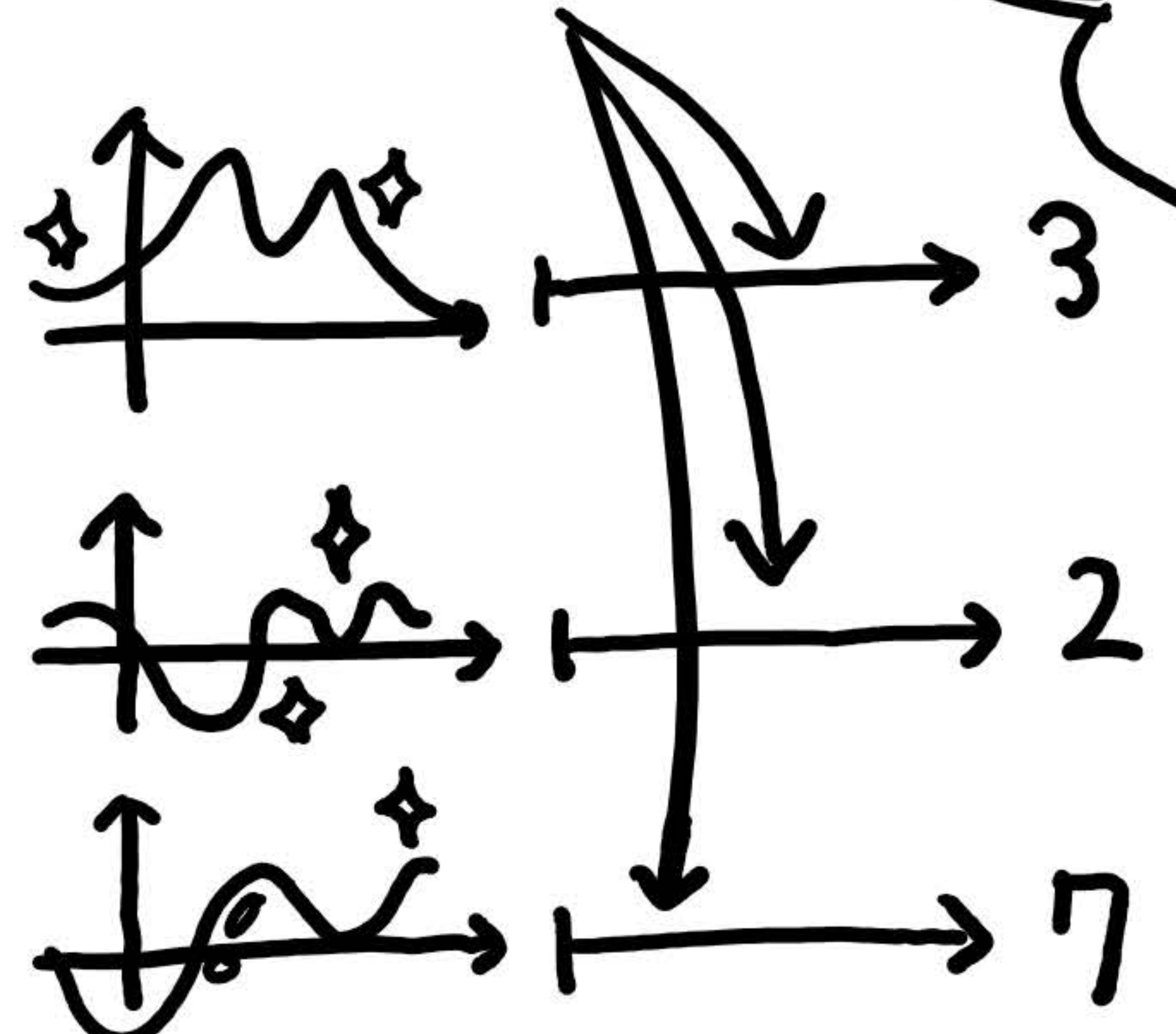
초함수는 (그게 원래는  $x$ 에 대한 함수였든 아니든)

"함수의 함수"로서 다룰 거고,



$\frac{d}{dx}$ ,  $\int$ ,  $*$ , ...

ㅇ 어딜 보는거야  $\pi$



너 자체는  $x$ 랑 관련이 없으니 우리가 직접 접근 못 함... 우리 테스트 함수들에 작용할꺼야

이렇게 테스트 함수를 통해 간접적으로 미분/푸리에 변환 등을 생각할 거란 거죠.



이런 정의를 이용하면, 초함수에 대한 미분방정식도 의미를 가질 수 있습니다.

우변이 너무 못생겼는데요;;

$$\nabla^2 u = \delta(x)$$

잔말 말고 풀어라.

↓ 이런 상황에서도, 먼저 푸리에 변환을 해 주면...

$$(2\pi i)^2 \|\xi\|^2 \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\nabla^2 u) = \mathcal{F}(\delta) = 1$$

아주 예쁜 다항식이 나오니, 이걸로 양변을 나눠 주고 푸리에 역변환만 하면 됩니다.

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{-4\pi^2|\xi|^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{4\pi|\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$$

그러면 이렇게 디랙 델타를 결과물로 내놓는 미분방정식의 해도 구할 수 있는 거죠!

아직은 함수가 아니라 초함수로서의 의미지만요.

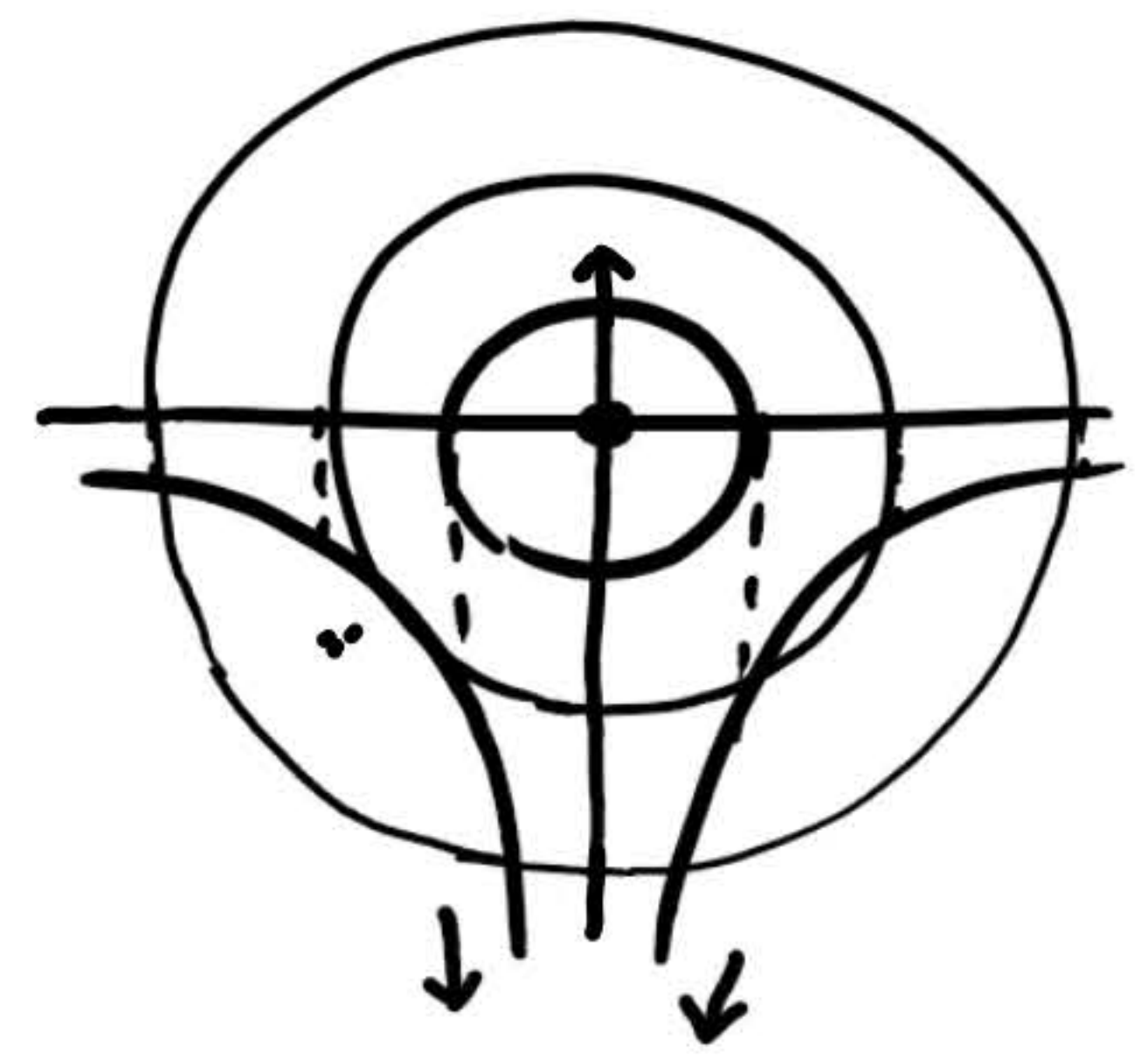
놀랍게도, 이런 방식은 임의의 상수 계수 편미분방정식에 적용할 수 있어요.

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} \underbrace{a_{i_1, \dots, i_k}}_{\text{상수}} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} u = \delta(x)$$

나는 항상 초함수  
관점에서의 해를 가진다구!  
계산은 좀 힘들지만...

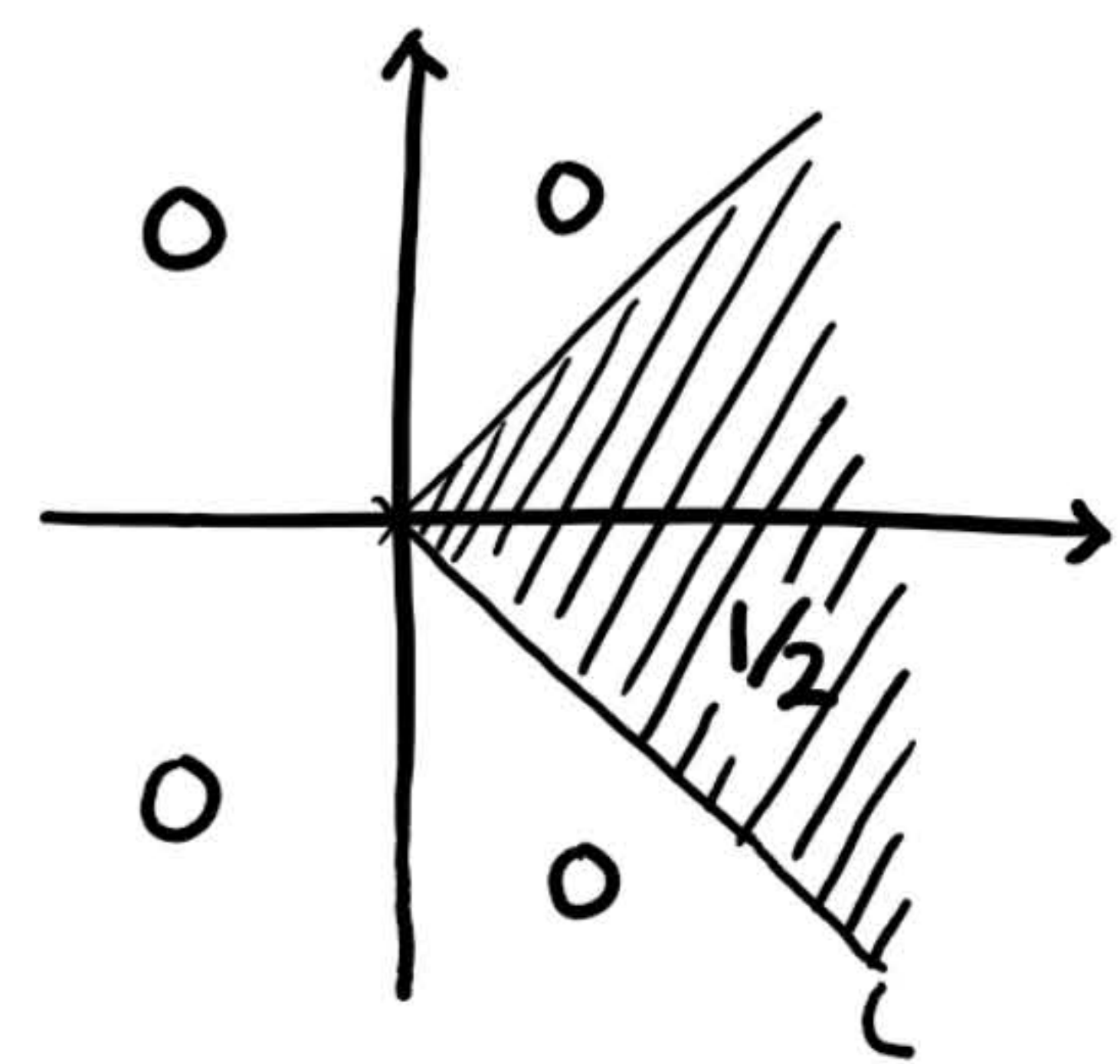
이때 나오는 해를 편미분방정식의 "근본적 해(fundamental solution)"라고 부릅니다. 예시를 들어 보면,

$$\vec{\nabla}^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 : F = -\frac{1}{4\pi r}$$

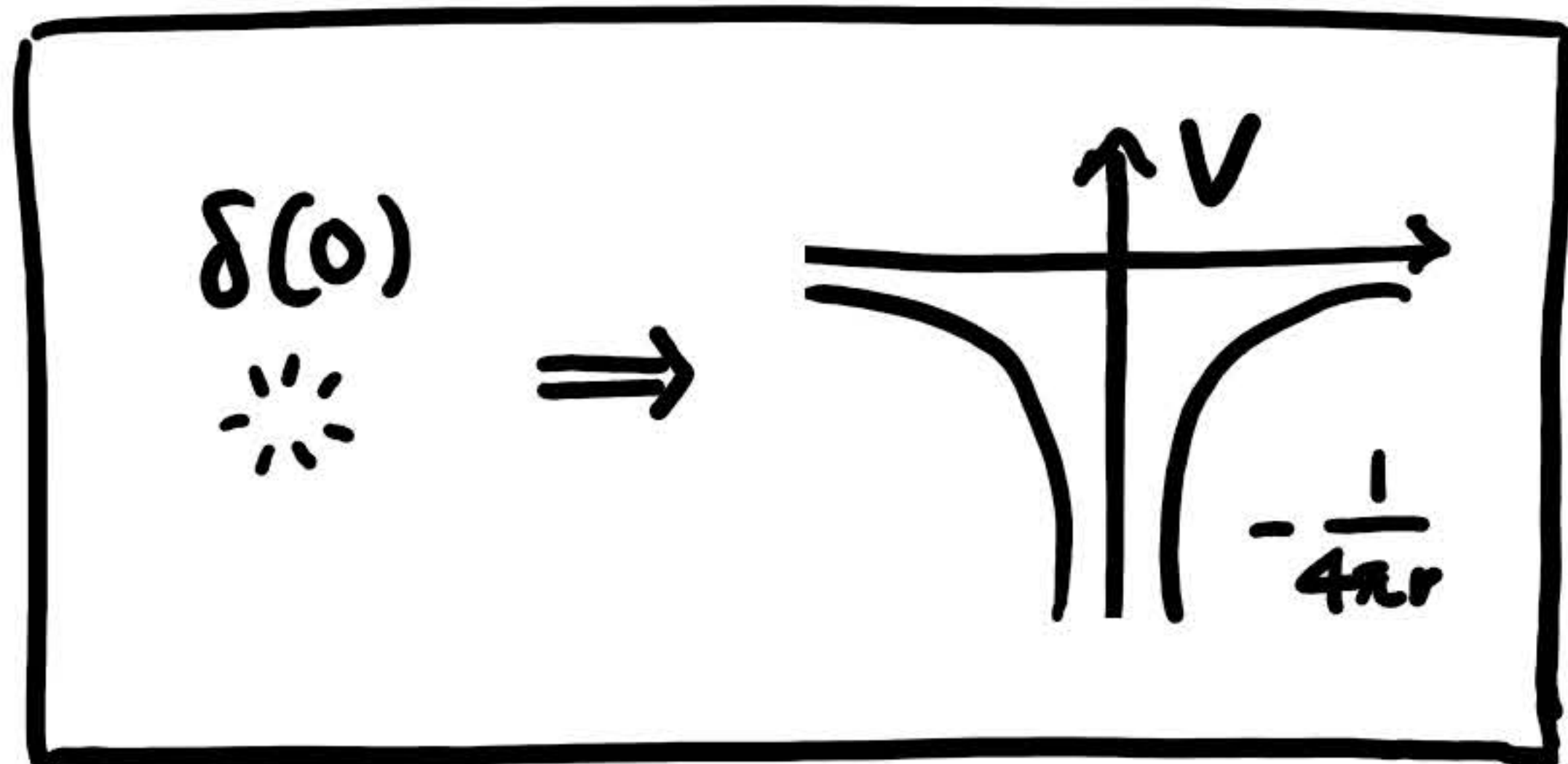


라플라스 방정식의 근본적 해는  
r의 지수승으로 나타나고,

$$\square^2 = \partial_t^2 - \partial_x^2 : F = \frac{1}{2} H(t-x) H(t+x)$$

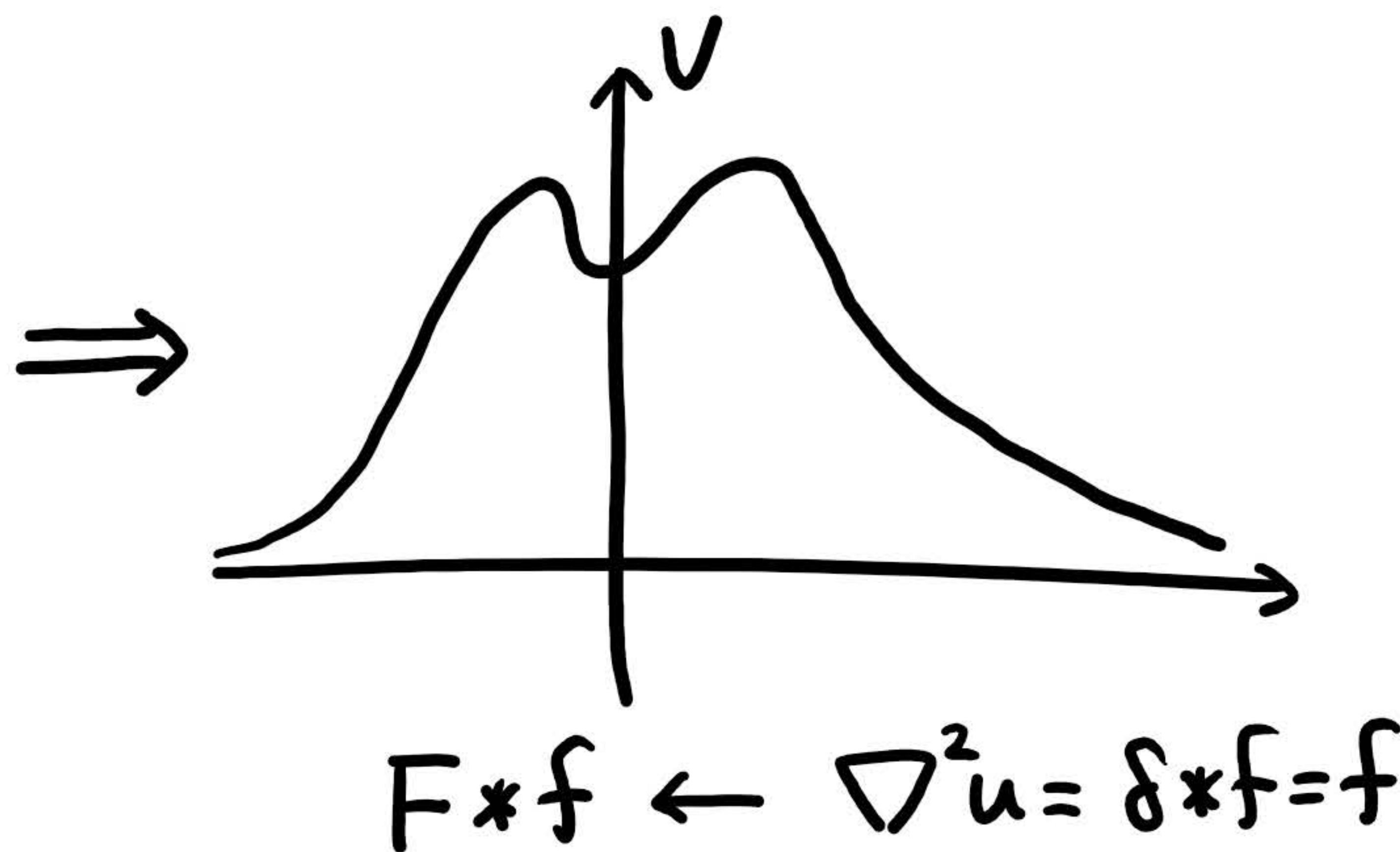
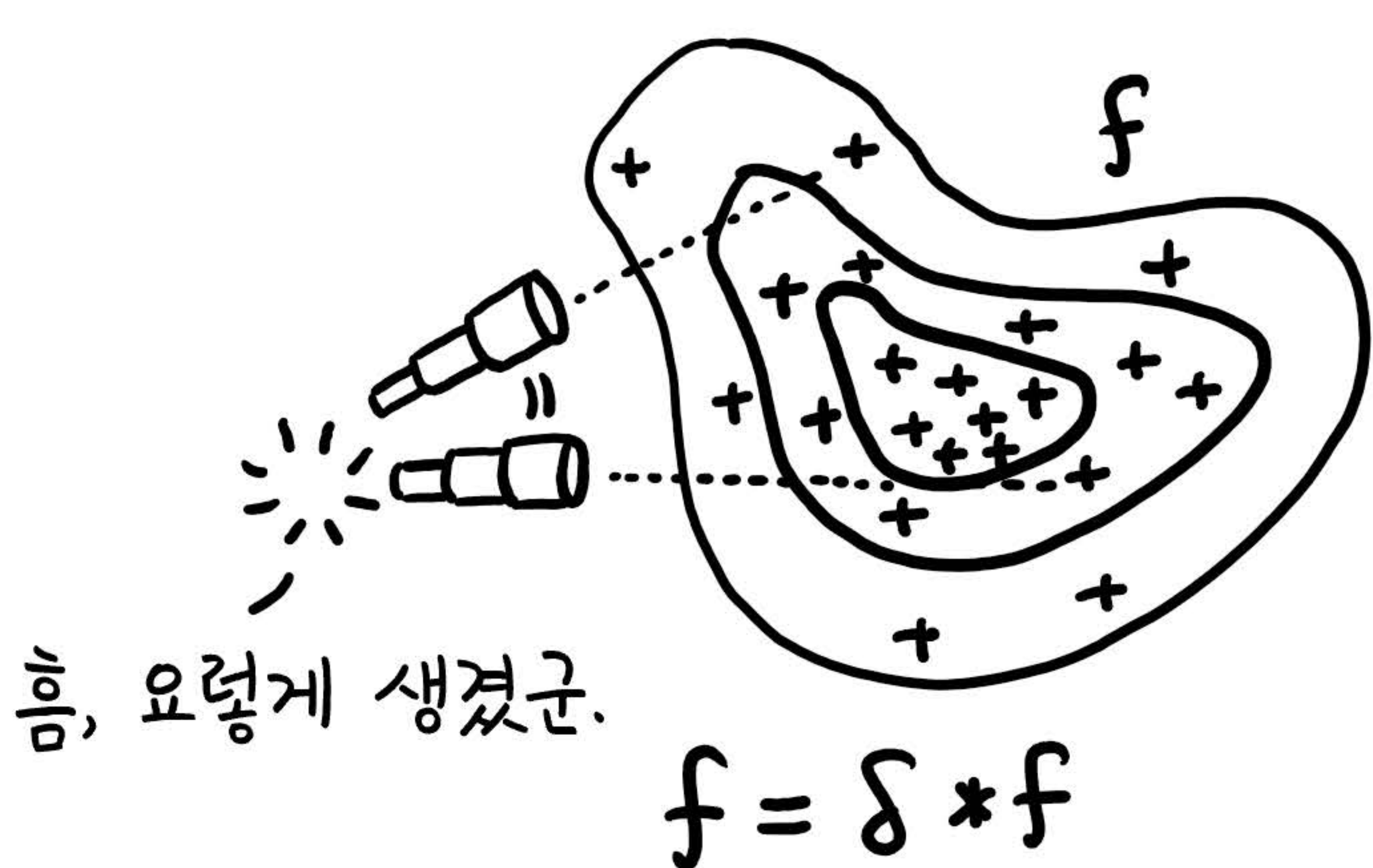


이런 파동방정식의 근본적 해는  
(약간 수정해 주면) 왼쪽과 같이  
구할 수 있어요.



음 그런데, 초함수로서의 해는... 뭔가 우리가 보통 생각하는 함수로서의 해는 아니잖아요? 그럼 전부 형식적인 이야기일 뿐 아닌가요?

앗 그렇죠. 'x에 대해' 제대로 미분하기도 못하는 함수를 어디다 쓰겠어요?

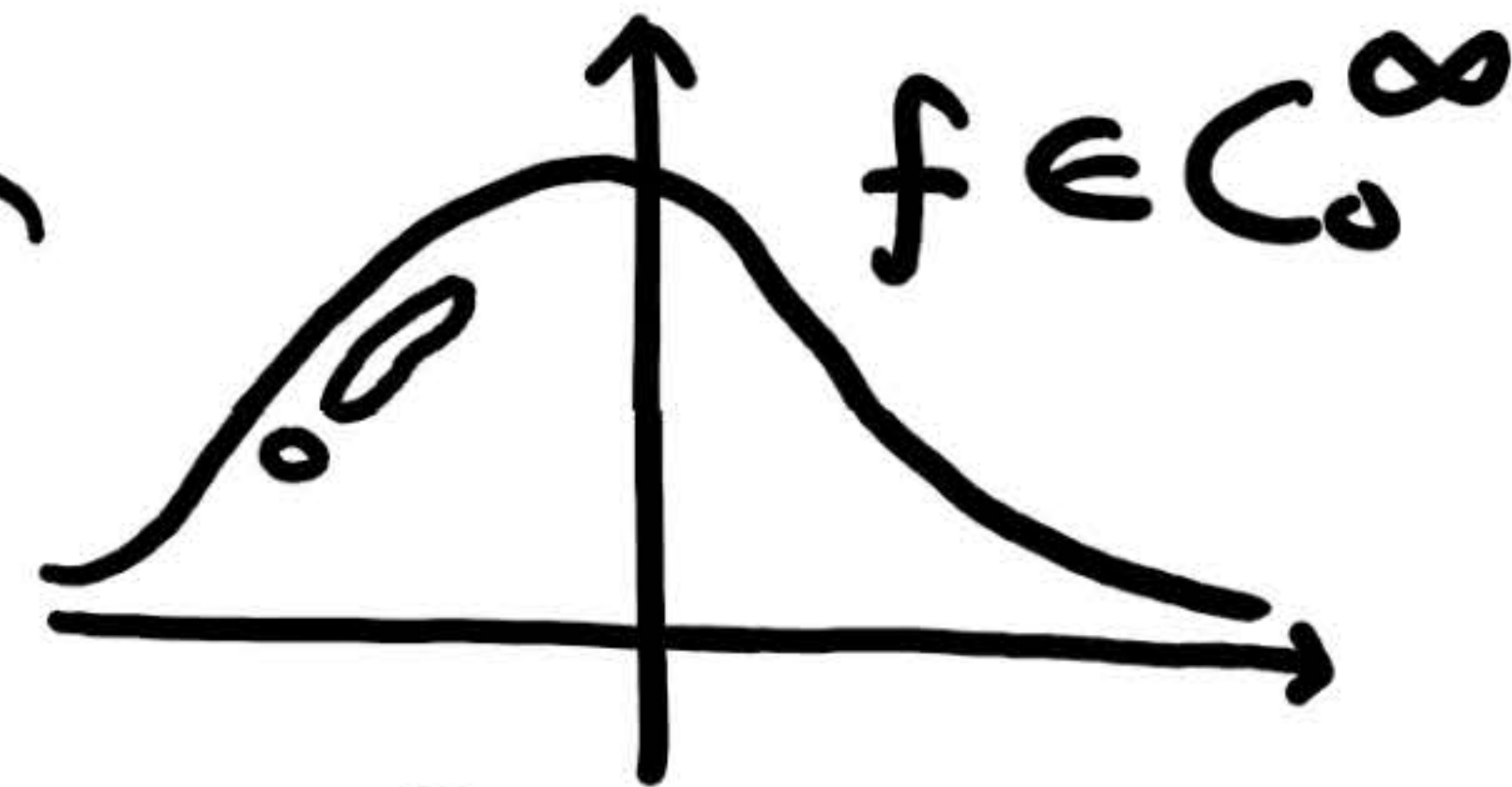


...가 아니라, 델타 함수를 이용해 방정식의 우변 f를 읽어낸 후, 그 정보를 F와 결합하면 "형식적인 초함수"로서가 아니라 "진짜 함수로서"의 해가 만들어집니다.

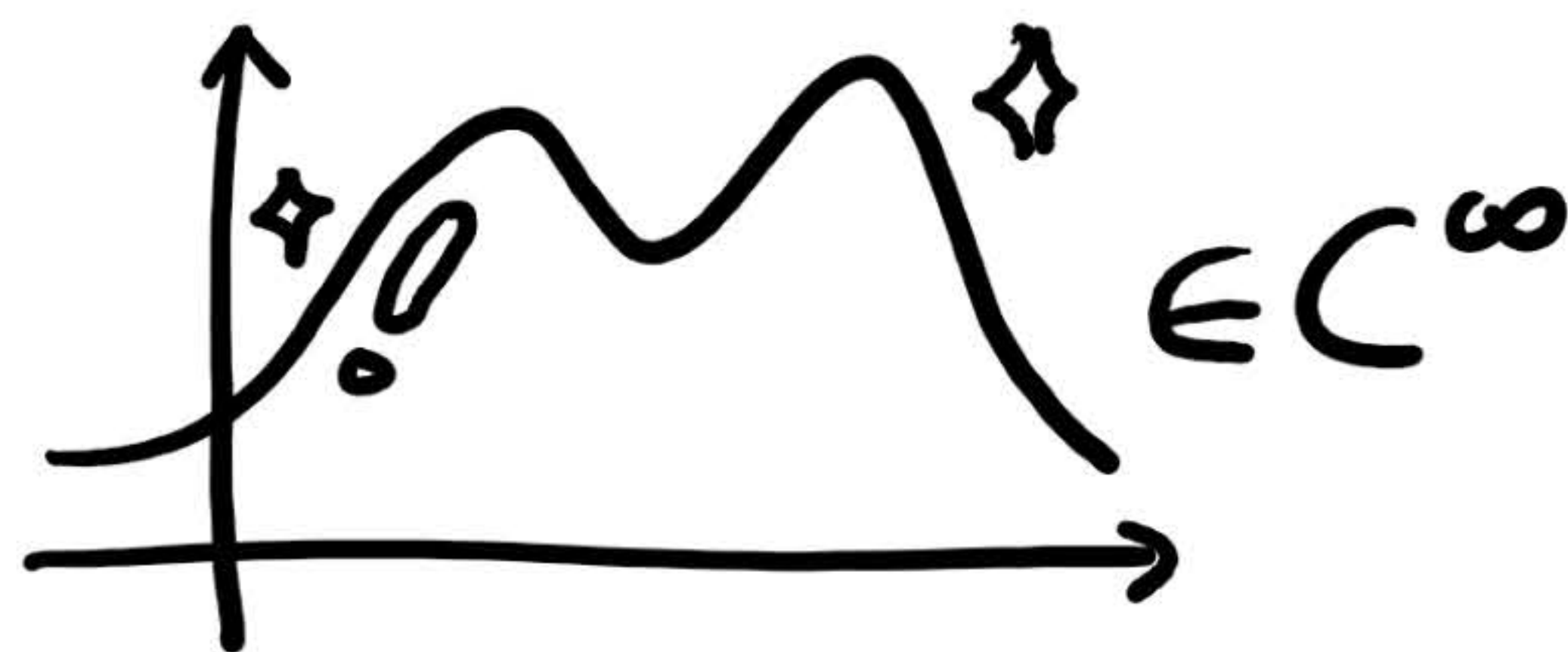
어떻게 이게 가능한 걸까요? 일단, 시키는 대로 근본적 해를 먼저 하나 준비합니다.

$$\nabla^2 F(x) = \delta(0) \quad \text{아직은 함수가 아닌 초함수로서의 등식이지만...}$$

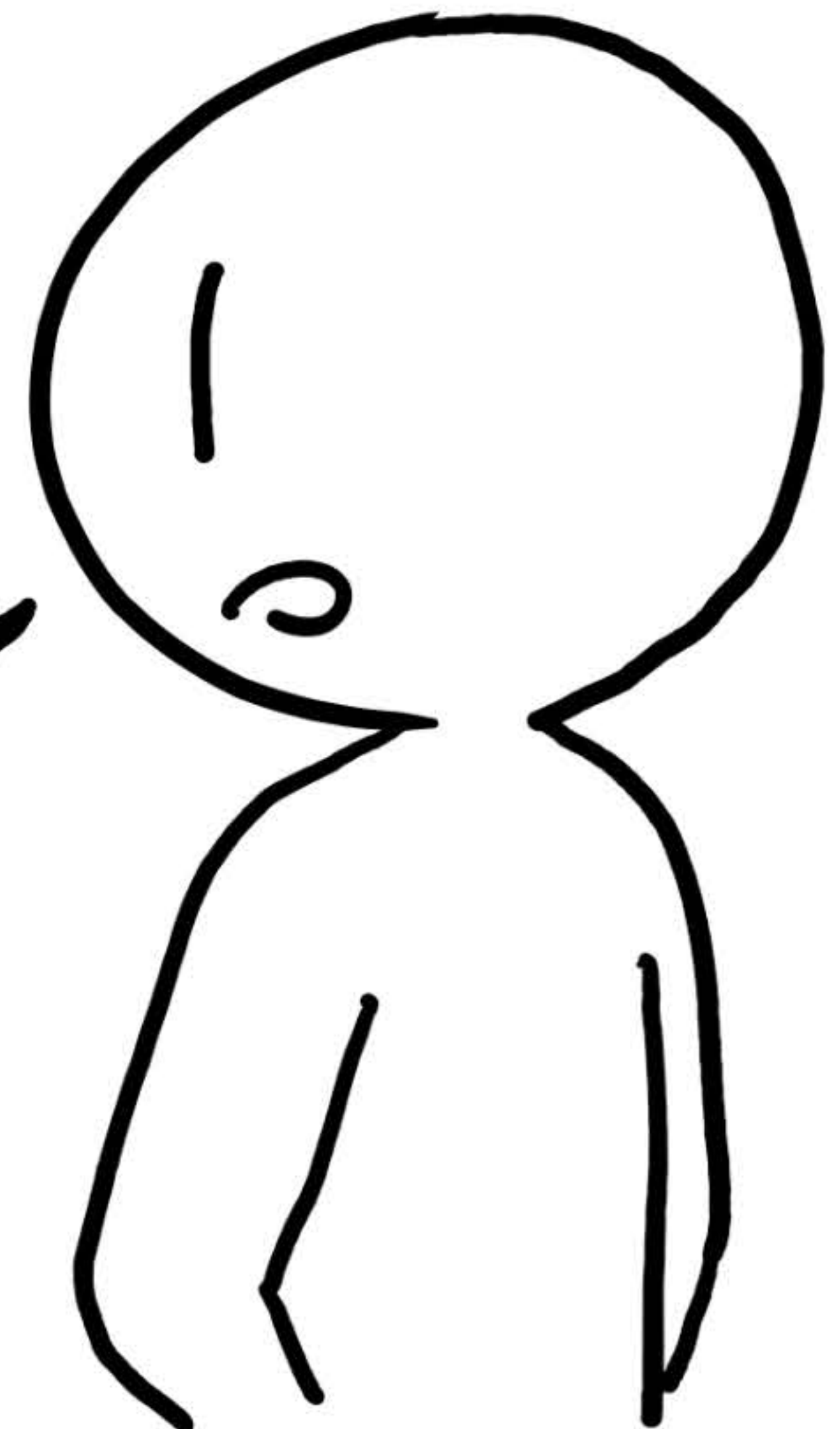
⇓  
이런 "매끄러운" 정보  
함수와 결합해주면?



$$\nabla^2 (F * f) = \delta(0) * f = f$$



여전히 초함수로서의  
등식이긴 한데, 여기서  $F * f$ 가  
사실 매끄러운 함수가  
됐거든요.



그 이유는 다음과 같은데요,

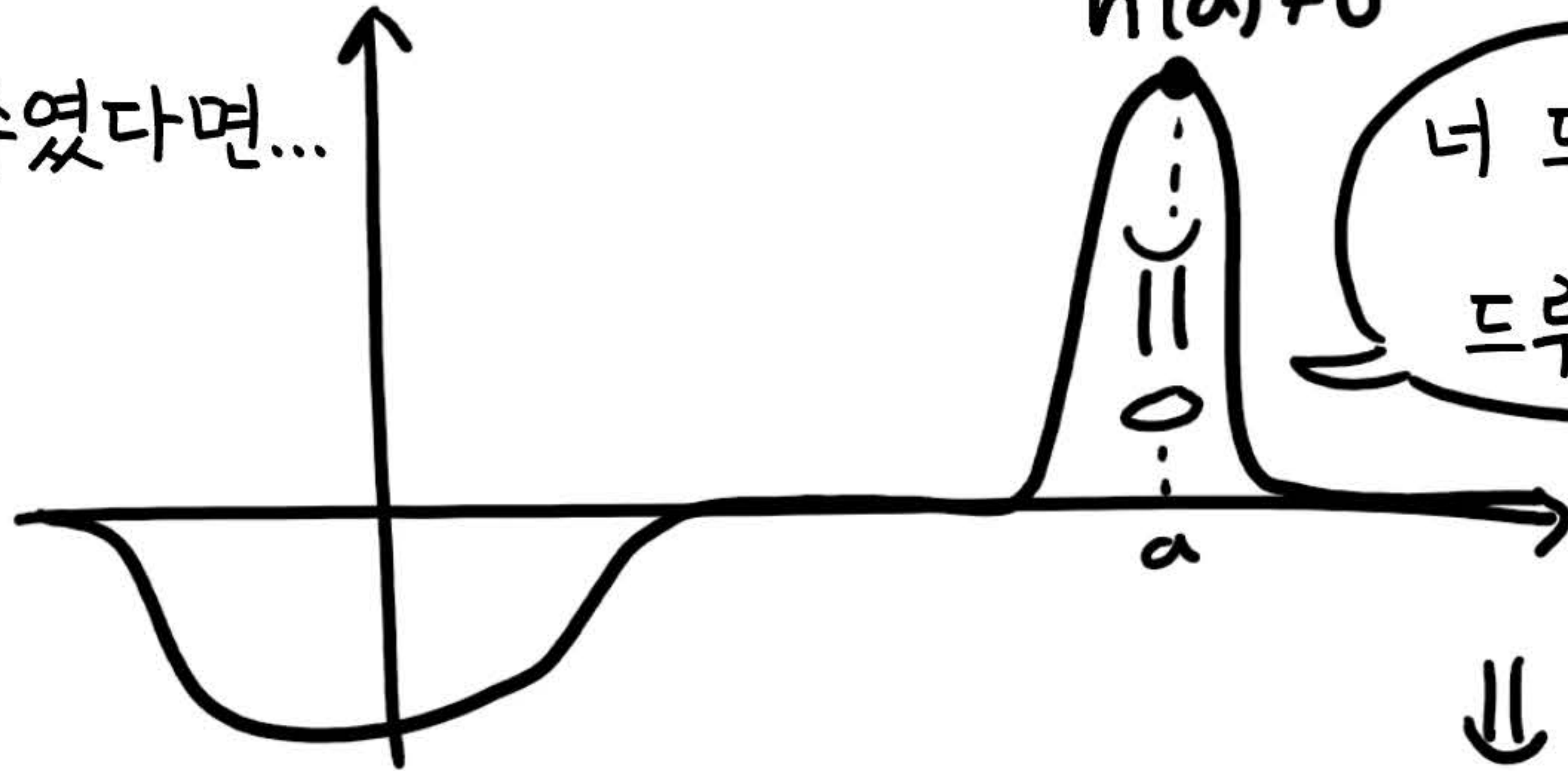
초함수로서

$$\frac{\vec{\nabla} (F * f) - f}{h} = 0$$

야! 초함수 계급장 떼고 함수로서 겨뤄 보자!

?? 그래 어디... 어차피 똑같은 텐데

만약 좌변  $h$ 가 0이 아닌 연속함수였다면...

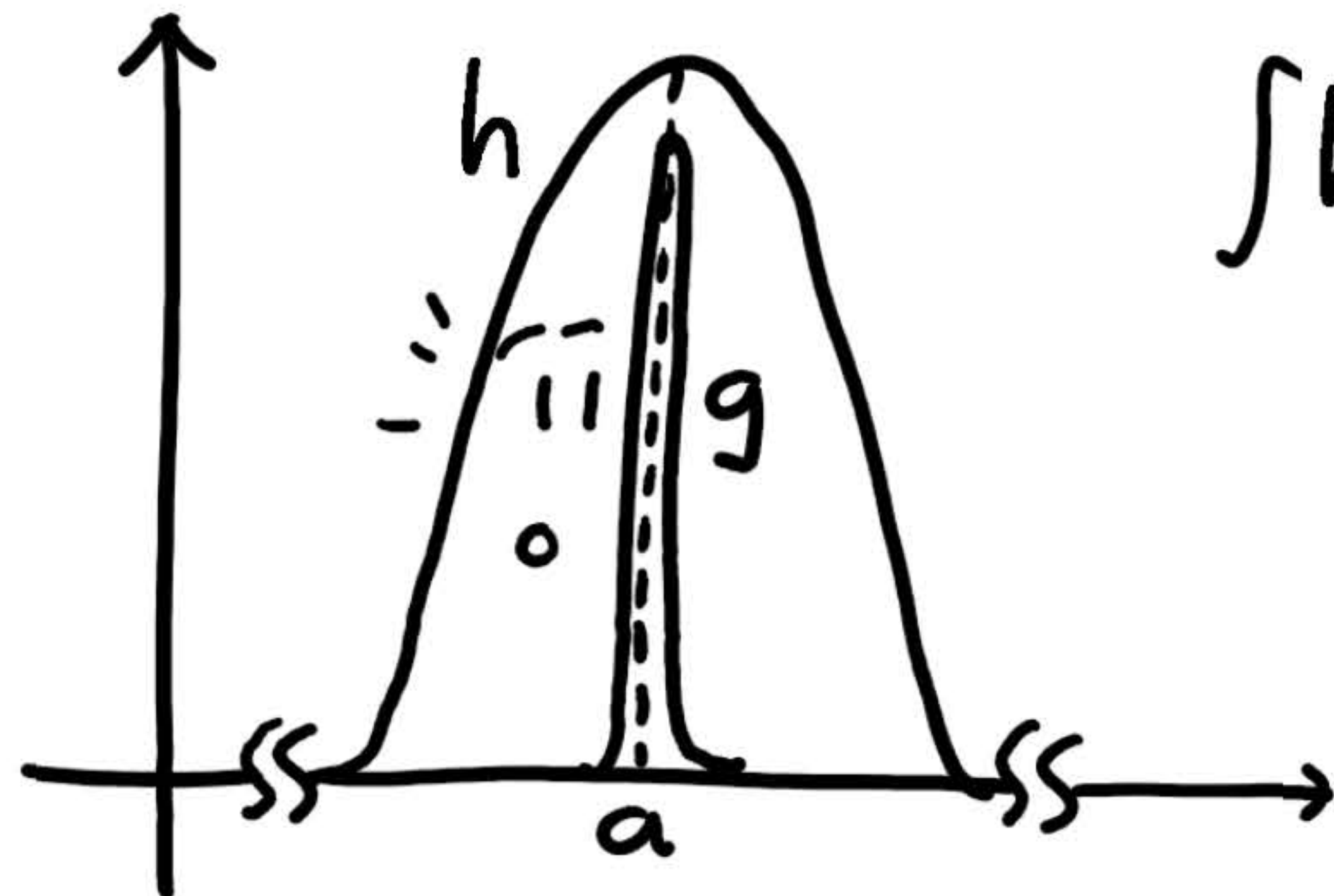


너 드루와 드루와

그 0이 아닌 지점 근처에 몰려 있는 테스트 함수를 집어넣어 주면,



$h$ 가  $a$  근처에서 0이 아니었다면 걸 잡아내 주죠. 즉 "함수의 함수" 관점에서 0이 아니었다면 거니 실격이네요.



$$\int hg^3 > 0$$

아니 내 값이 0이 아니라고?

그러니 그런 일이 없단 건,  $\therefore h \equiv 0$ .  $h$ 는 함수로서도 0이었던 거죠.

그러니까 이게 참 묘한 논리입니다. 다시 정리해 보면,

위치 정보를  
읽어내는 함수를  
미분방정식에서  
다루고 싶는데,

$$\delta(0)$$

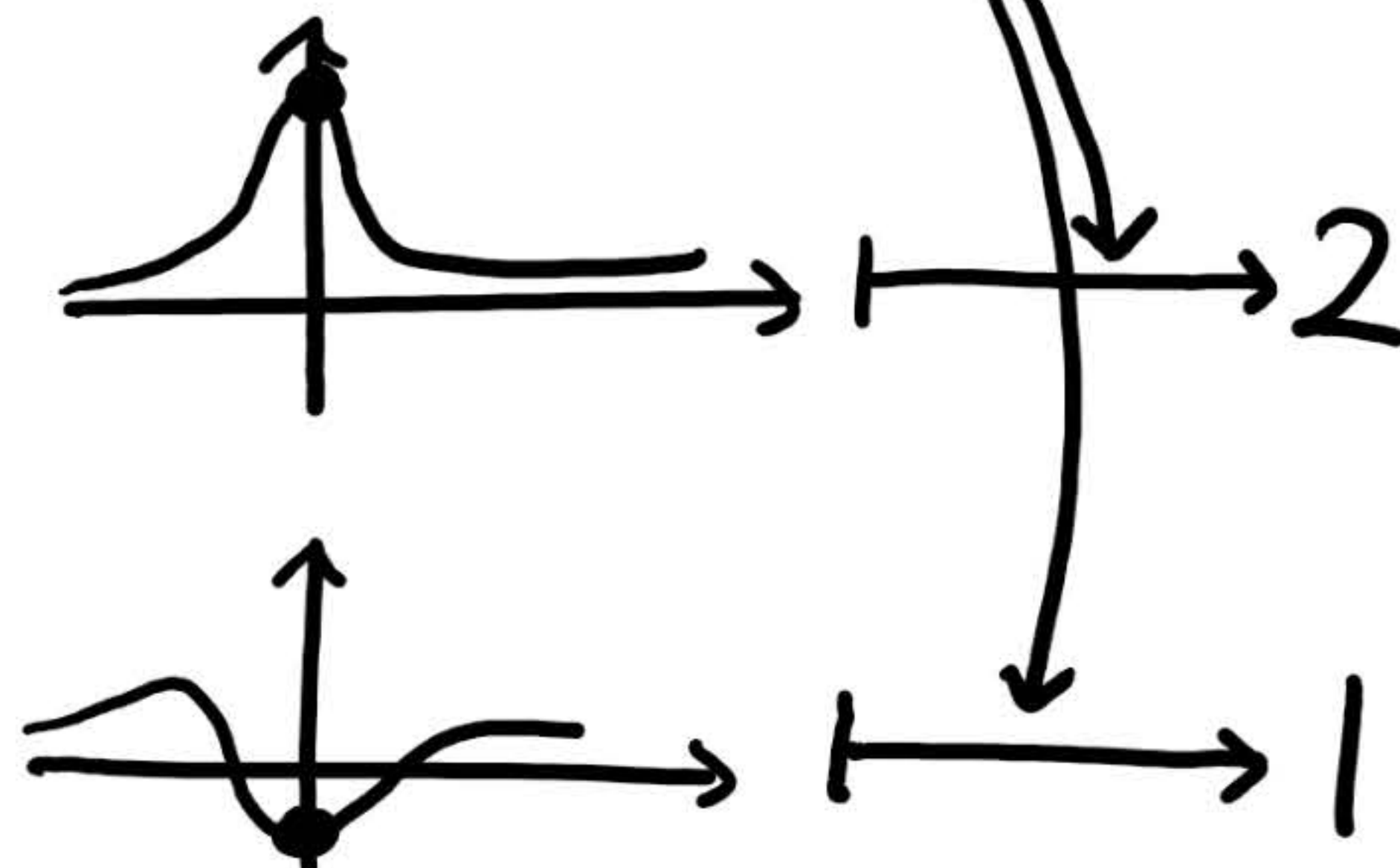
↑  
ERROR 404  
X X

난 함수로서  
다룰 수 없어π

나도 내 정체기가  
뭔지 원...

$$\Delta F = \delta(0)$$

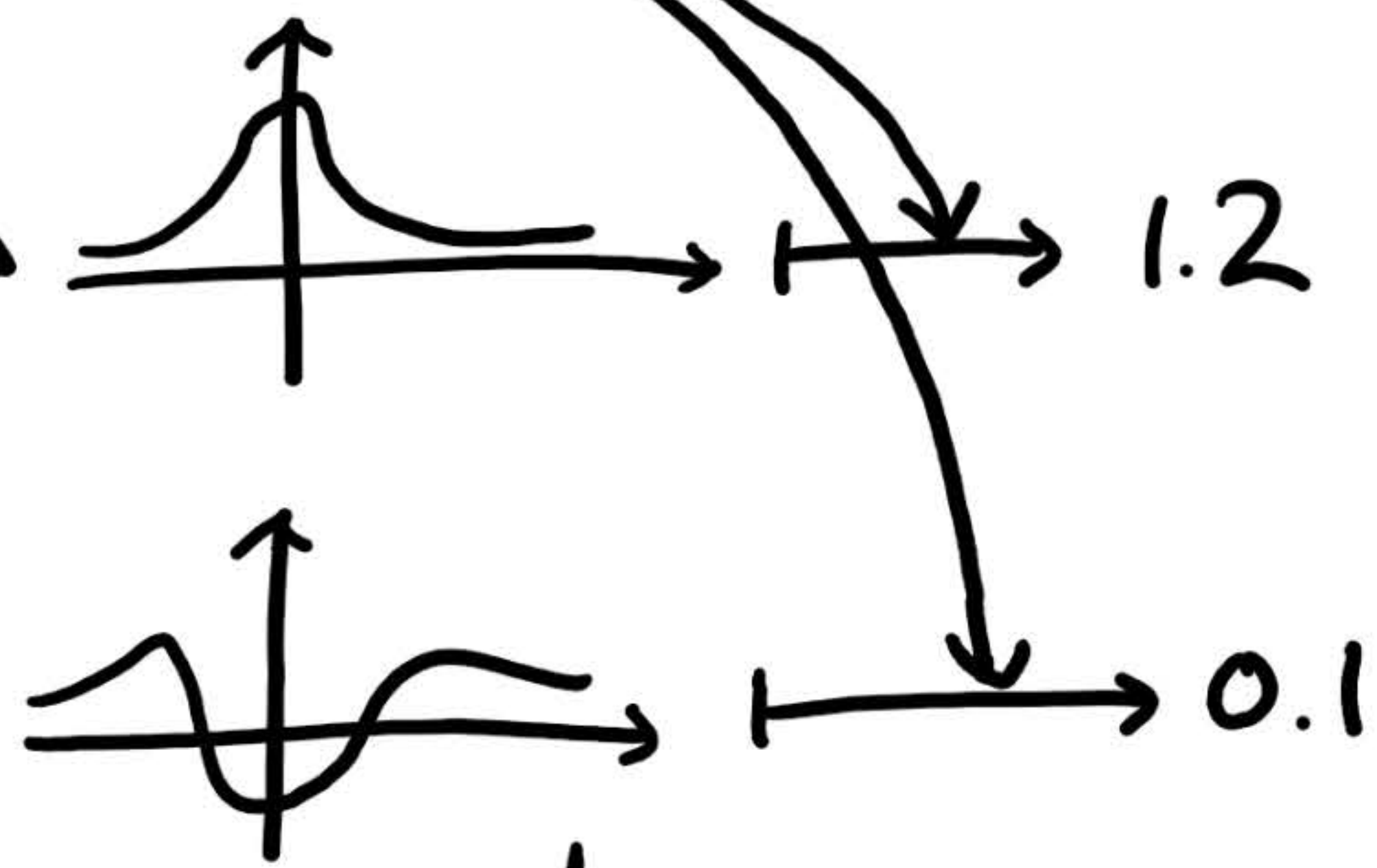
이런 묘상한  
해를 얻습니다.



→



⇒



그러니 "함수의  
함수"로서  
다루고,

우린 여기만 조진다.  
위에 녀석은 신경 꺼

$$\left( \begin{matrix} F \\ F^{-1} \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} i\xi_\alpha \\ D_\alpha \end{matrix} \right)$$

...이런 묘상한 형식을 통해서,

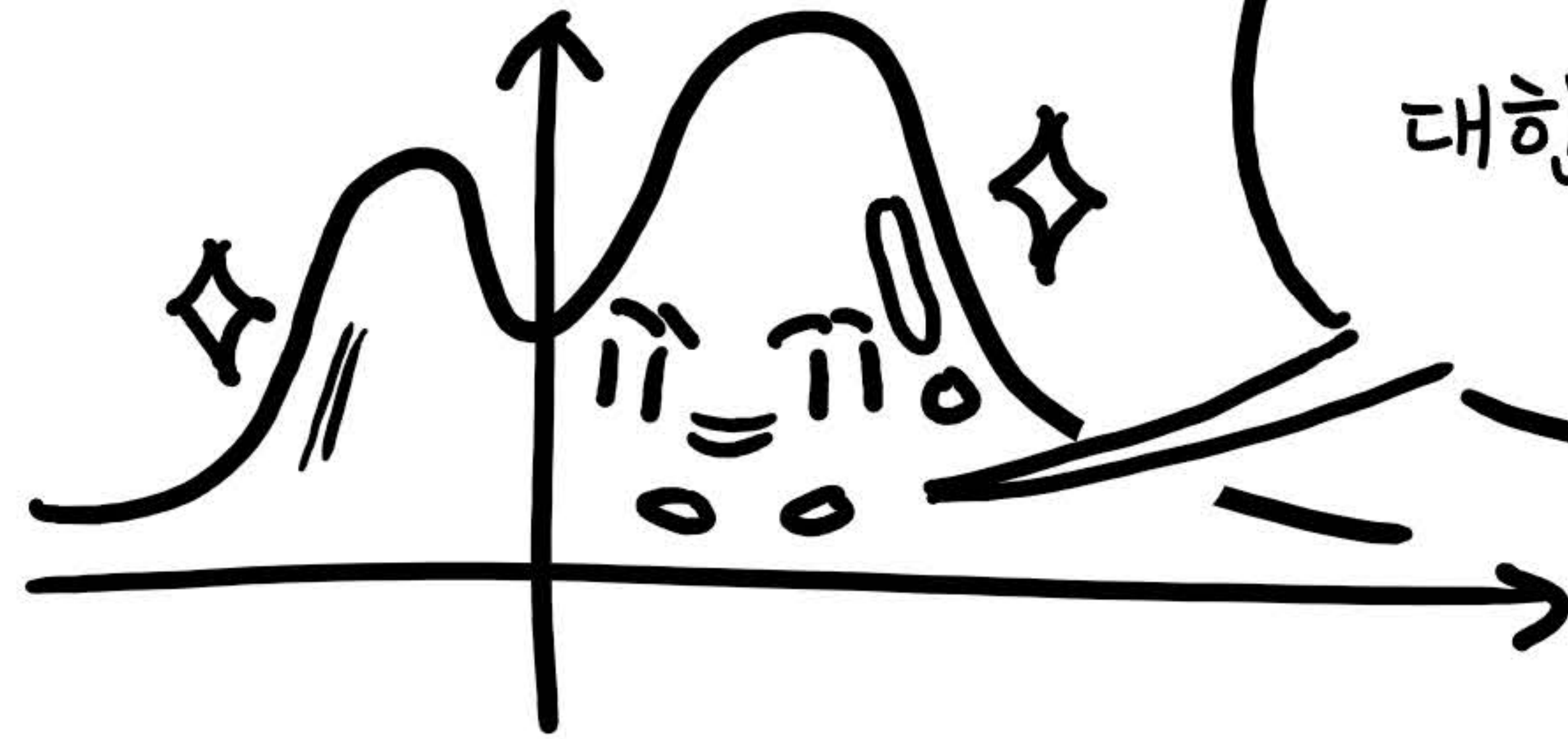
암튼 우리가 보기에는  
형식적인 해는 맞음

그리고 나서 이제 위치 정보  $f$ 를 대입합니다.

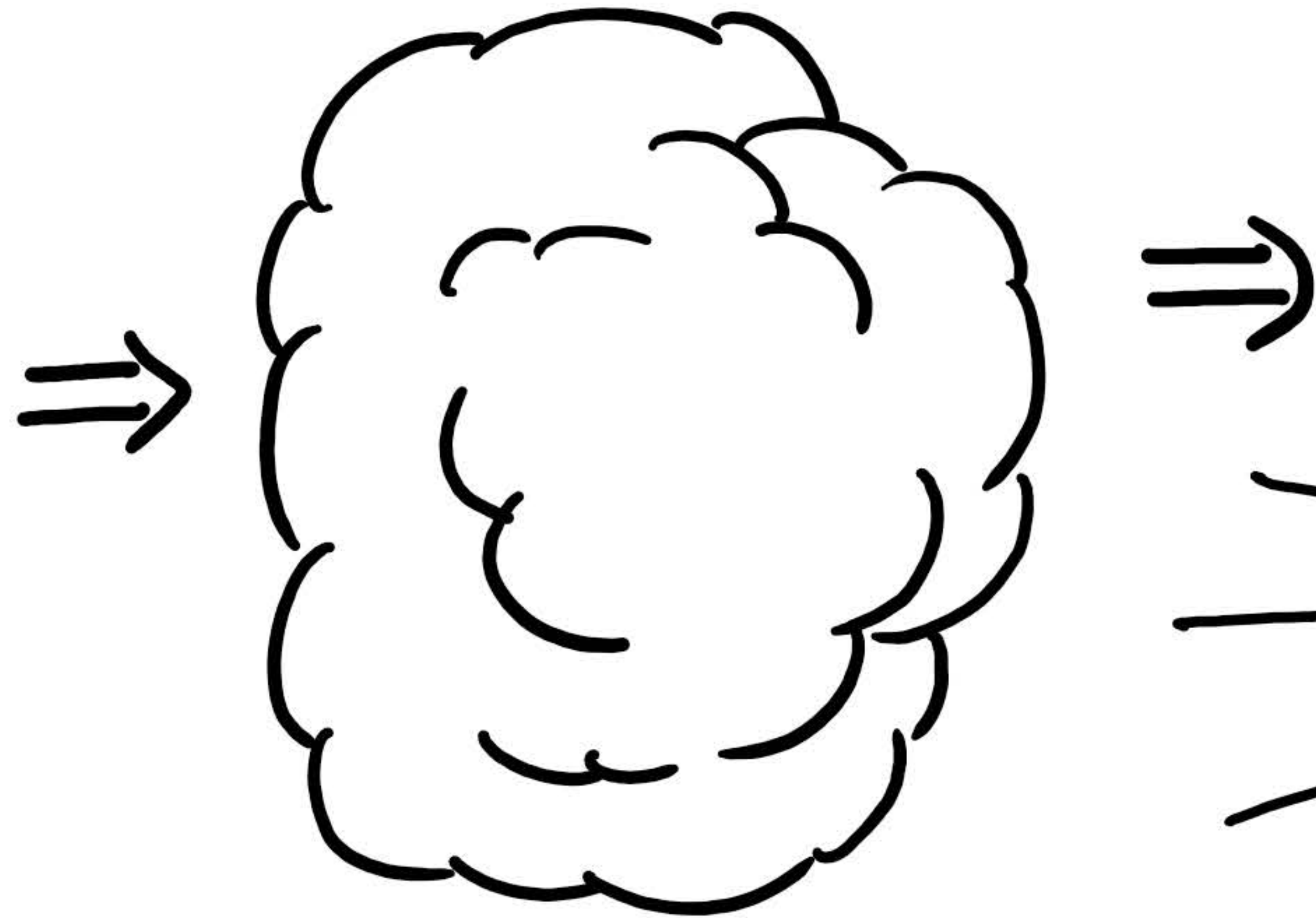
근데 만약  $f$ 가 충분히 좋은 함수였다면...

사실 이 과정도 초함수에 직접 하지 않고  
테스트 함수들에 한다고 볼 수 있어요.

$$\Delta (F * f) = \delta * f = f$$

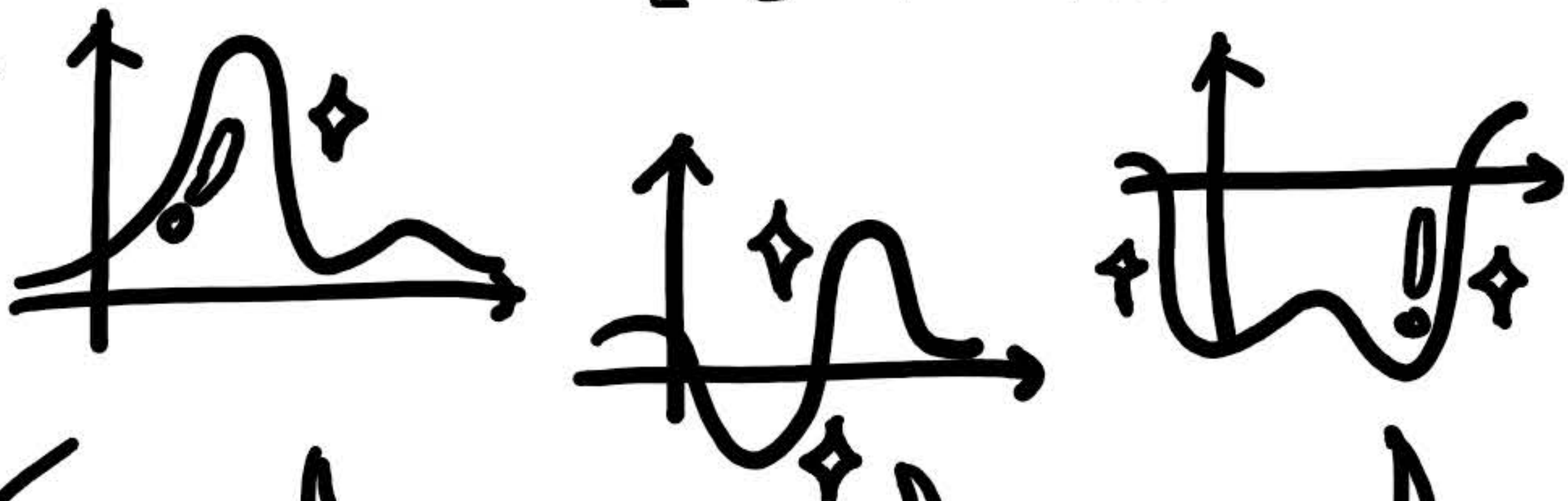


어메 나도 "x에  
대한 매끄러운 함수"가  
돼 버렸네



테스트 함수만  
노린다.

뿐만 아니라...



님은 형식적인 해 말고 진짜배기 해로  
우리가 인정해 드림!

이렇게 테스트 함수들이 인증까지 해주는 상황이 된 거죠.

더 쉽게 나타내 보자면...



자, 이 녀석에 대한 미방 해를 좀 구해 오너라.

앵 그게 짐이 요구한 해란 말이나?

엑, 저걸 어떻게 한담!

일단 이 키트 써보자

뭐야 이상한데?

일단 해

잘 되고 있남?

물론이옵니다 충성

헤헤 그렇습지요.

제조 방법이 수상한데?

지시약으로 시험해 보죠.

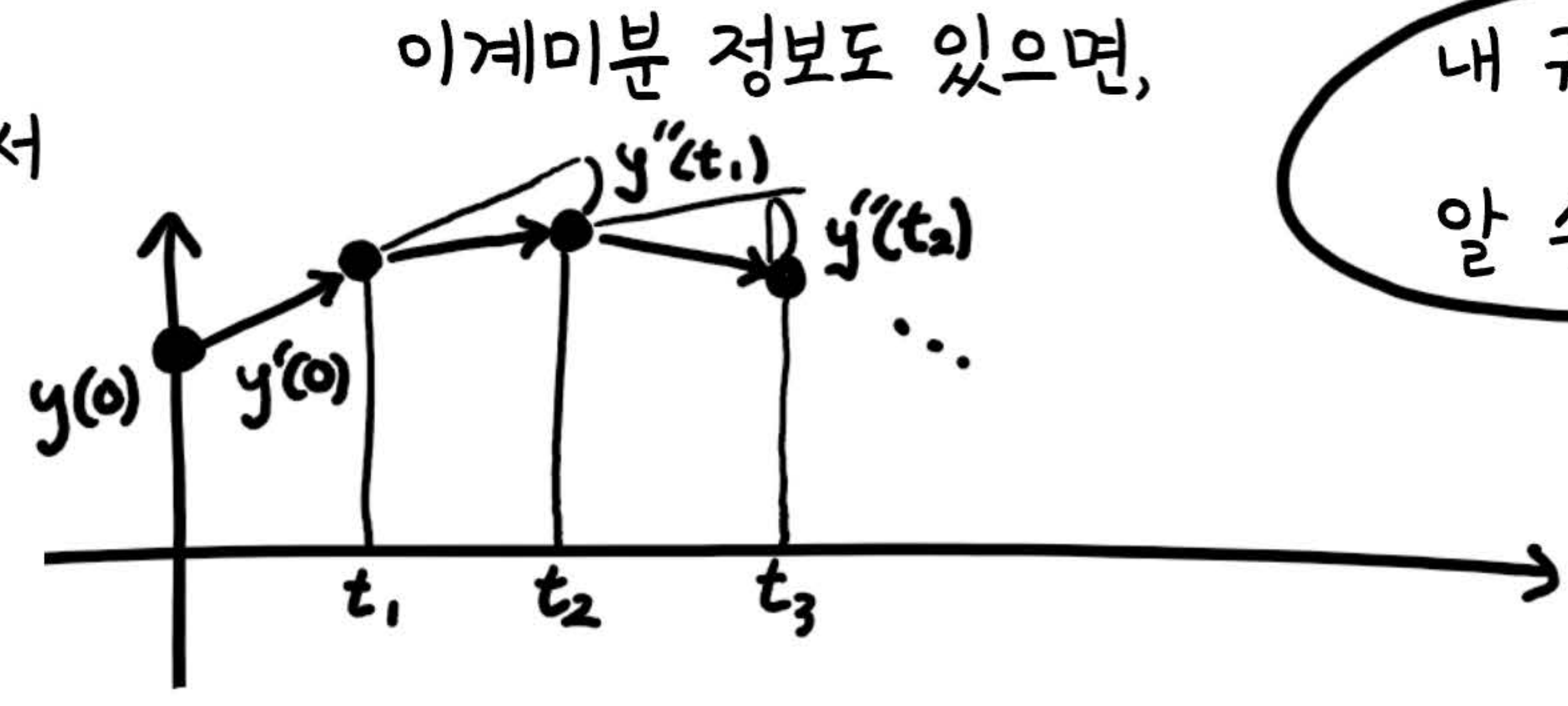
음, 그렇군.

여기서 지시약 역할을 하는 게 테스트 함수죠.



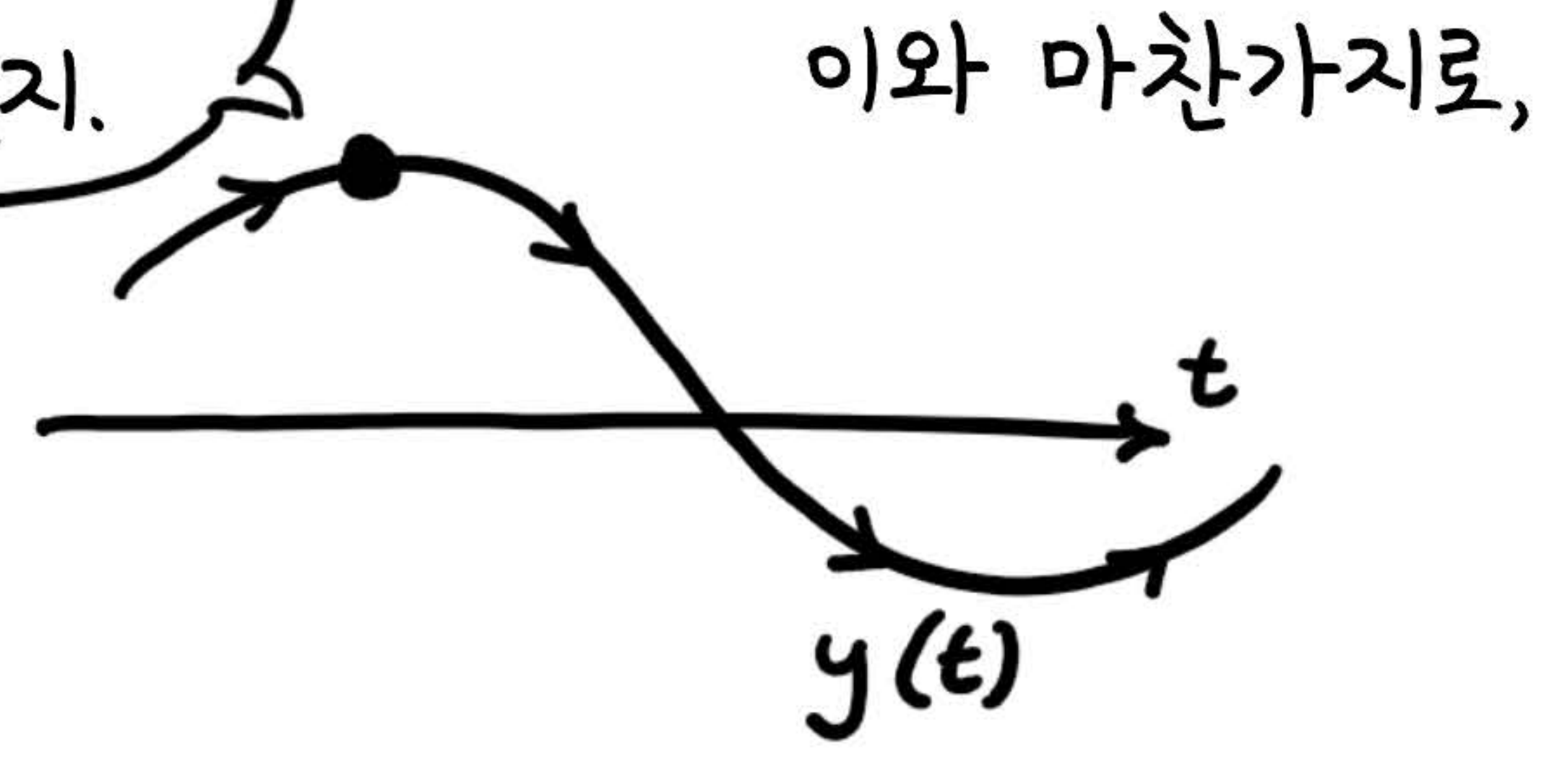
여기서 한 발짝만 더 나아가 봅시다. 지금 방법은 초기값 문제를 풀 때도 쓸 수 있는데요,

처음 시점에서  
함숫값 및  
미분 정보가  
주어지고,

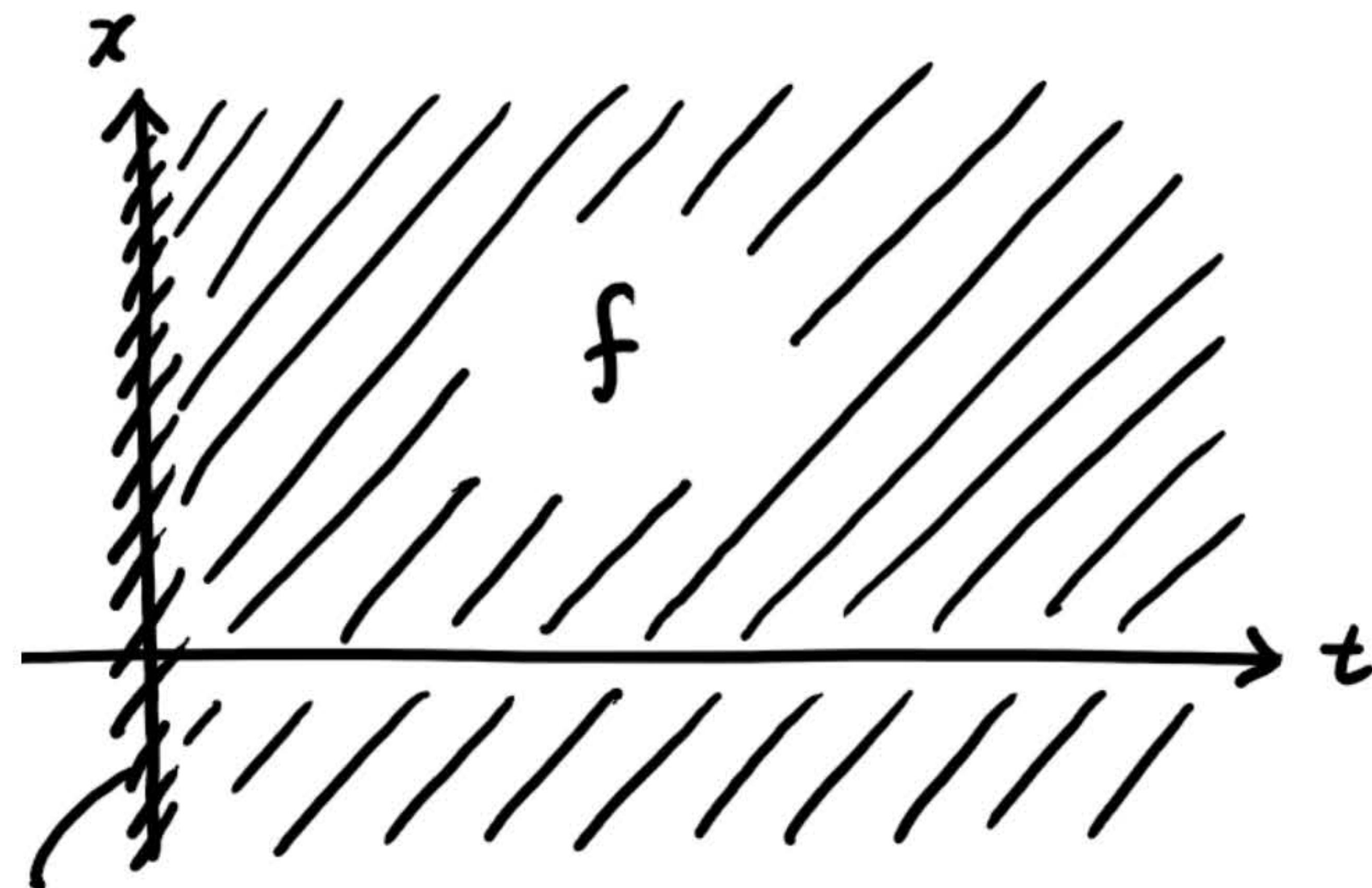


이계미분 정보도 있으면,

내 궤적을  
알 수 있지.



특정 영역에서의  
이계미분 정보 및  
경계값에서의  
함숫값/미분 정보가  
같이 주어지면,

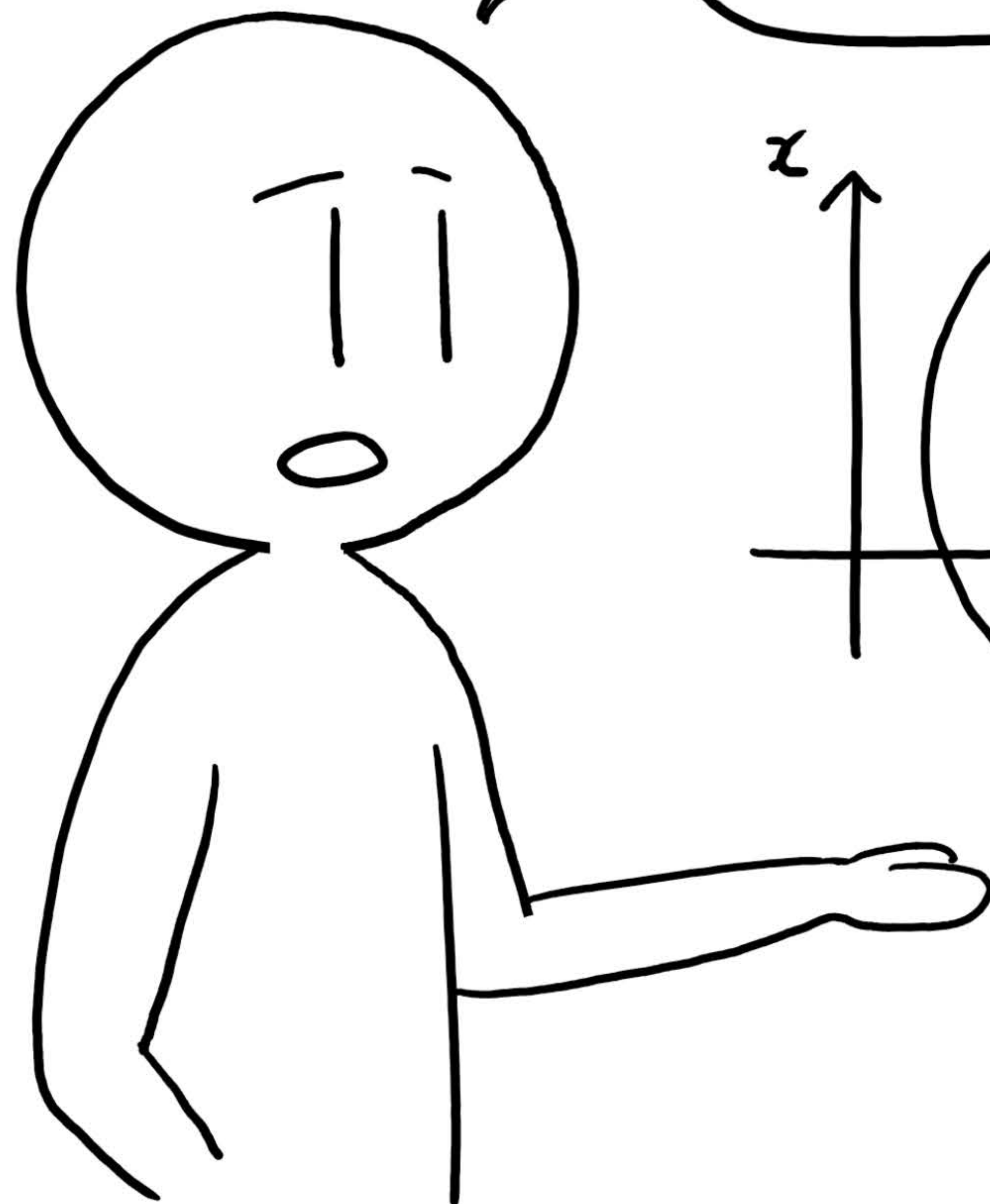


$$(g_0, g_1) = (V, \partial_t V)$$

$$\Rightarrow V = F * f 1\Omega + \partial_t F * g_0 1\Omega + F * g_1 1\Omega$$

디랙 델타가 경계값 정보까지  
읽어내서 해를 제공합니다.

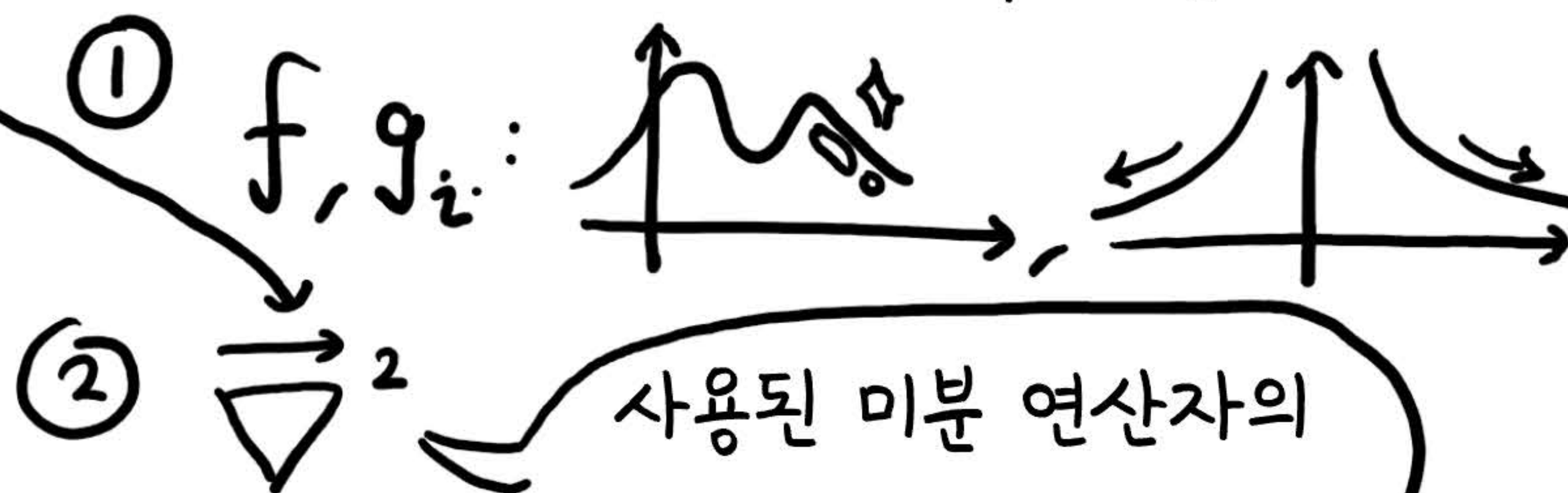
이 경우에도 초함수 관점에서 구한 해가 "진짜 함수로서"도 해라고 말할 수 있을까요? 그 답은 다음 요소에 달려는데요,



$$\vec{\nabla}^2 u = f \quad (x \in \Omega),$$

$$(u, \frac{\partial u}{\partial t}) = (g_0, g_1) \quad (x \in \partial\Omega)$$

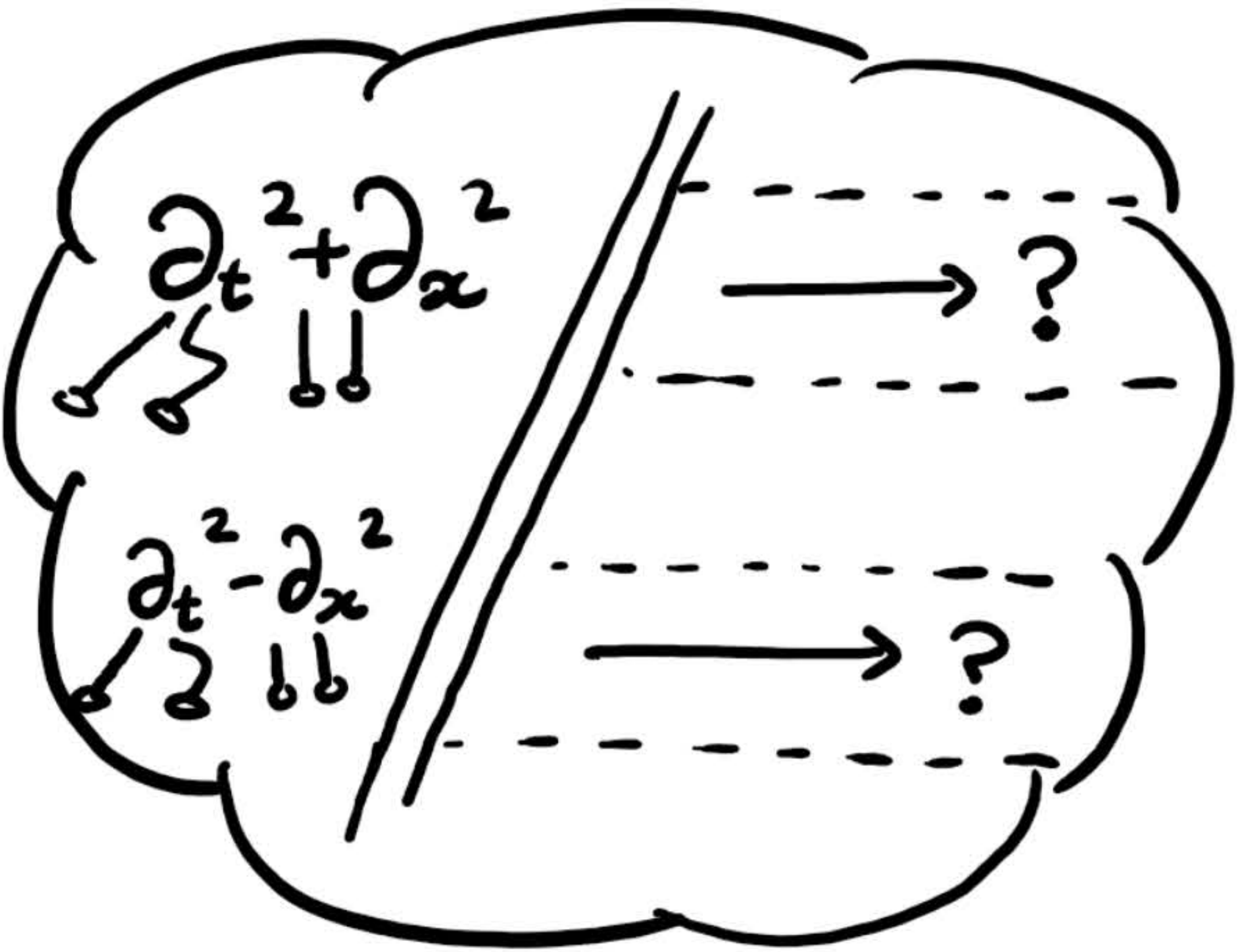
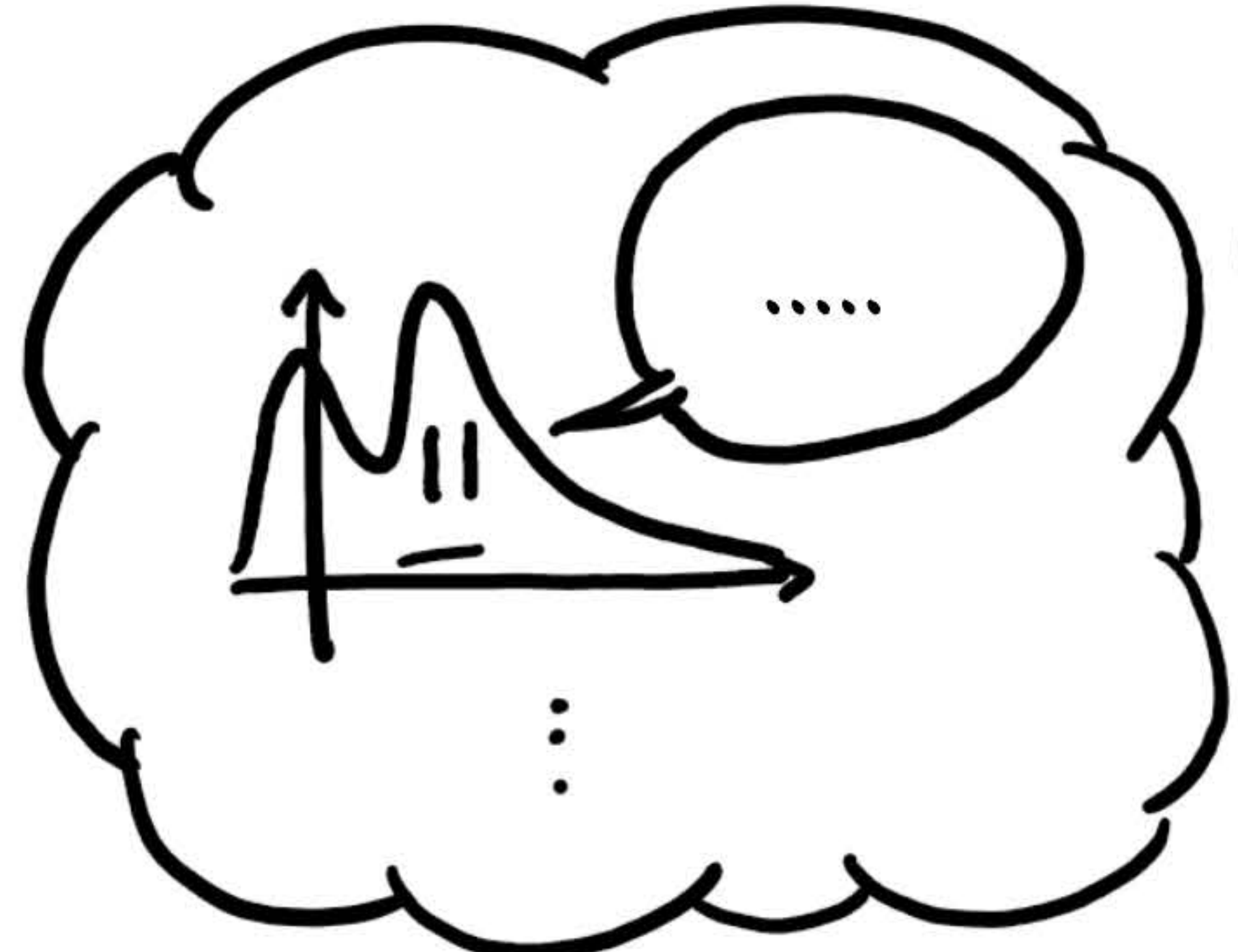
정보 함수들이 "충분히 부드러운지"가 그 하나고,



사용된 미분 연산자의 성질이 다른 하나예요.

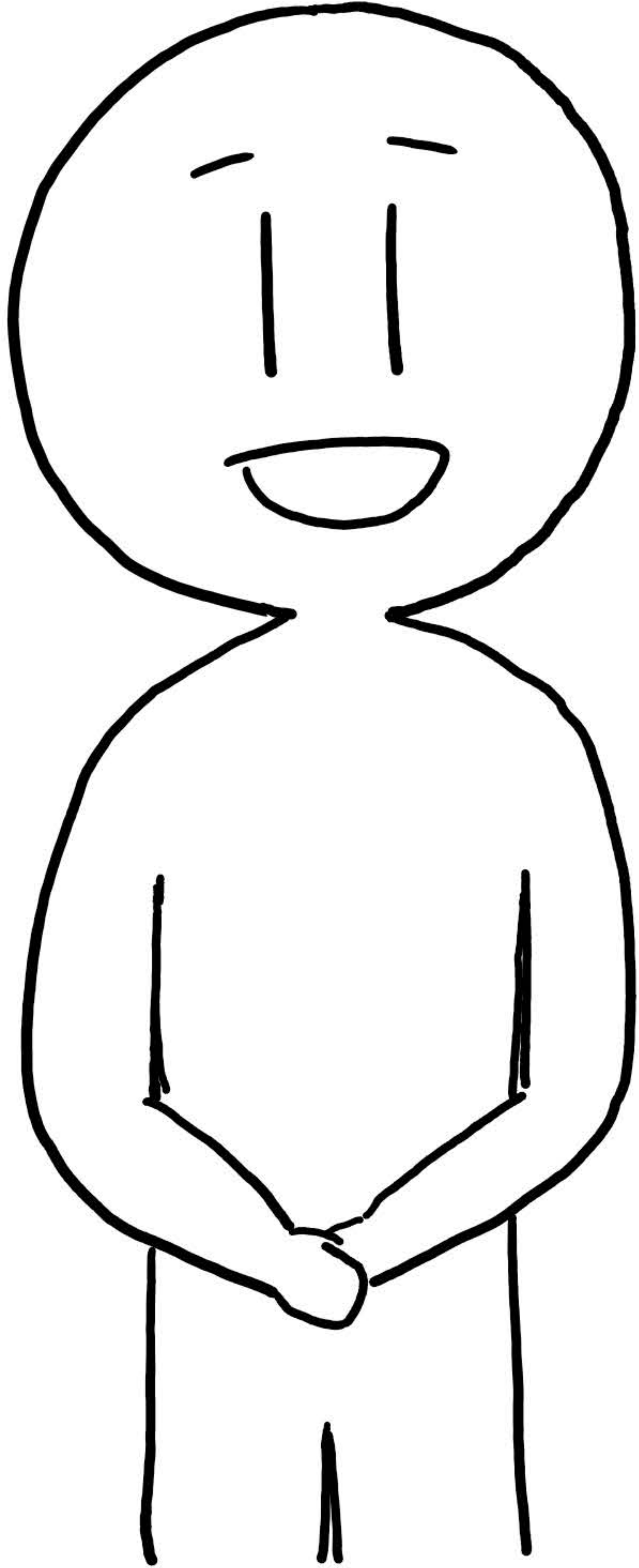
여기서 두번째 요소인  
"미분 연산자의 성질"이 상당히  
중요한 개념입니다.

이것에 따라, 같은 차수의  
방정식에서도 필요한 초기값 정보나 해의  
부드러움 정도가 달라지거든요.



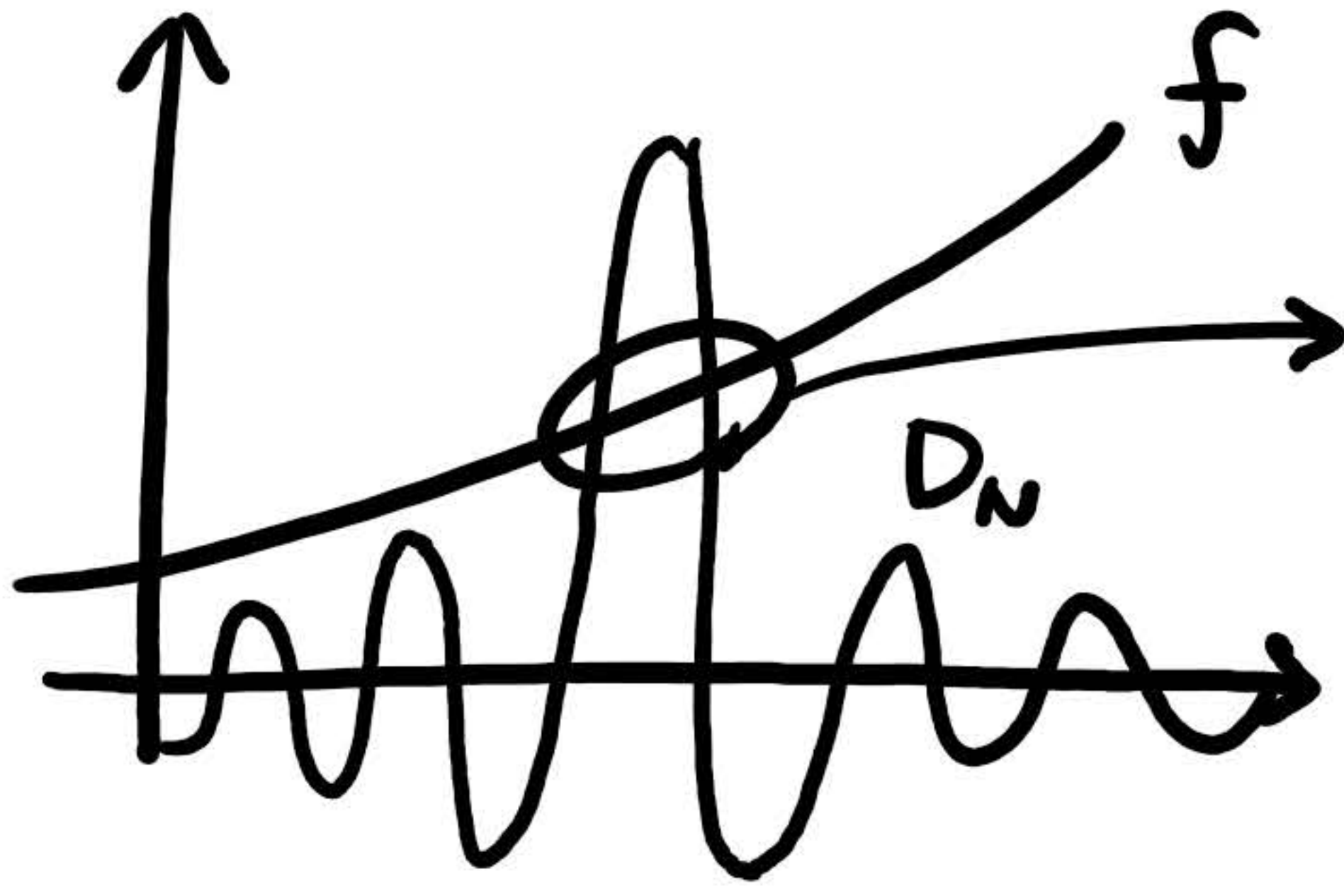
이 부분도 설명드리고 싶지만, 분량상 이쯤에서 해석학 얘기를 마무리하겠습니다.

여섯 화 동안의  
해석학 얘기, 어떠셨나요?  
재밌게 읽어 주셨다면  
더 바랄 나위가  
없겠네요.

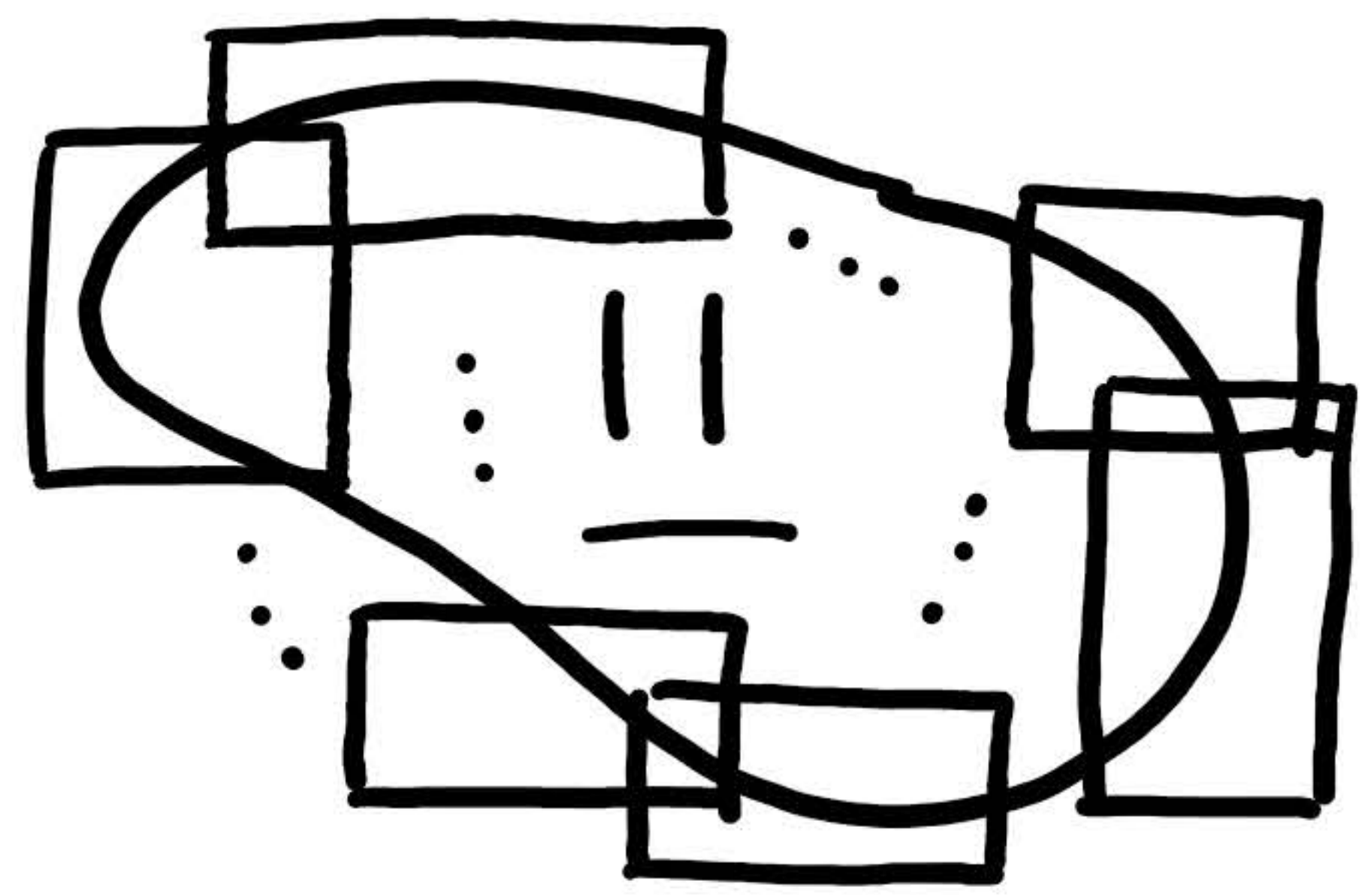


이번 만화에서는 해석학의 큰  
줄기 중 하나인 "푸리에 해석학"의  
발전을 따라가면서, 거기에 엮인  
세 가지 개념을 살펴보았어요.

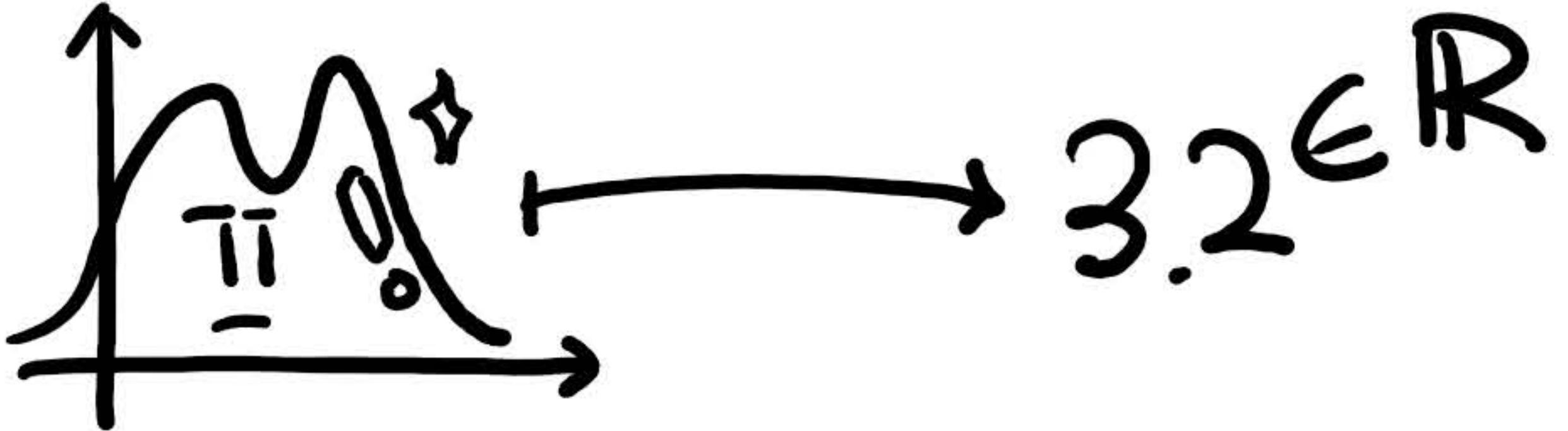
(간단한) 적분 연산자 및 진동 적분,




르베 측도 및 르베 적분,



그리고 "함수의 함수"인 초함수였죠.



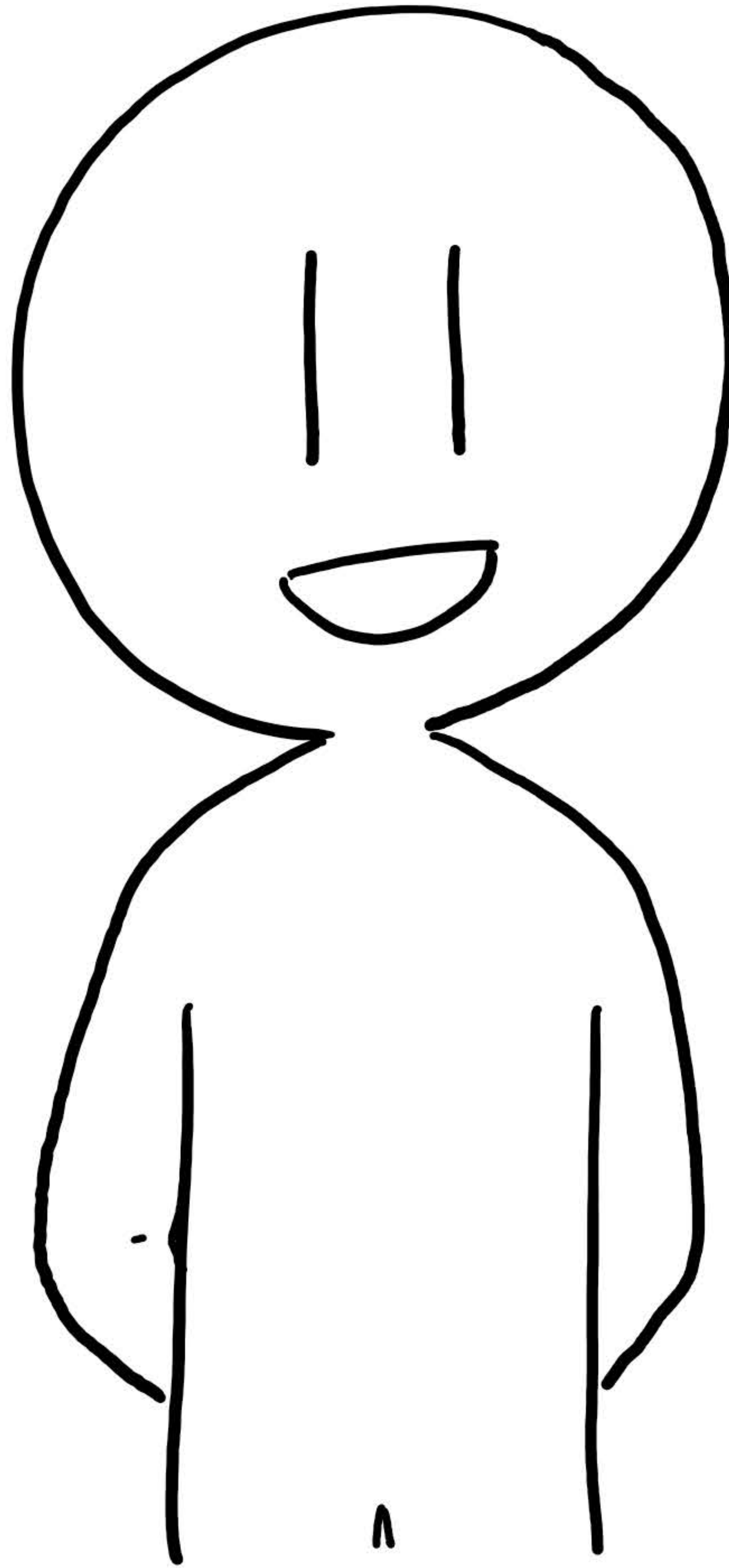


개념과 같이 역사적인 흐름도  
그려내고 싶었지만, 분량상 단편적인 얘기  
밖에 드릴 수가 없었네요 ㅠㅠ 실제 역사는  
이보다 훨씬 복잡했습니다!

ㅠㅠ 다음  
작품 그릴 때는  
균형을 더 잡아  
볼게요...

우리도 한몫 했는데, 우리 얘기는 언제 해줄거야??

그럼 저는 여기서  
이만 인사드리고, 다른  
작품에서 다시 찾아  
뵙겠습니다.



다들 안녕히  
계세요!!

- 해석학하는 만화 끝.