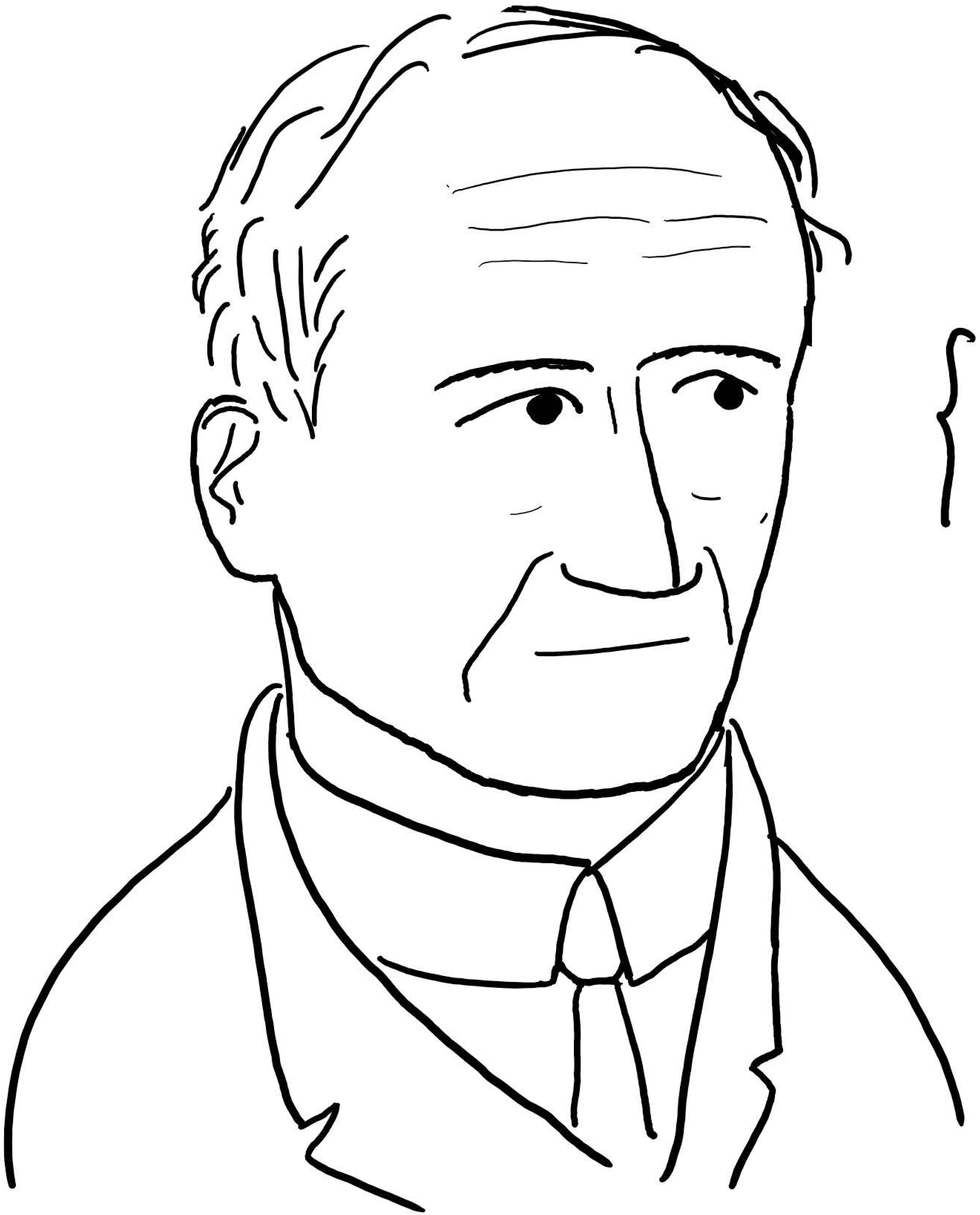
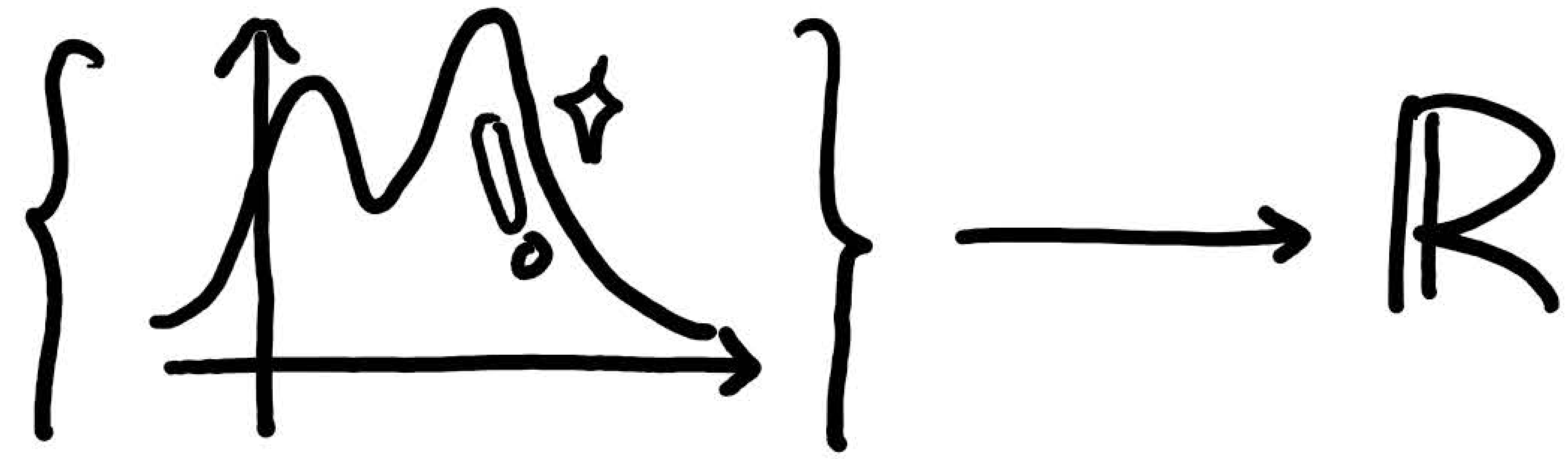


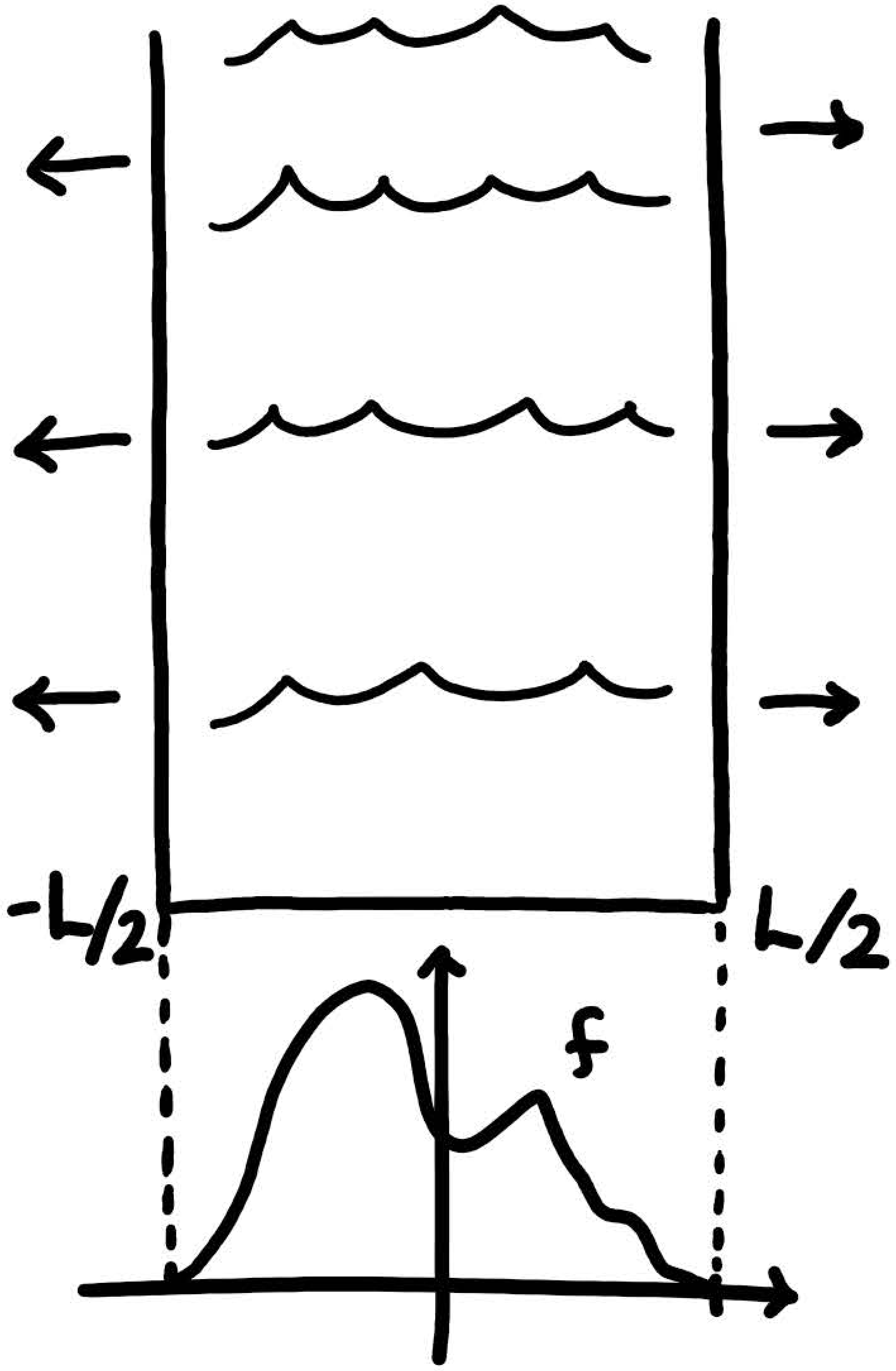


해석학하는 만화 6

– 디랙 델타...?? –

지난 다섯 화 동안 우리는 다음과 같은 주제를 공부했어요.
푸리에의 주장을 시작으로,
주어진 함수를 복소지수함수들의 무한 합으로 나타내자!
① (적당히 좋은) 함수에 대한 디리클레 커널의 효과를 봤고,
f * D_N
정확히 $f(x)$ 값을 뽑아내지!
② 그러나 더 일반적인 함수에 대해 푸리에 급수를 다루려면 새로운 적분 이론이 필요했어요.
$\in \ell^2$
$m(E)=0$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$
그걸 르벡이 제시했고, 이 프레임 안에서는 함숫값 하나하나는 더 이상 중요하지 않게 됐죠.

이제까지 한 얘기는 다음 세팅으로도 확장할 수 있어요.



유한 구간 위에서의 주기함수에

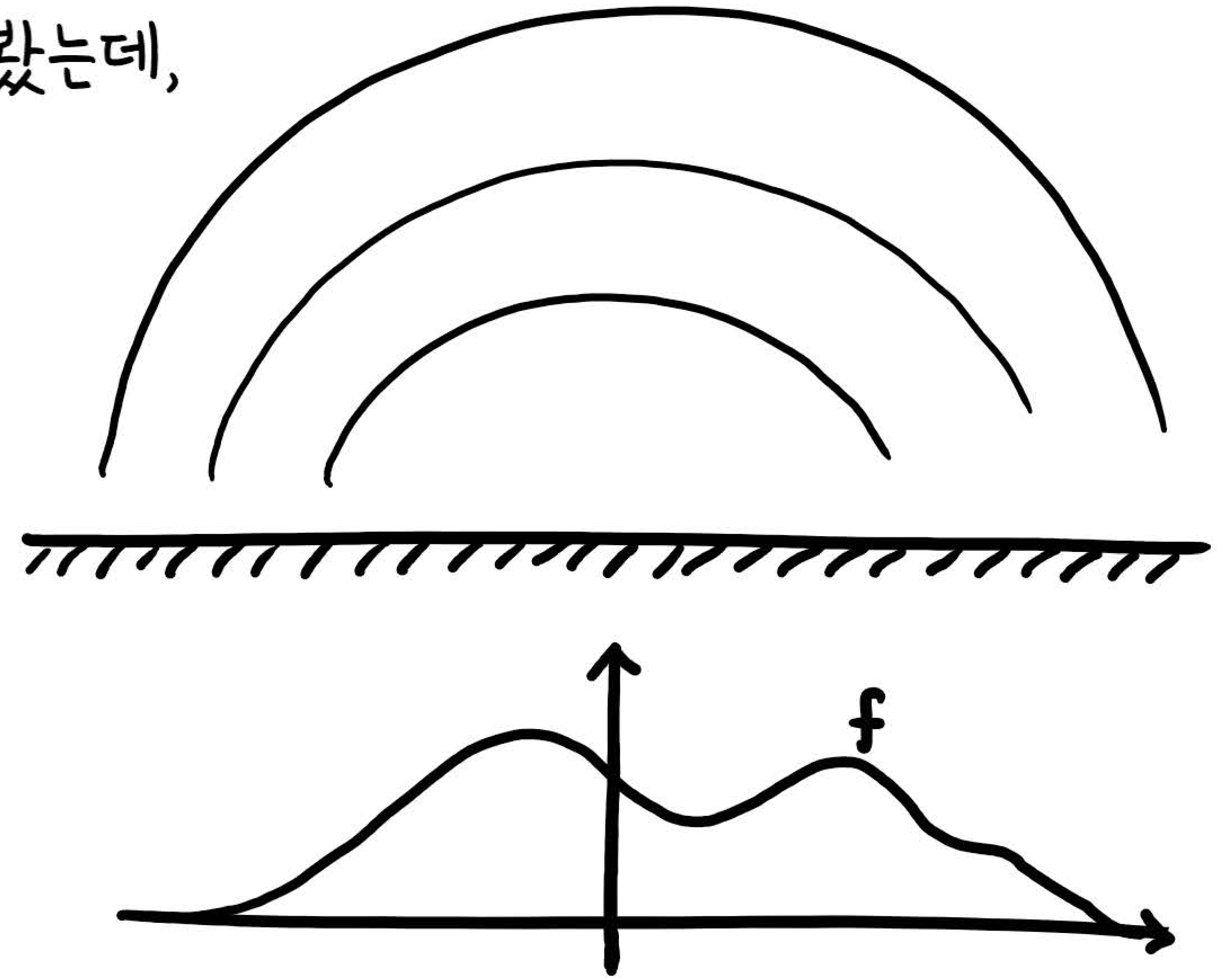
대한 푸리에 급수를 봤는데,

$$\xRightarrow[L\to\infty]{}$$

이 구간의 길이를

무한히 늘려버리면

어떻게 될까요?



$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{L}\Bigg(\underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} f(t)\,e^{-i\frac{2\pi n}{L}t}}_{\text{푸리에 계수}}\Bigg)e^{i\frac{2\pi n}{L}x}}_{\text{푸리에 급수}} \Longrightarrow \ ???$$

이 경우, 무한 합은 마치 리만 적분을 묘사하는 효과를 나타내고

여기에 극한을 취하면...

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\frac{1}{L}}_{\Delta\xi}\left(\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-i\overset{\xi}{\frac{2\pi n}{L}}t}\,dt\right) e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\xi t}\,dt}_{\text{푸리에 변환}}\right) e^{2\pi i\xi x}}_{\text{푸리에 역변환}}$$

이렇게 적분 형태가 등장합니다. 바로 수직선 전체 위에서의 푸리에 변환 및 역변환이죠.

푸리에 급수 때와

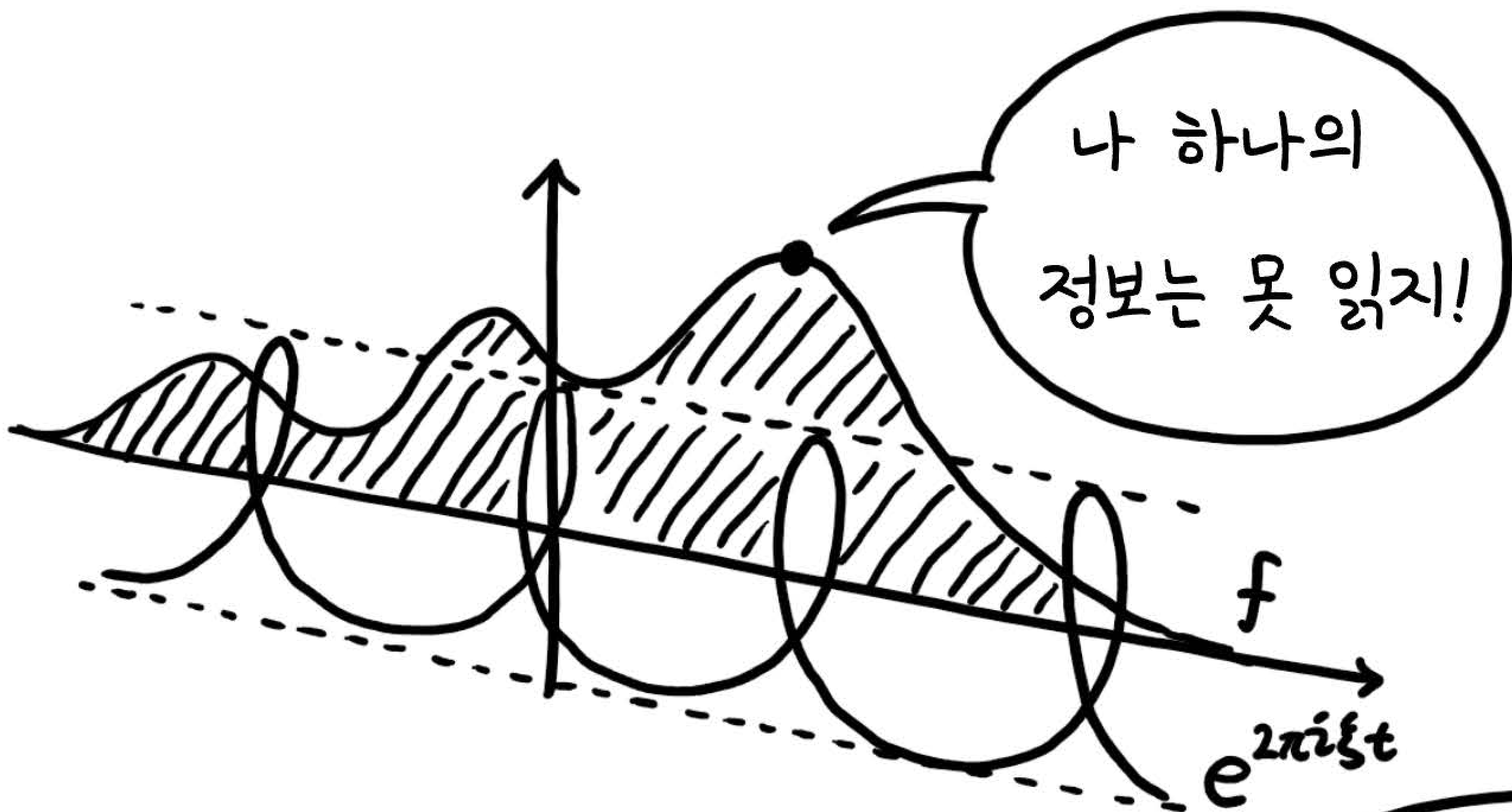
마찬가지로, 이 변환은

미분과 잘 어울리기 때문에

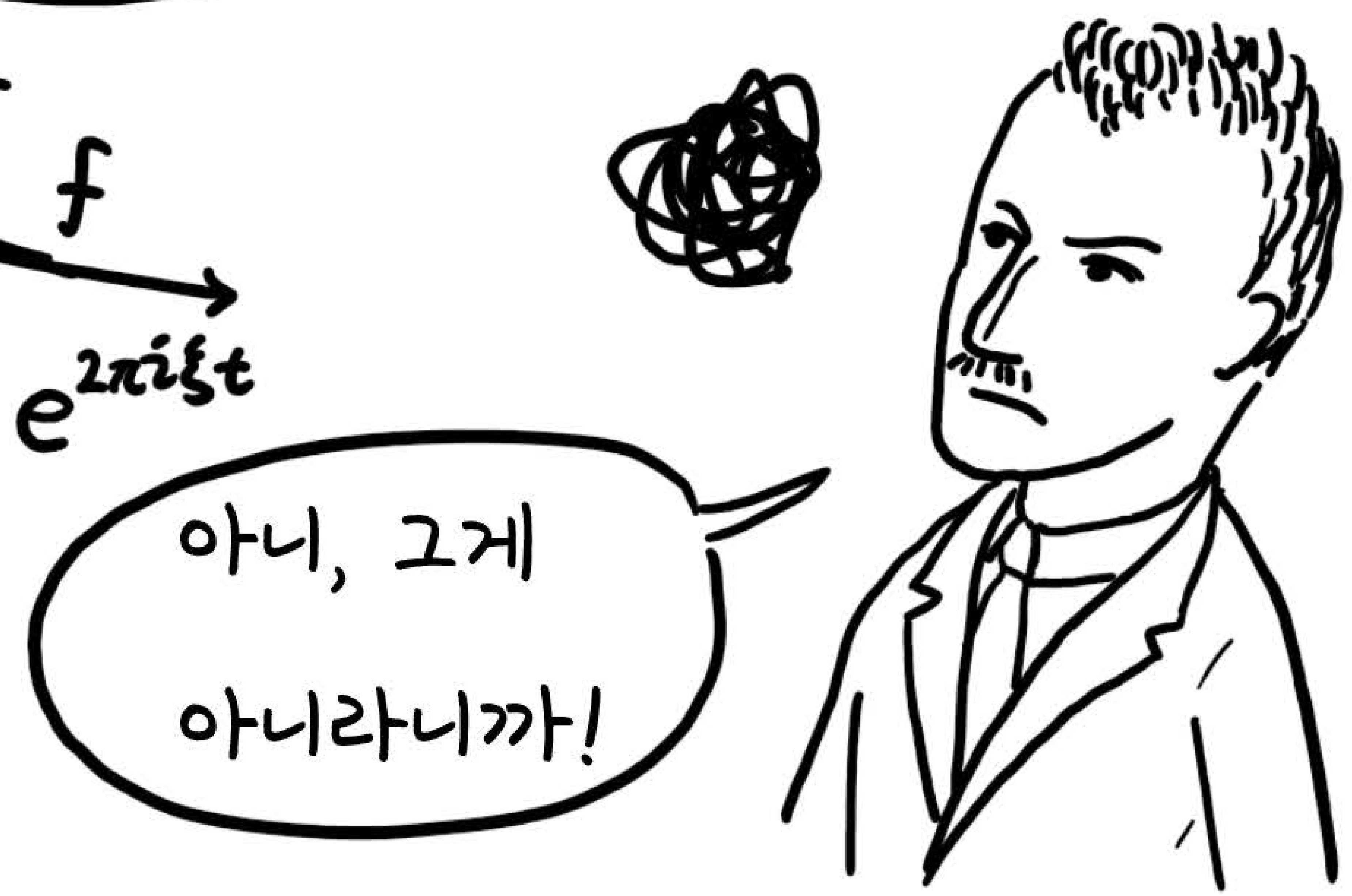
편미분방정식을 풀 때 유용하죠.

$$\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \widehat{\left(-2\pi i x f(x)\right)}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(2\pi i \xi \hat{f}(\xi)\right)^{\vee}$$



$$\boxed{f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)}$$



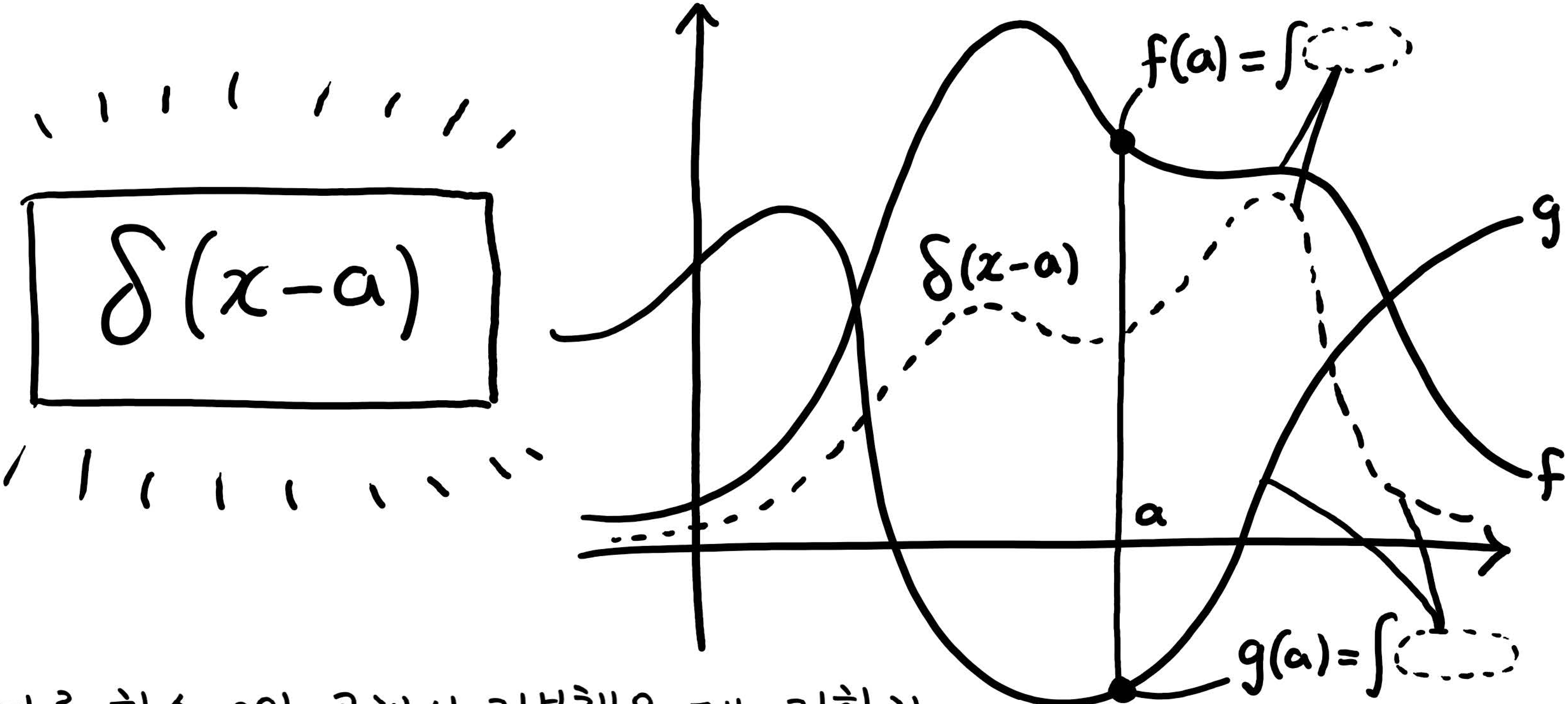
흠, 디랙 아저씨는 불만이 있나 보네요.

그러나 역시나 적분을 통한 변환이기 때문에,

한 점 한 점에서의 정보는 잃을 수밖에 없...

디랙은 디랙 델타 함수라는 걸 양자역학 계산에 열심히 사용했어요.

그 함수의 역할은...



다른 함수 f와 곱해서 적분했을 때, 정확히

원하는 지점에서의 f의 값을 읽어내는 함수였죠.


근데 잠시, 이런 현상이 일어날 수가 있나요? 적분 이론을 생각해 보면,
① a를 비껴난 펄스를 곱하면 항상 0이니,
a 이외에는 값이 0이군!
?
×
a b
a b
= 0
⇒ δ(b−a) = 0
?
a
여기서 모두 값이 0
아니 딱 한 점 빼고는 함숫값이 0이란 건… 적분해도 0이죠 그럼
아니 이게 적절한 함수는 아닌데… 음…
흠, 뭔가 이상하네요. 우리가 아는 함수하고는 다른 것 같아요.

한번 다른 관점에서 살펴볼까요? 우리가 아는 선형대수 이론은 크게 두 가지가 있어요.

$$V = \langle e_1, \cdots, e_n \rangle \qquad V = \langle e_1, e_2, \cdots \rangle$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \xmapsto[(L_{mn})]{L} \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = L\vec{v} = \left(\sum_{j=1}^{n} L_{ij} v_j \right)_{i=1}^{n}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} v_i e_i \xmapsto[\substack{(L_{mn}) \\ (m, n \in \mathbb{Z})}]{L} \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} L_{ij} v_j \right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

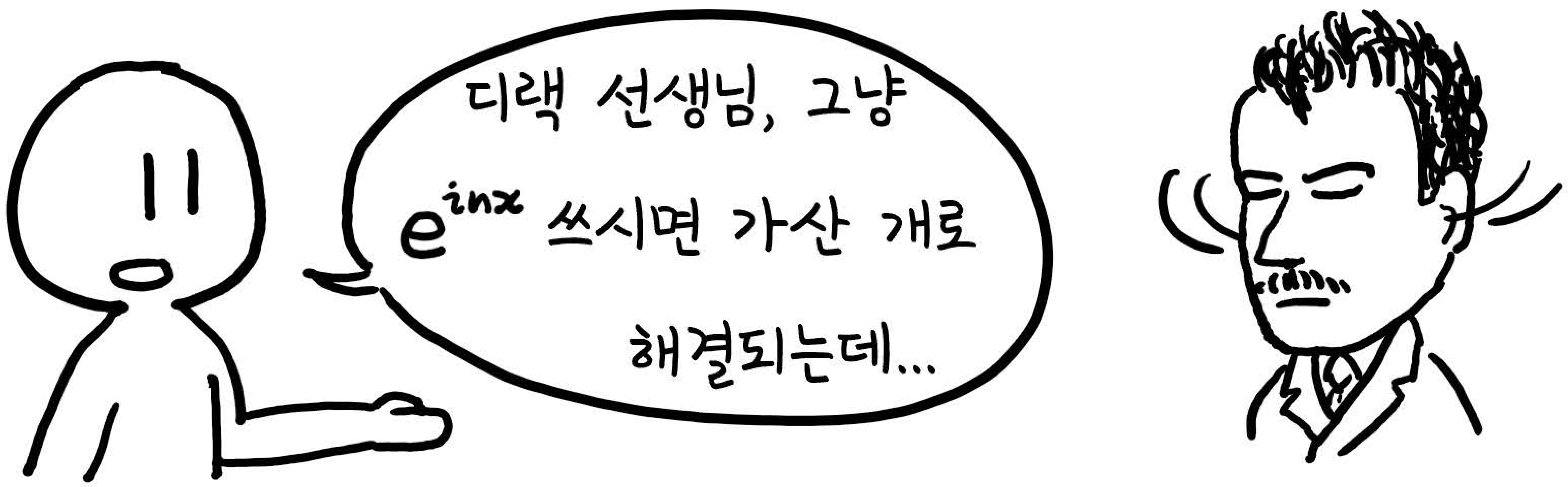
유한 차원 이론은 매우 깔끔합니다. 벡터의 유한합만 다루면 되고, 행렬들도 유한하죠.

그에 비해 가산 기저로 기술되는 공간에서는.... 무한합 등을 잘 다뤄야 하지만, 여전히 비슷해요.

$$f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) \text{ or } \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

그런데, 디랙이 다루고 싶어한 공간은

사실 가산 기저로 만들어지거든요.



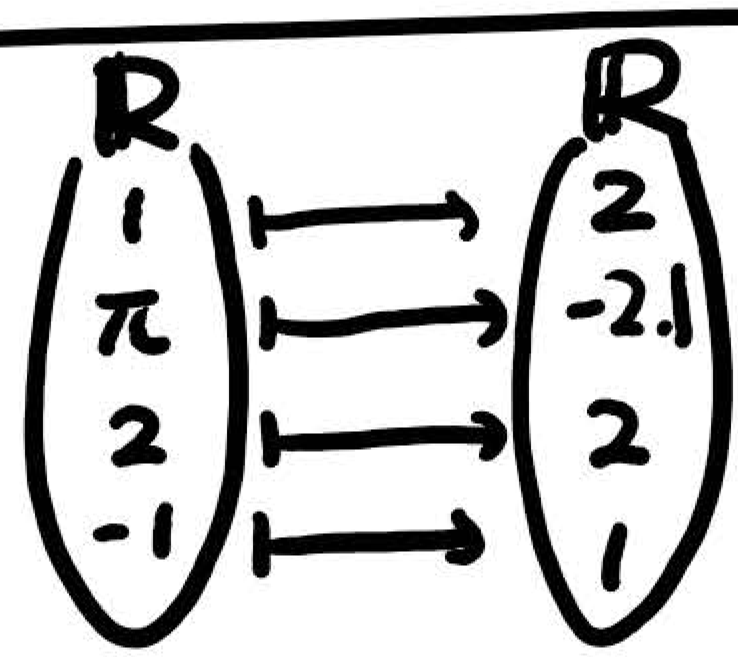
하지만 디랙은

굳이 가산 개를 벗어나

실수 개로 분해하겠다고

선언한 거예요.

$f(x)$:



$$: f(x) = \int_\alpha f(\alpha) \cdot \boxed{}$$

$$\delta(x-\alpha)$$

각 지점 x에서의 f의 작용을 읽어내는

방식으로 분해하면, 실수 개의

함수로도 분해할 수 있단 거였죠.

그 작용을 해 주는 함수를

$\delta(x-\alpha)$라고 한 거구요.

그리고 이 과정은 또다른 함수들에 대해서도 가능해요.

바로 복소지수함수들이죠.

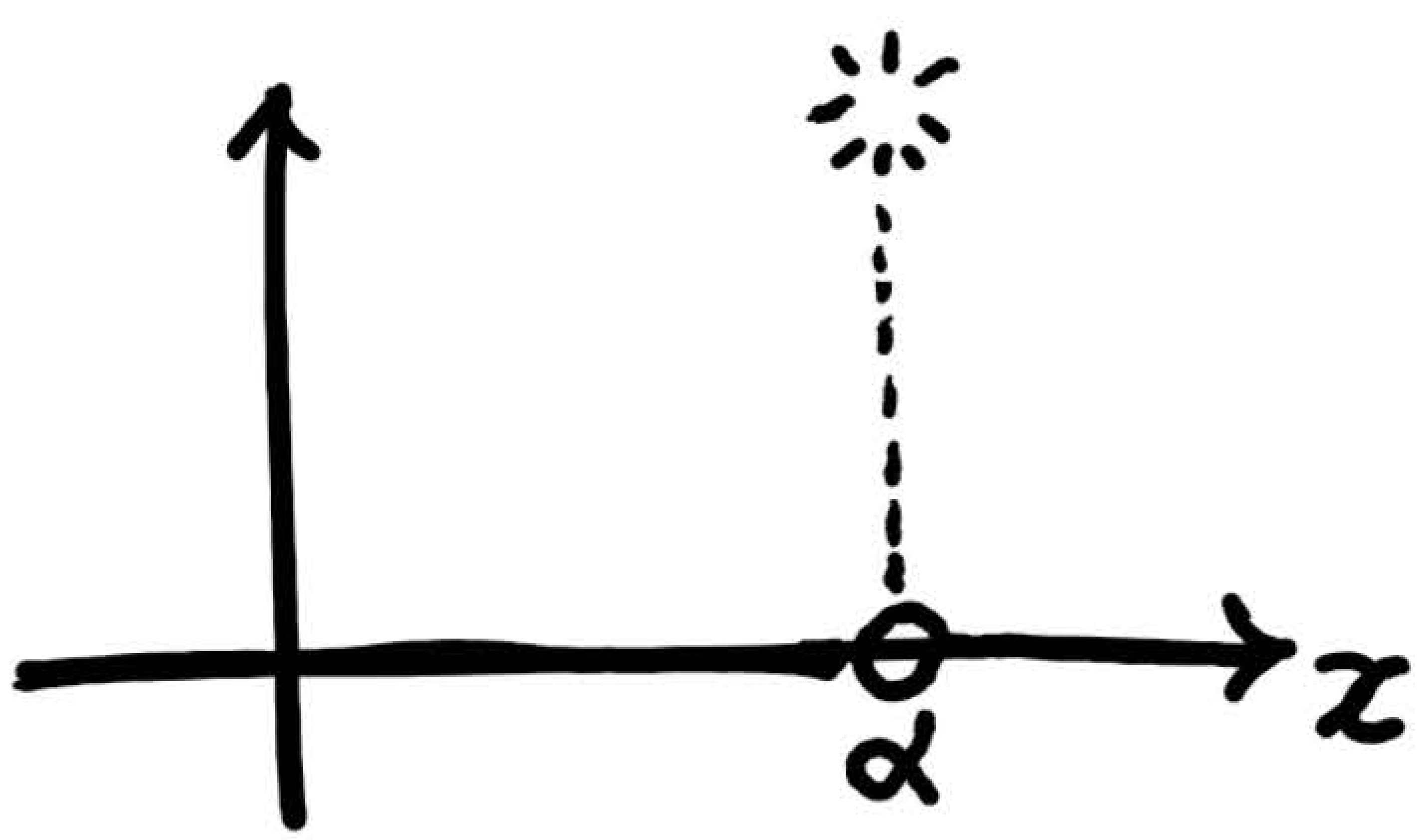
$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\beta x/\hbar}} \longleftrightarrow \boxed{\delta(x-\alpha)}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(p) = \int_\beta \left(\int_\alpha f(\alpha) \cdot \underbrace{\boxed{\begin{matrix}\delta(x-\alpha)\\ e^{i\beta x/\hbar}\end{matrix}}}_{=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{i\beta\alpha/\hbar}} \right) \delta(p-\beta)\, d\beta$$

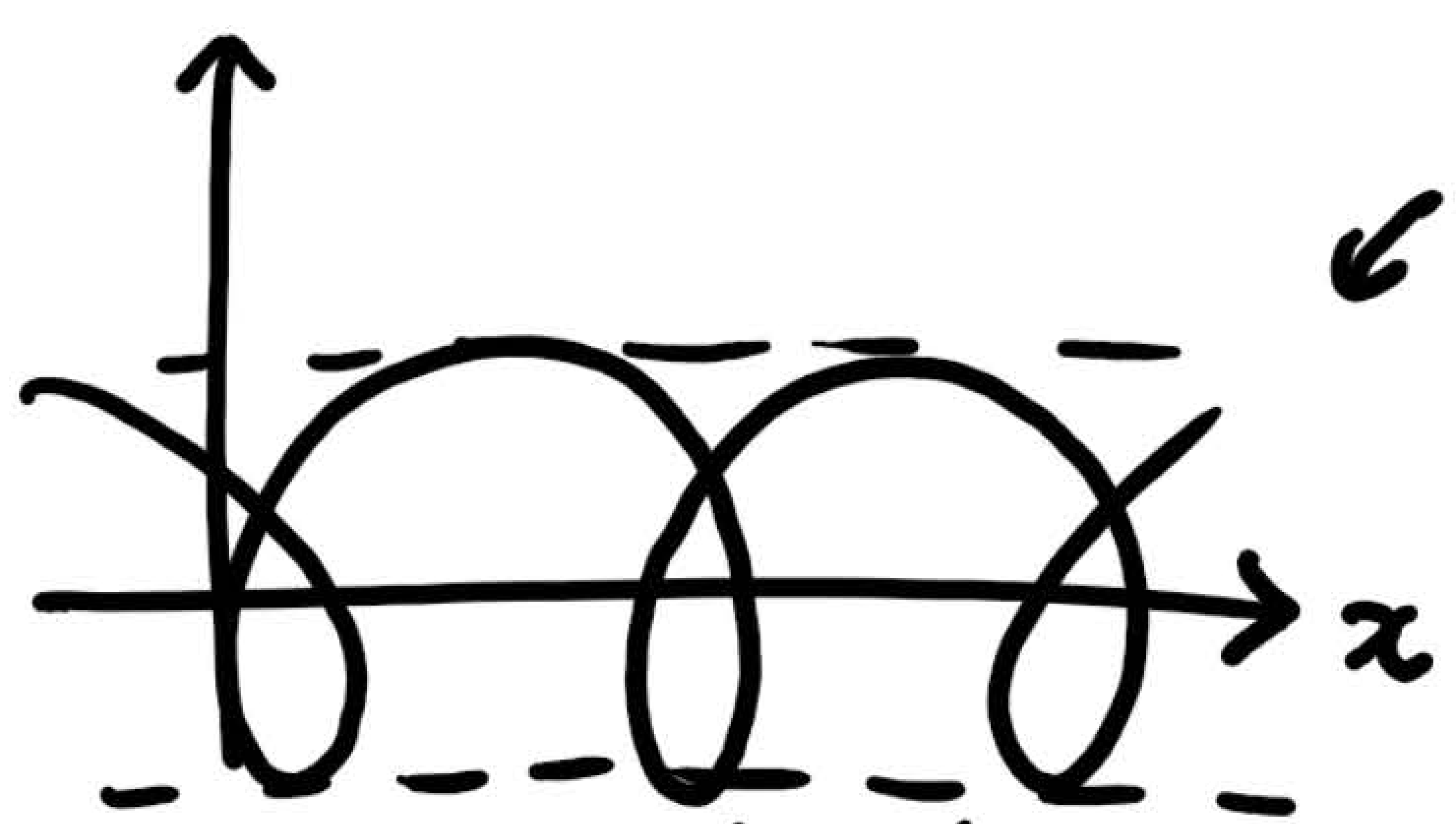
유한 차원에서 좌표 변환을 하듯, 두 함수 세트의 연관 계수만 곱해 적분하면...

새로운 분해가 탄생했죠.

이게 바로 푸리에 변환이었구요.



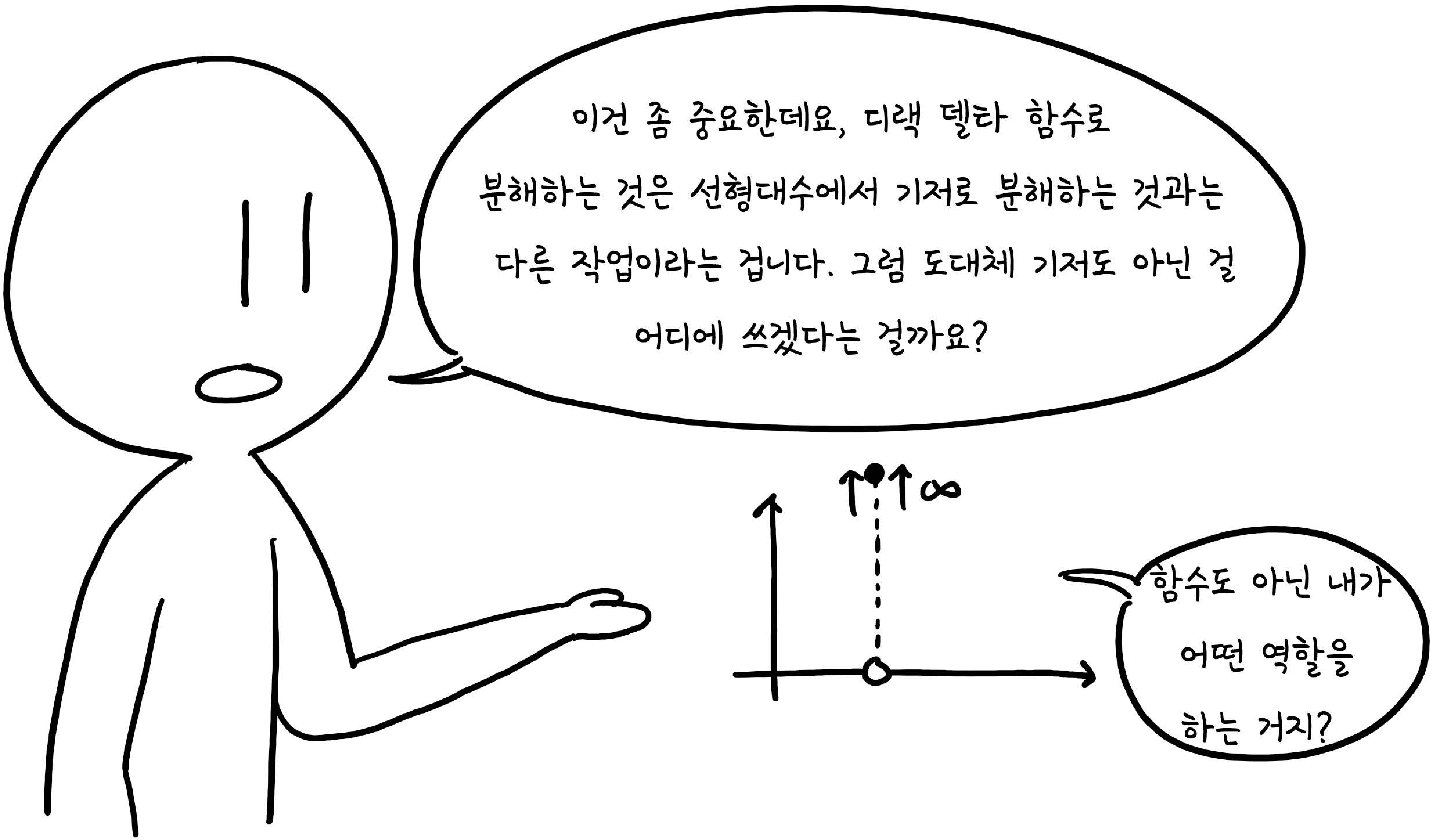
$\delta(x-\alpha)$



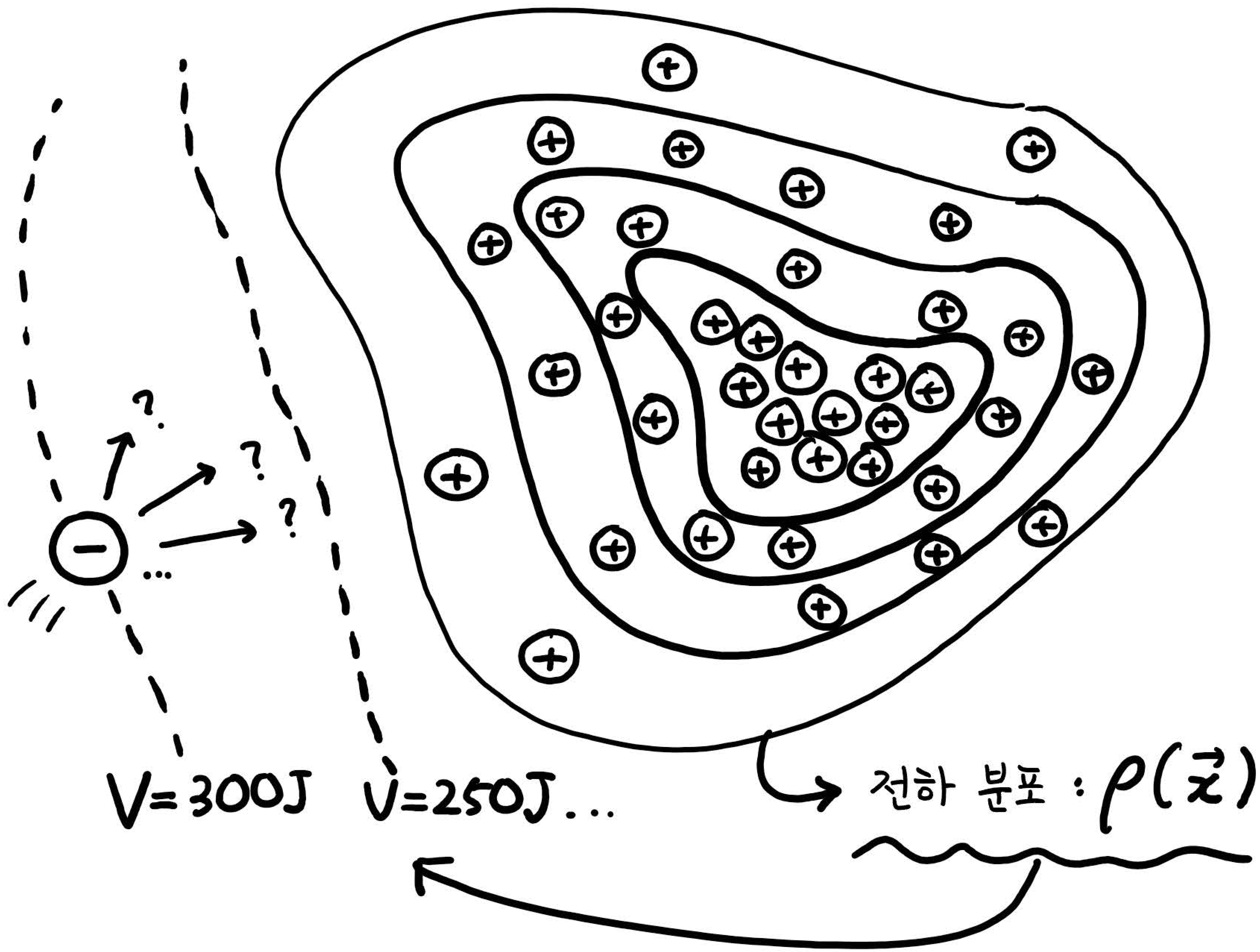
$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}$

$\int |f|^2 = \infty$

하지만 가산 개 룰을 어긴 만큼, 두 함수 세트 모두 "제대로 된 기저"는 아닌 모양이네요.


이건 좀 중요한데요, 디랙 델타 함수로 분해하는 것은 선형대수에서 기저로 분해하는 것과는 다른 작업이라는 겁니다. 그럼 도대체 기저도 아닌 걸 어디에 쓰겠다는 걸까요?
∞
함수도 아닌 내가 어떤 역할을 하는 거지?

머리도 식힐 겸, 물리에서 답을 찾아 봅시다. 다음 상황은 전자기학에서 가장 기본적인 문제인데요,

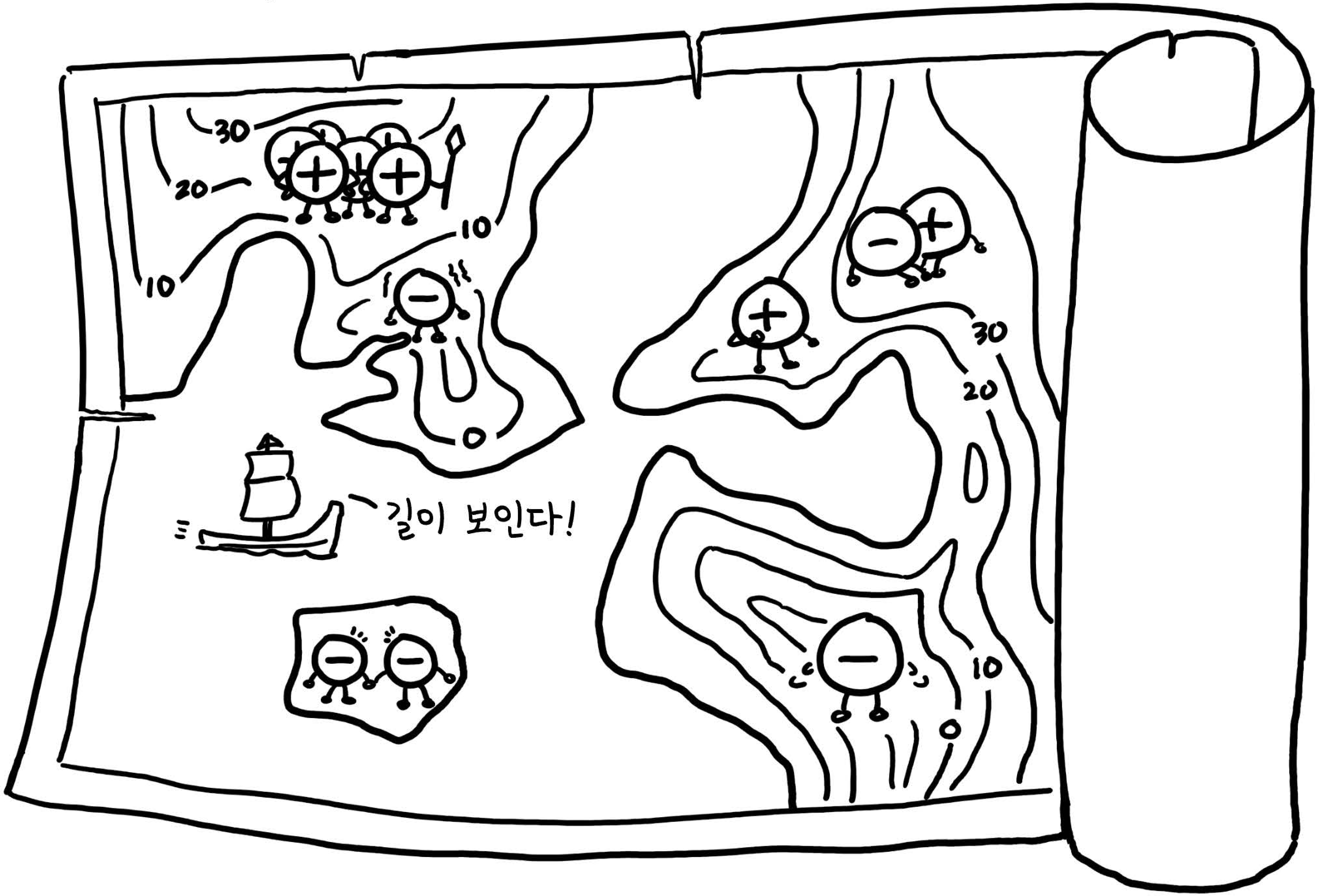


전하 분포가 고정되어 있을 때, 여기에 입장한 조그만 전하가 움직일 경로를 구하는 겁니다.

이 경로를 구하는 방법은, 전하 분포가 만들어 내는 퍼텐셜 함수라는 걸 읽어내는 겁니다.

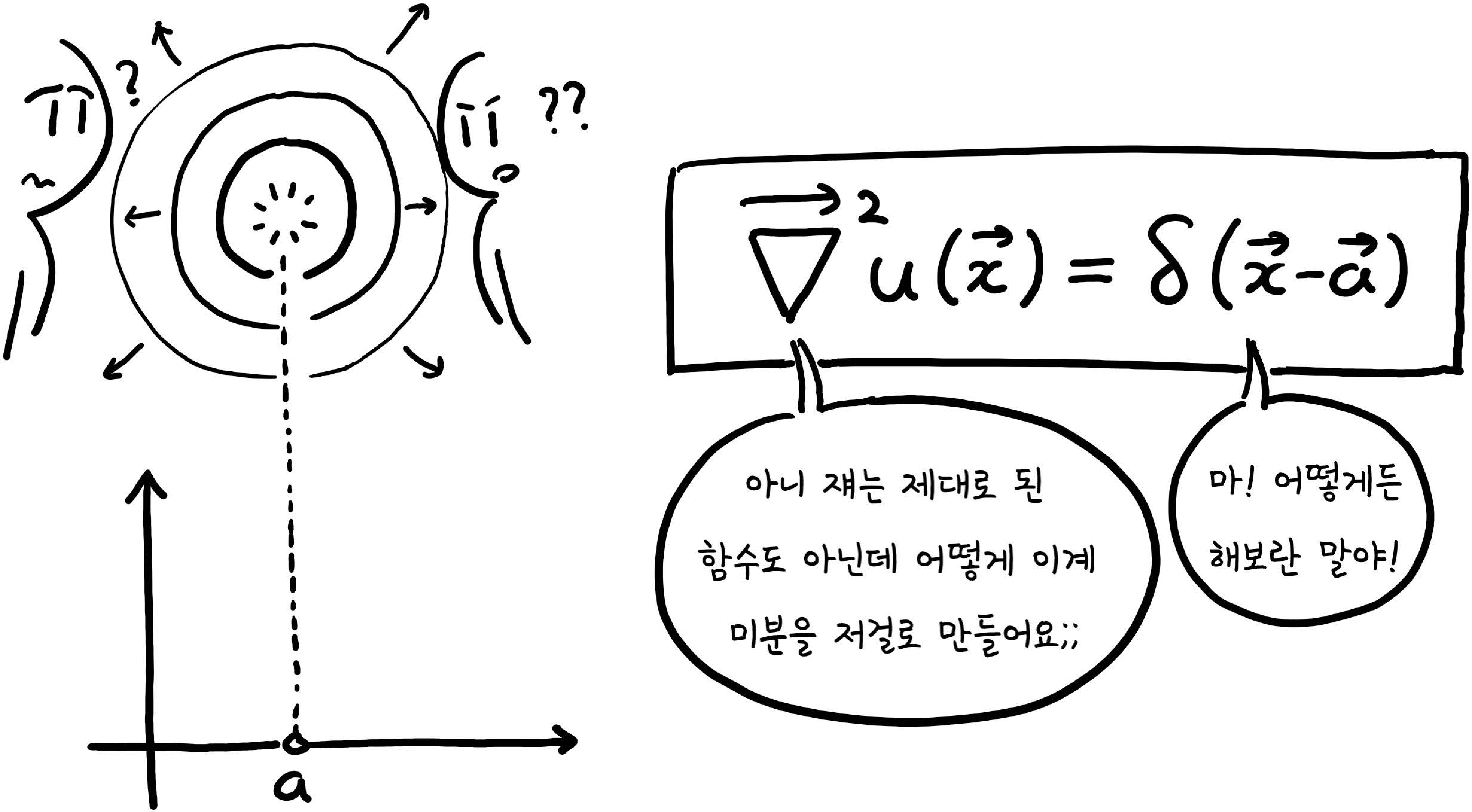
그러니 우리 임무는, 다음 편미분방정식을 가지고 퍼텐셜 지도를 그리는 겁니다.

$$\vec{\nabla}^2 V = -\rho(\vec{x})/\varepsilon_0 \quad (+\ V_\infty = 0)$$



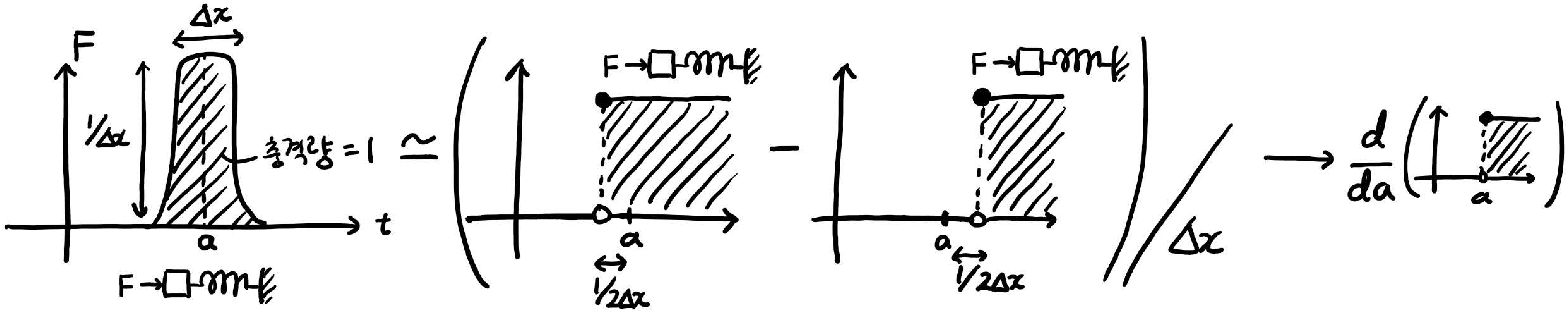
그럼 여러분이라면, 어떤 전하 분포부터 잡고 풀어 보겠어요?

물리학자들의 사고 방식은 가장 작은 단위부터 건드리는 거예요. "부피는 안 차지하지만 총 전하량은 양수인" 그런 전하 분포부터 해결하는 거죠.

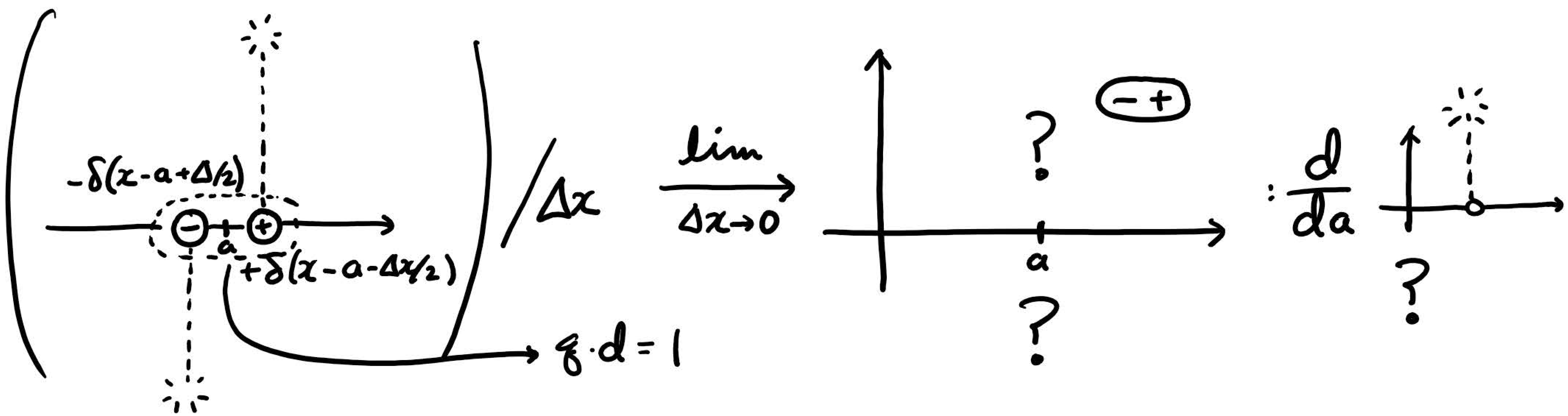


저 "알 수 없는 계산"과 함께, "알 수 없는 분해" 및 "알 수 없는 통합 과정"을 거치면 임의의 함수 f가 분포로 주어졌어도 할 만하다는 게 전략인데요, 음....

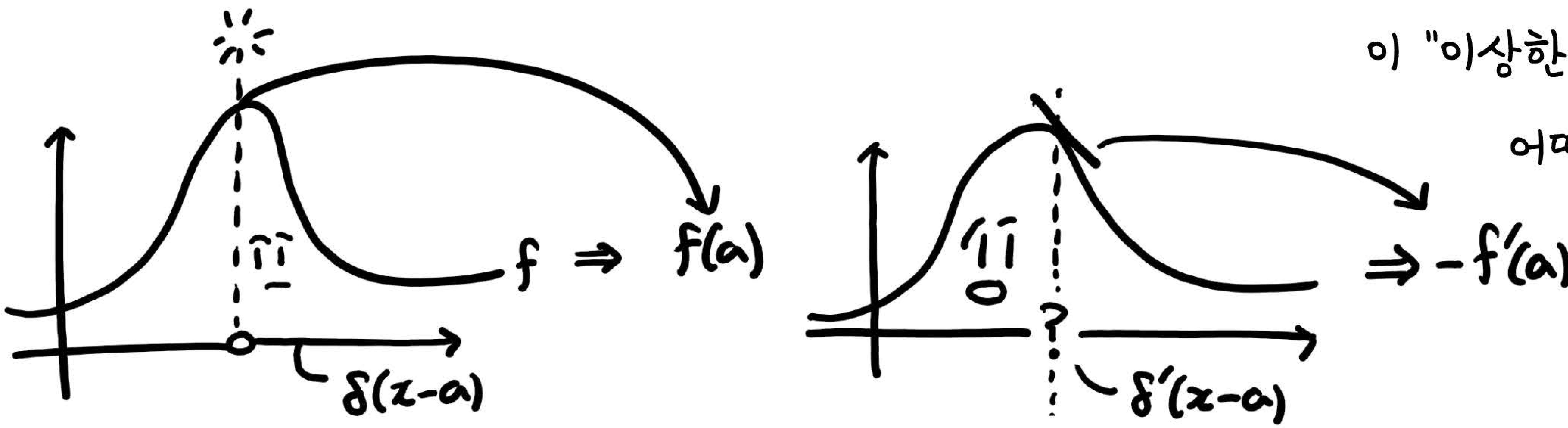
근데 이 이상한 걸 디랙은 또 곧잘 해냅니다. 디랙 델타라는 녀석 자체가...



이렇듯 헤비사이드 함수라는 미분 불가능한 함수의 "알 수 없는" 미분이고,



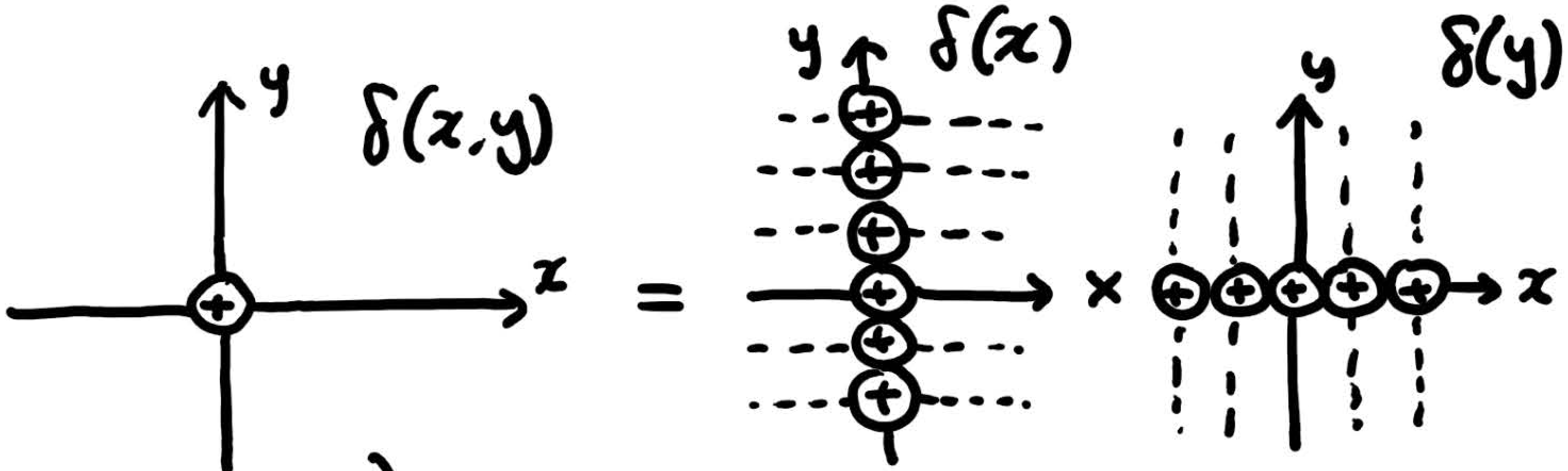
디랙 델타의 미분도 해내네요. 뭔가 쌍극자 비스무리한 거라고는 하는데, 도대체 그릴 수도 없는...



이 "이상한 미분"이 함수에는

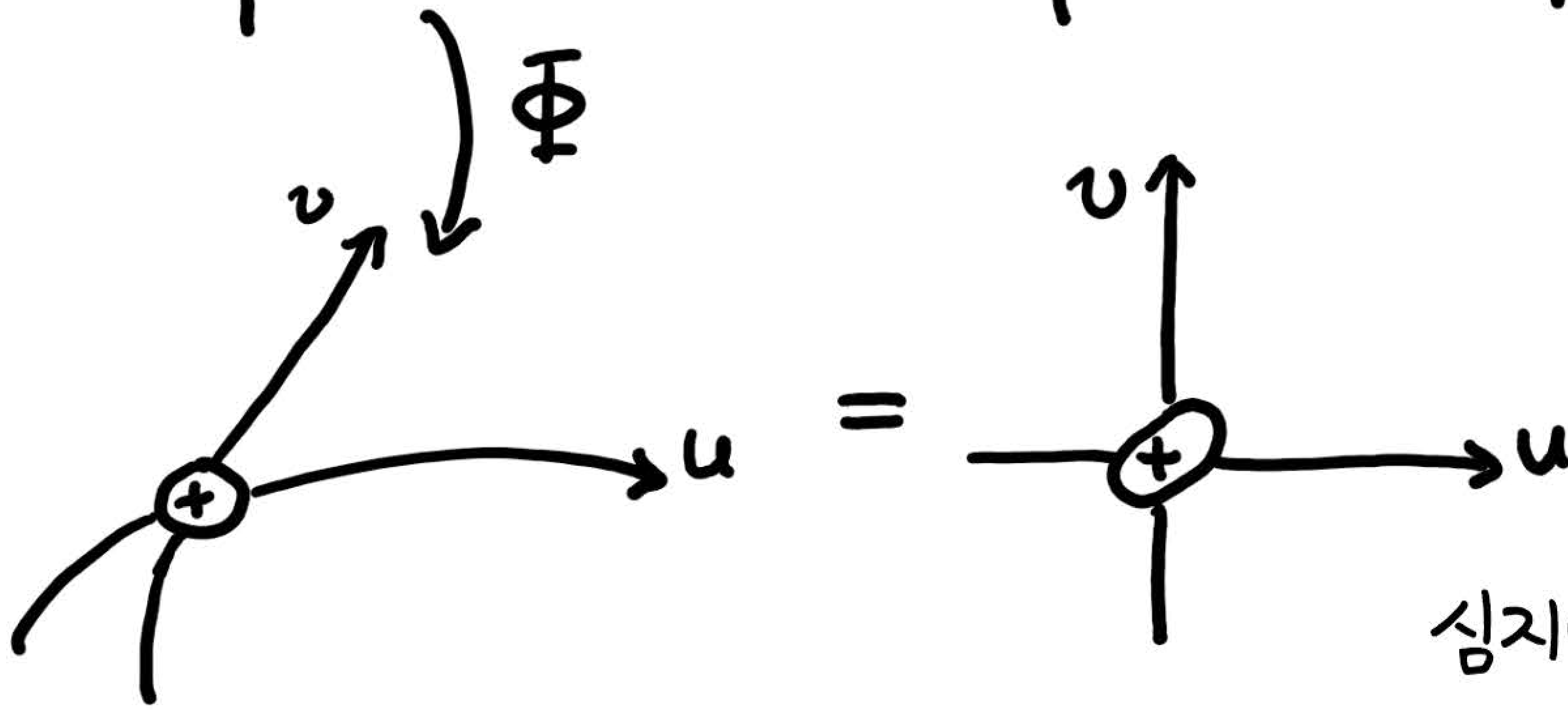
어떤 작용을 하는지도

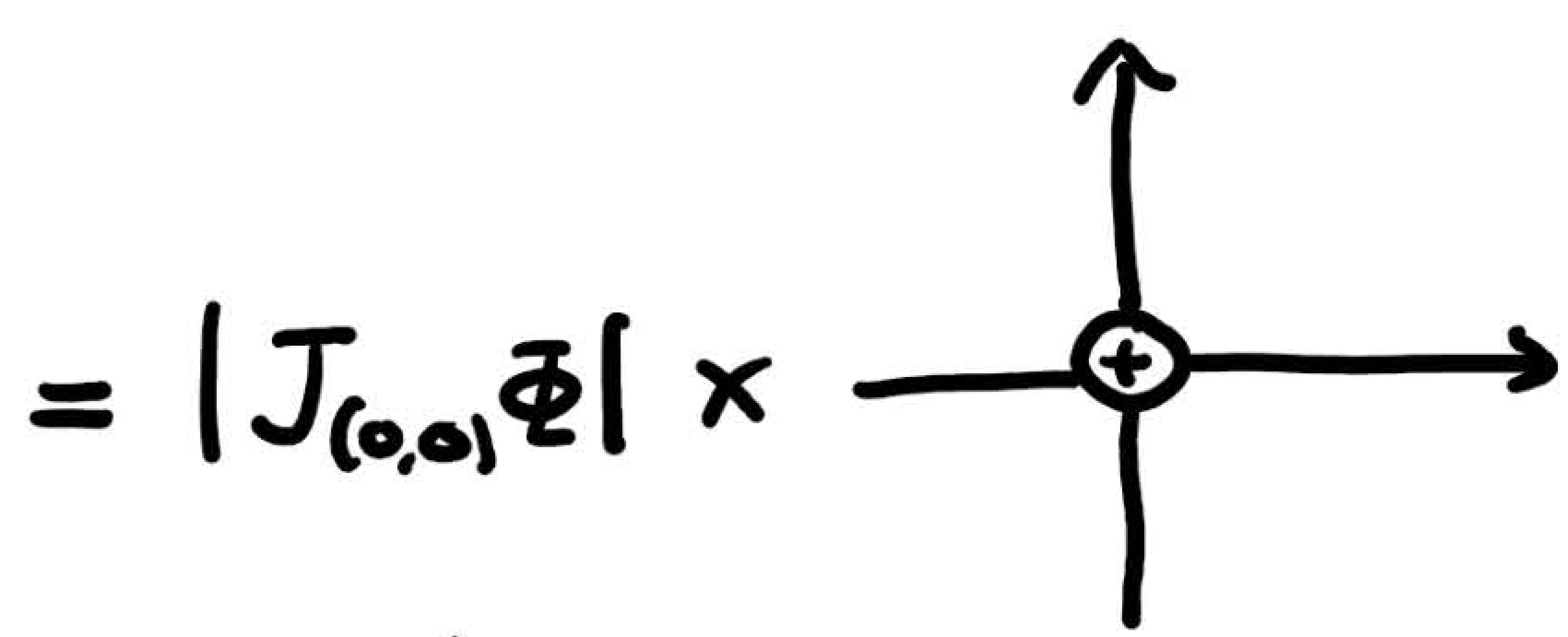
알아냈고,



차원이 높아져도 더 낮은 차원의

"이상한 녀석"들로 분해도 곧잘 하고,





심지어 변수 변환까지 자유자재로 하니, 어떻게 사람들이

"디랙의 기묘한 개념"을 안 사용하겠어요?

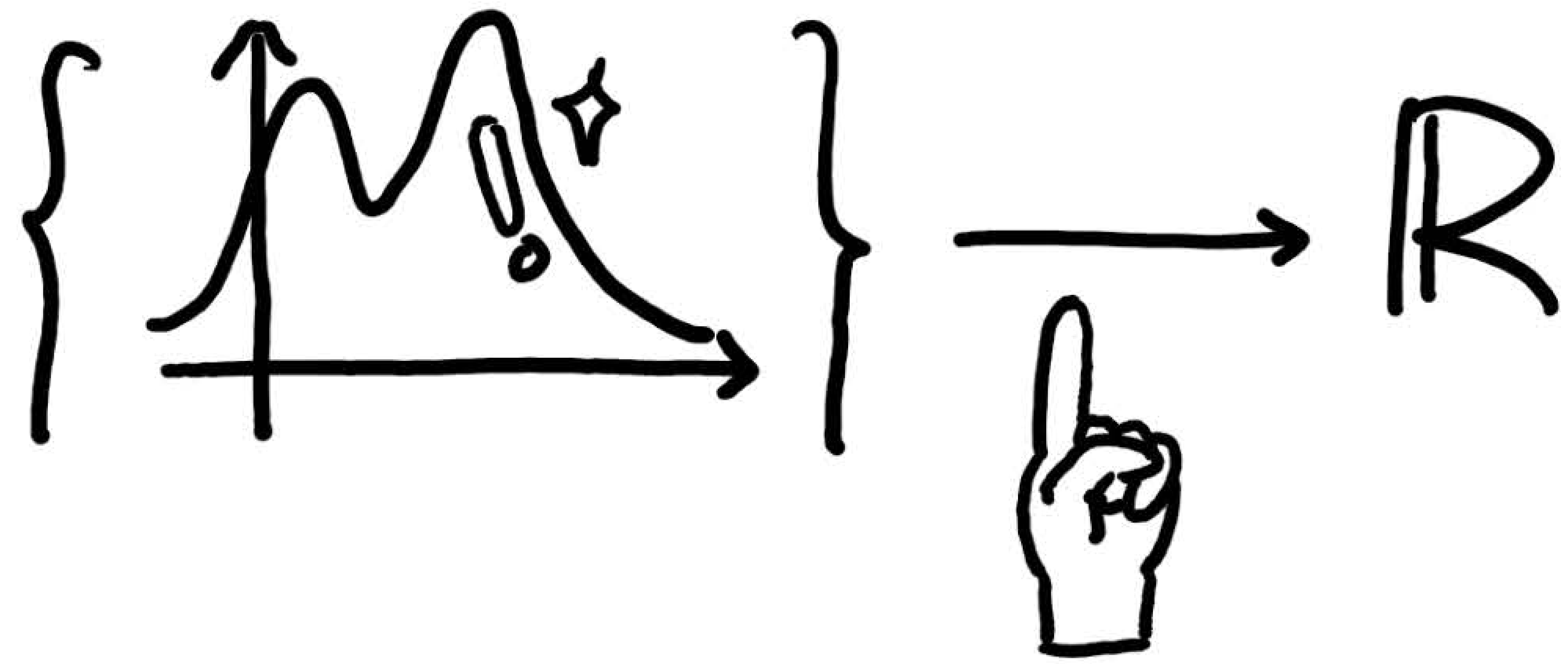
당연히, 수학자들은 이런 "마법 상자"를 그대로 놔둘 수는 없었습니다.

어떻게든 수학적인 개념으로 만들려고 했지만,

그렇게 쉽지는 않았던 것 같아요. 결국 이 일을 해낸 사람은...

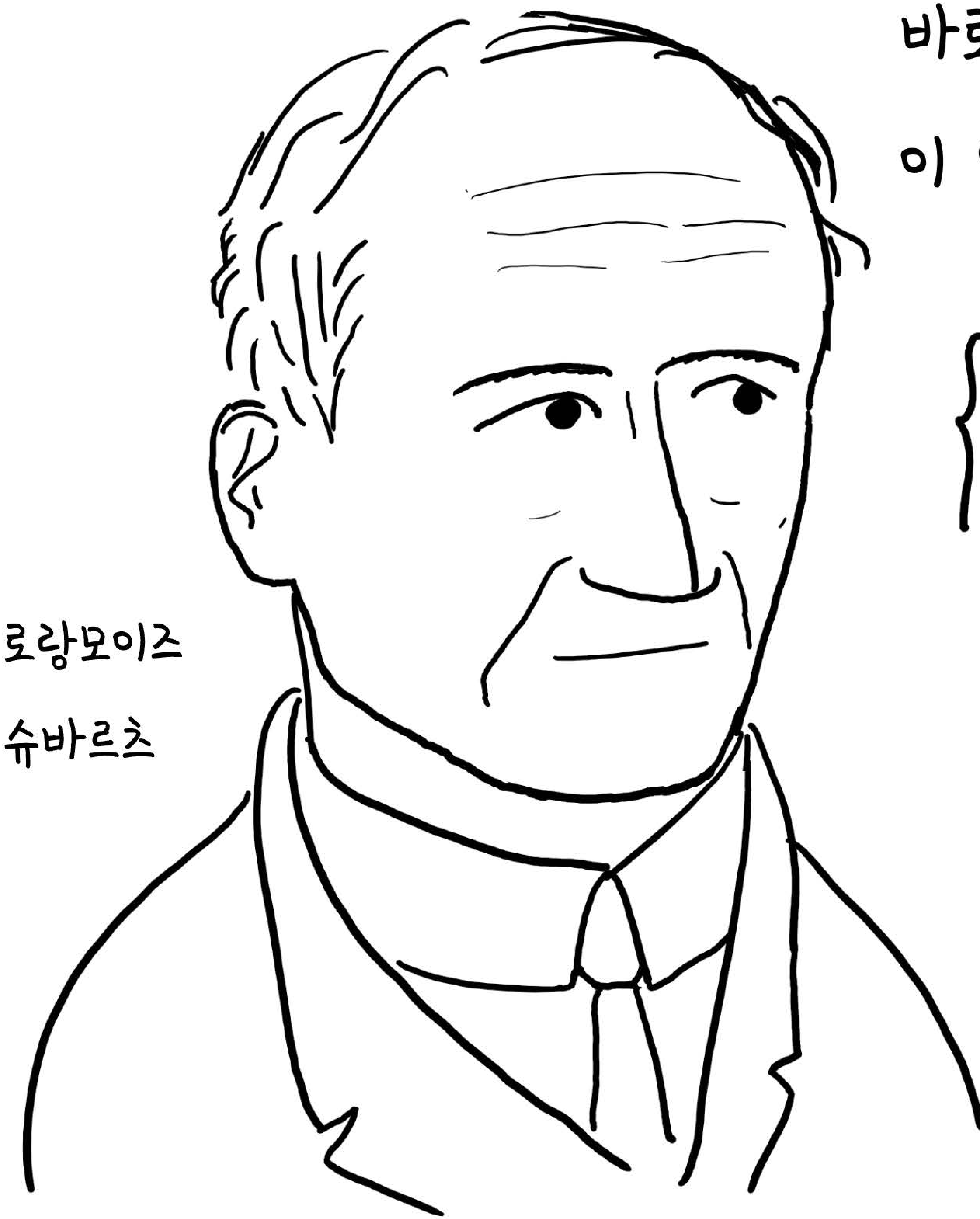
바로 로랑 슈바르츠라는 사람입니다.

이 업적으로 1950년에 필즈상을 받았죠.



Distribution

디랙이 처음 디랙 델타를 제안한 게 1926년,
슈바르츠가 디랙 델타 개념을 배운 게 1935년
이었는데, 15년간의 연구 끝에 <Théorie des
distributions>이라는 책을 1950년에 냅니다.

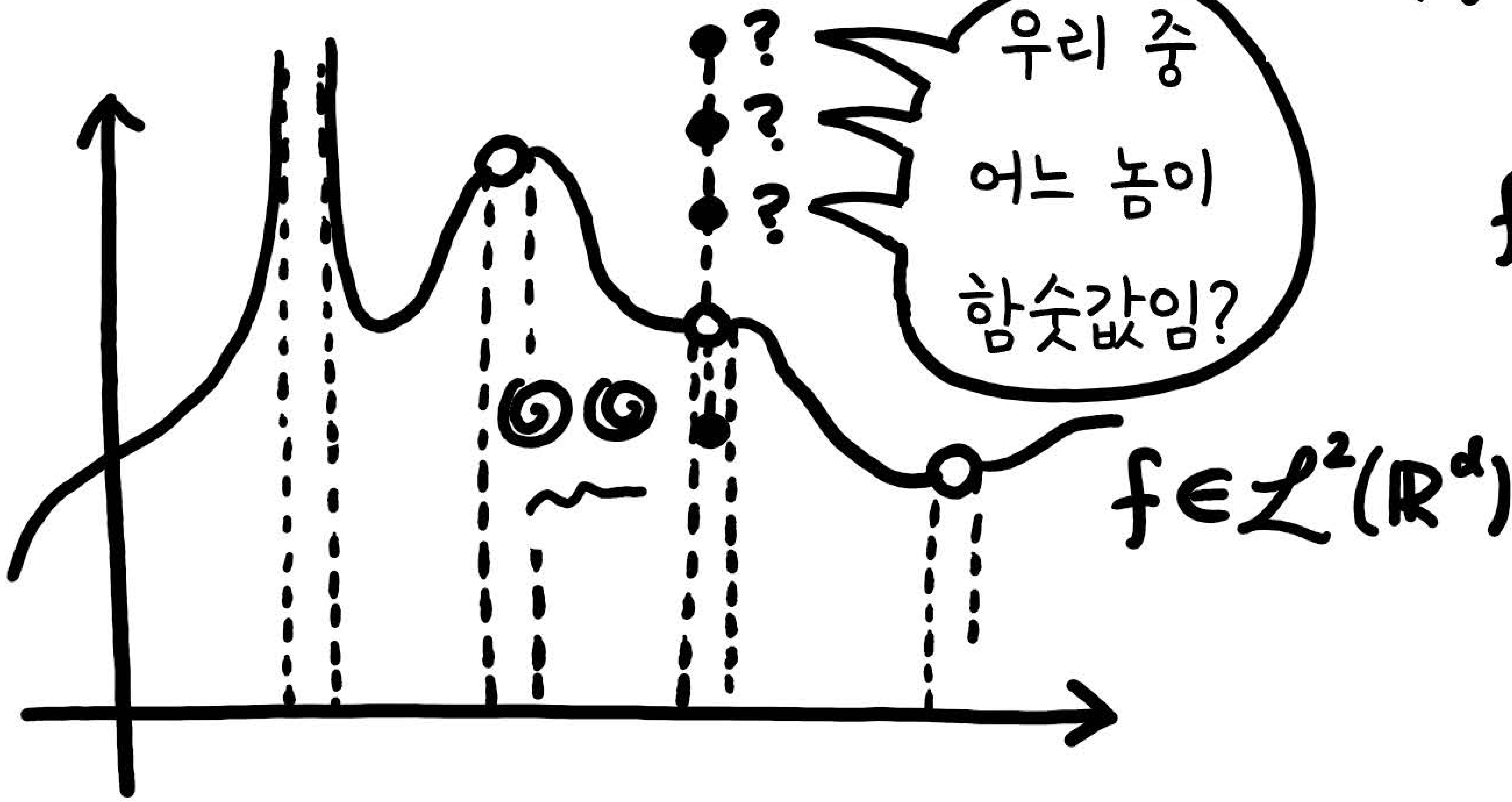


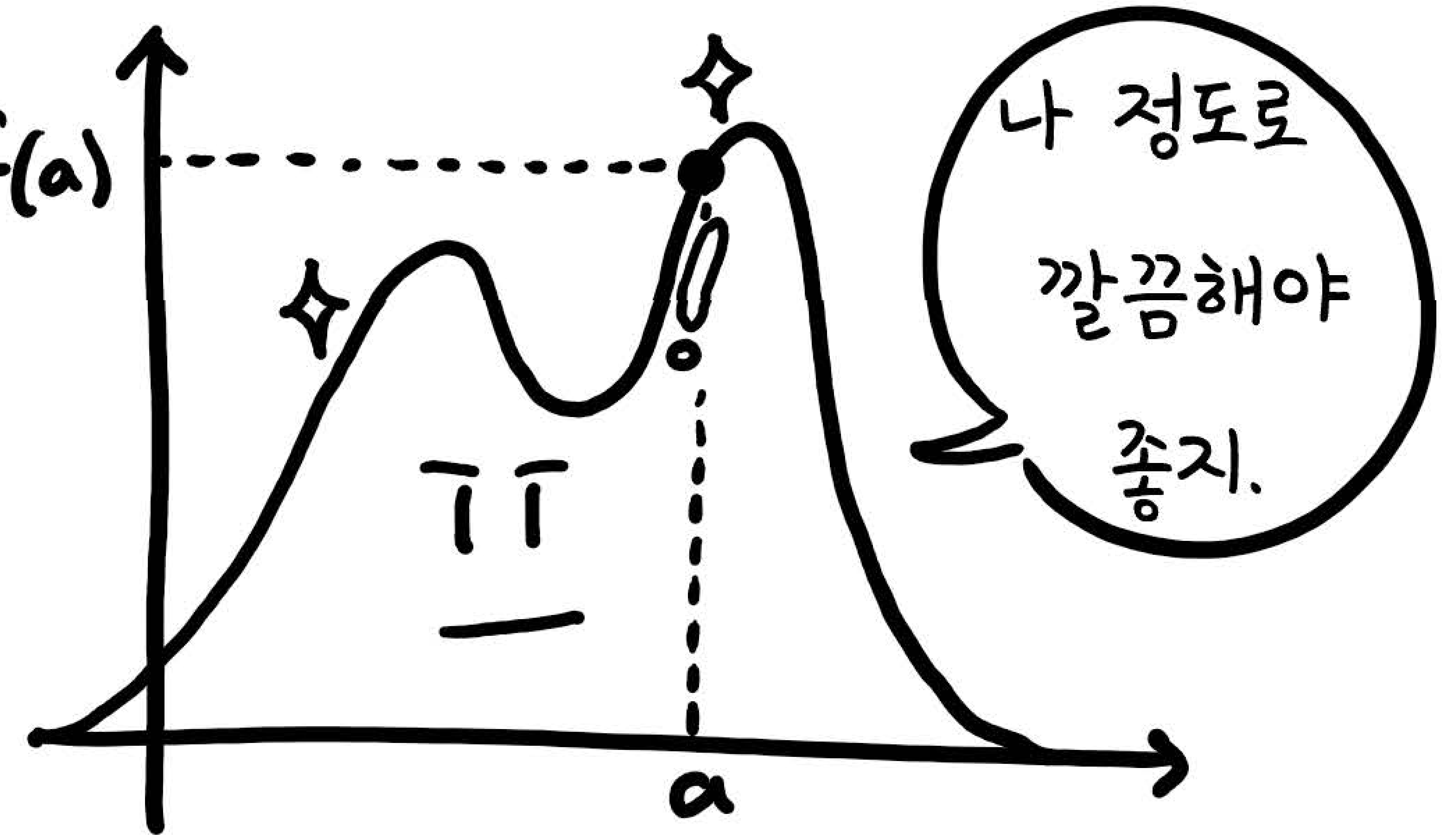
로랑모이즈
슈바르츠

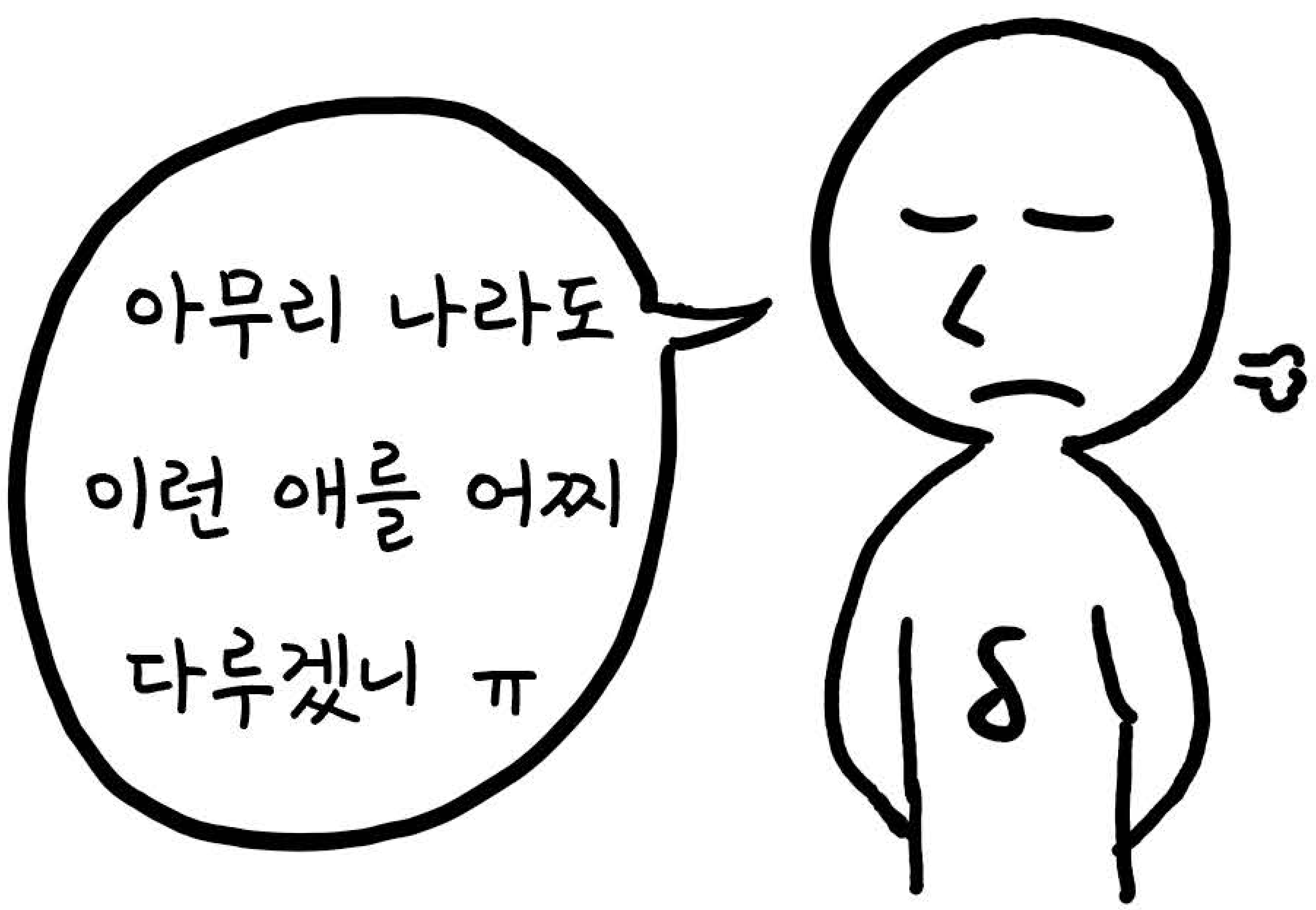
그럼 슈바르츠의 이론을 따라 "디랙 델타 무언가"를 파악해 봅시다.

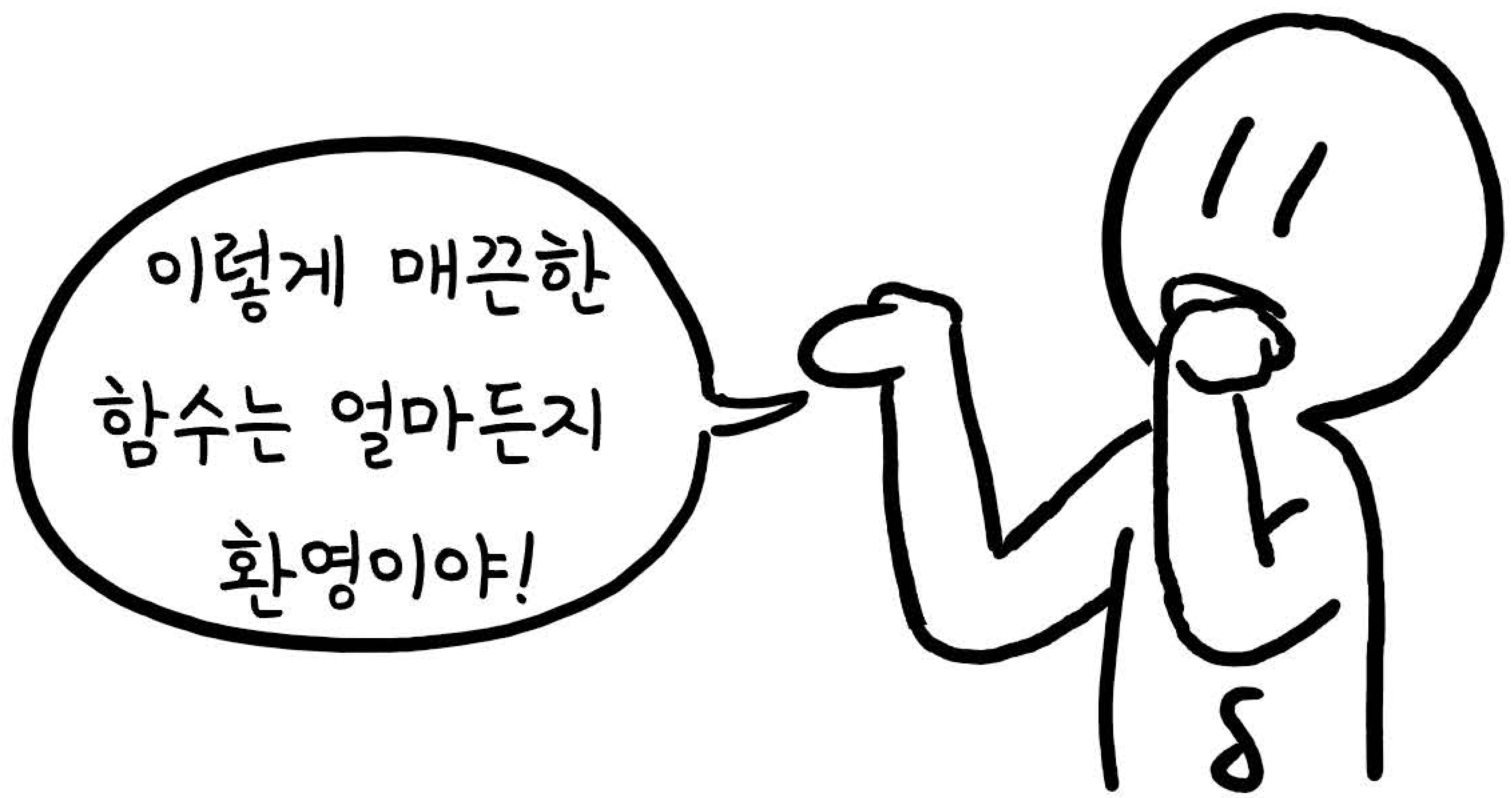
먼저, 특정 위치에서의 "함숫값"을 읽는다는 건, 함숫값이 정의라도 되는 함수에나 의미가 있겠죠.

작용 대상 범위부터 가다듬을 필요가 있겠네요.



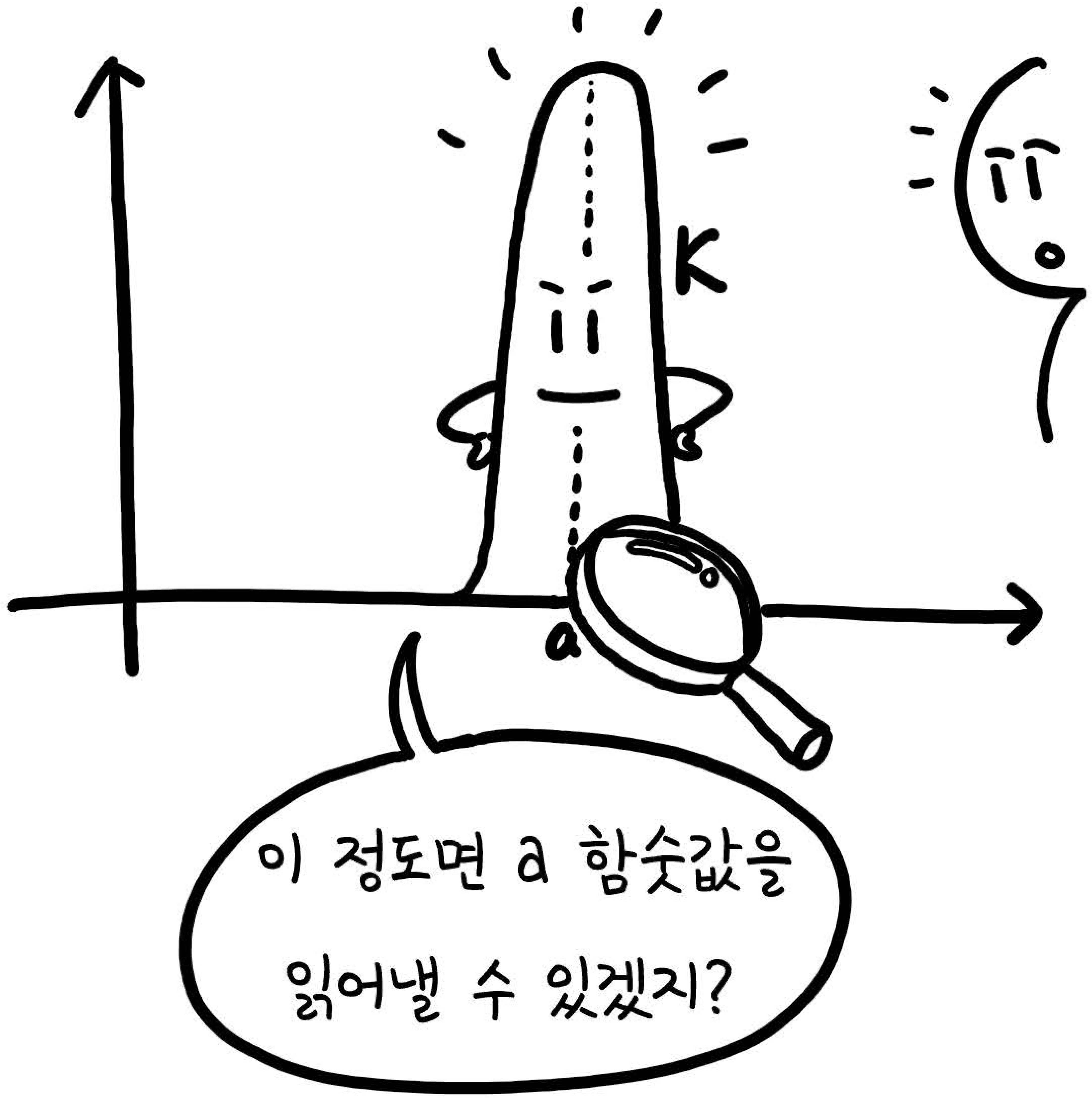




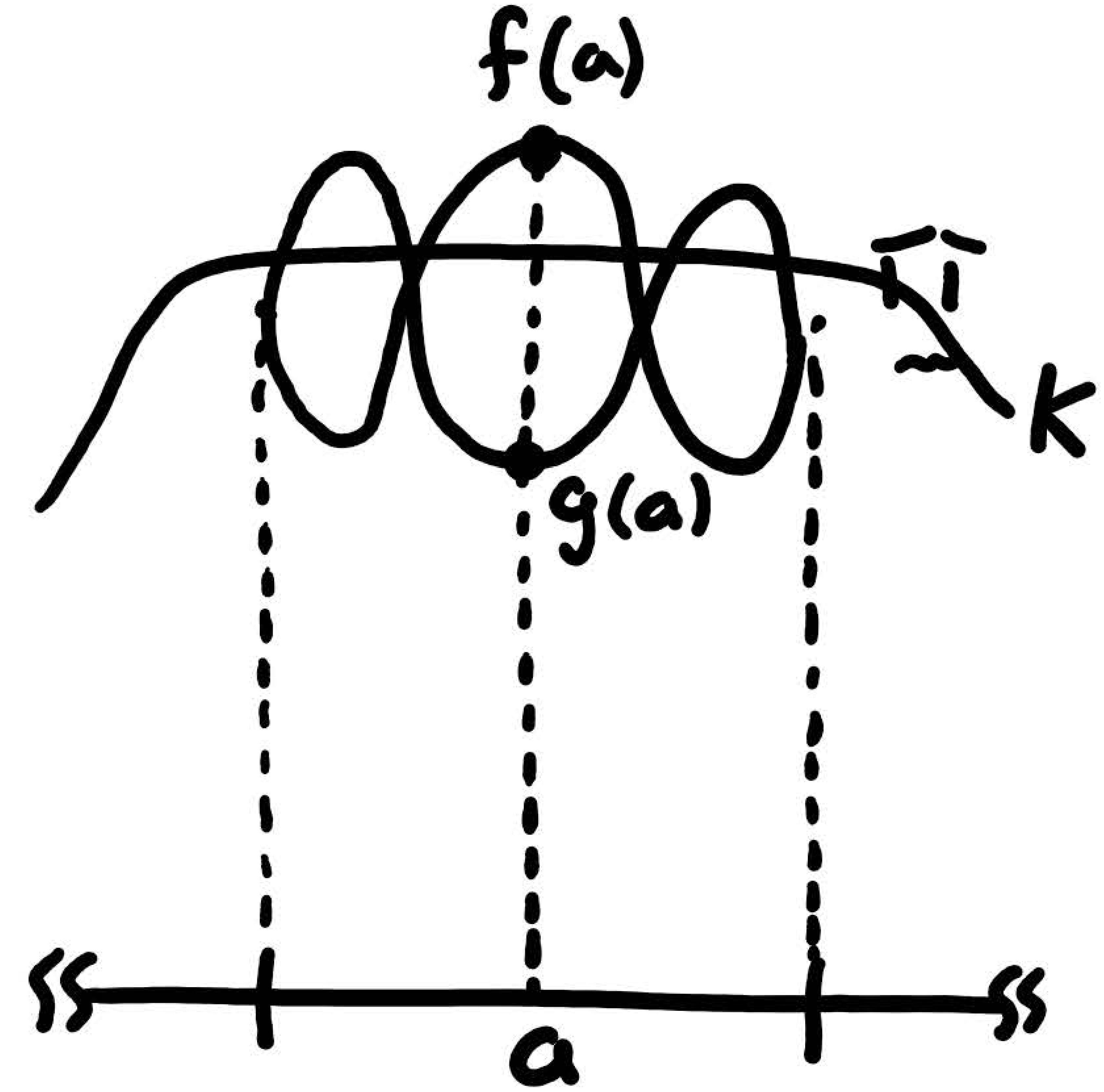


그러니 우리는 디랙 델타 같은 녀석을 "매끈한 함수"에 곱해져 적분값을 주는 녀석으로 생각할 거예요.

하지만 이미 살펴봤다시피, 이런 역할은 일반적인 함수는 할 수 없어요.

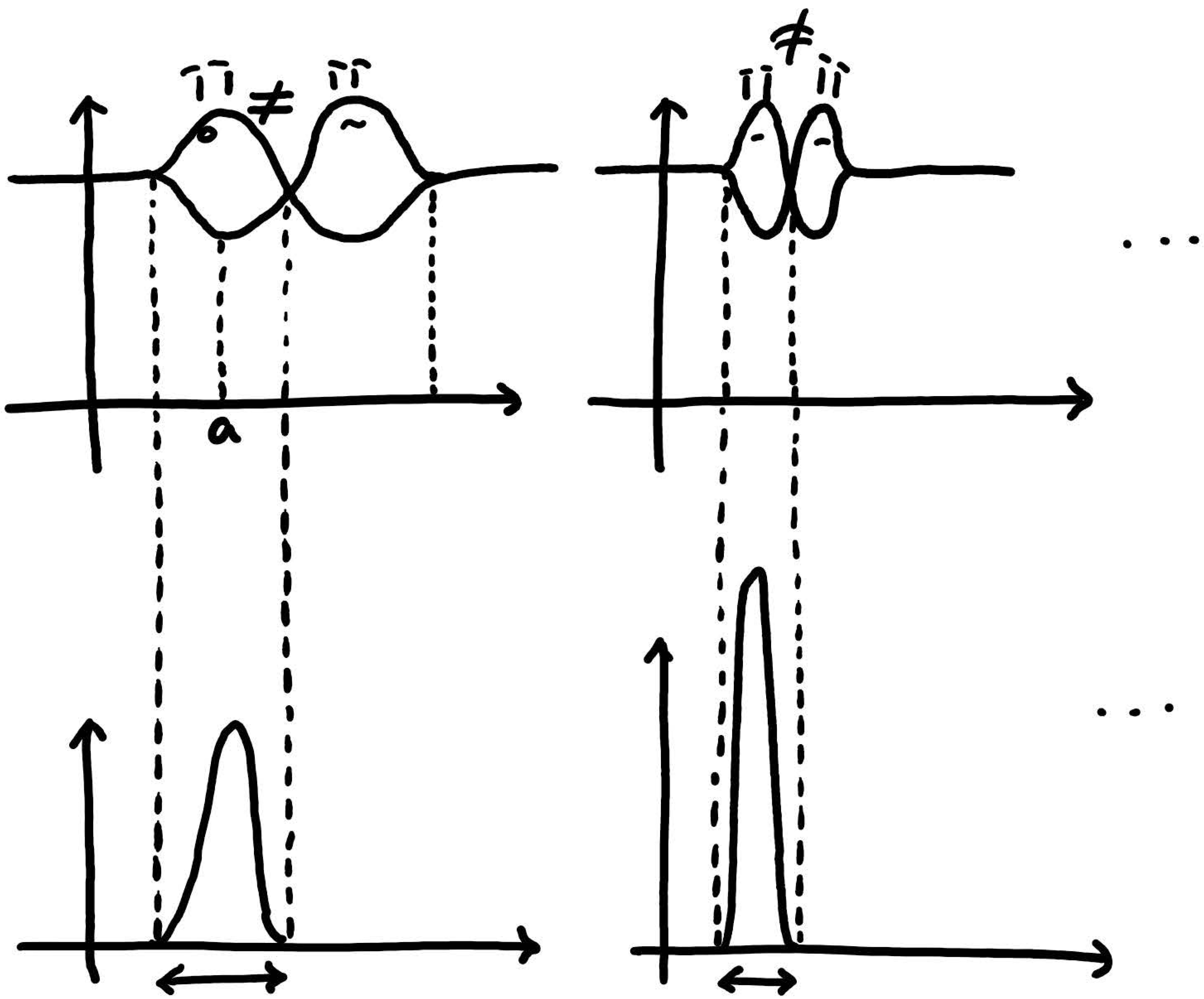


제아무리 a 근처에 모여 있는 함수를 가져온대도,



f(a), g(a)가 다르면서 똑같은 적분값 결과를 가지는 f, g는 매끈한 함수 중에서도 찾을 수 있거든요.

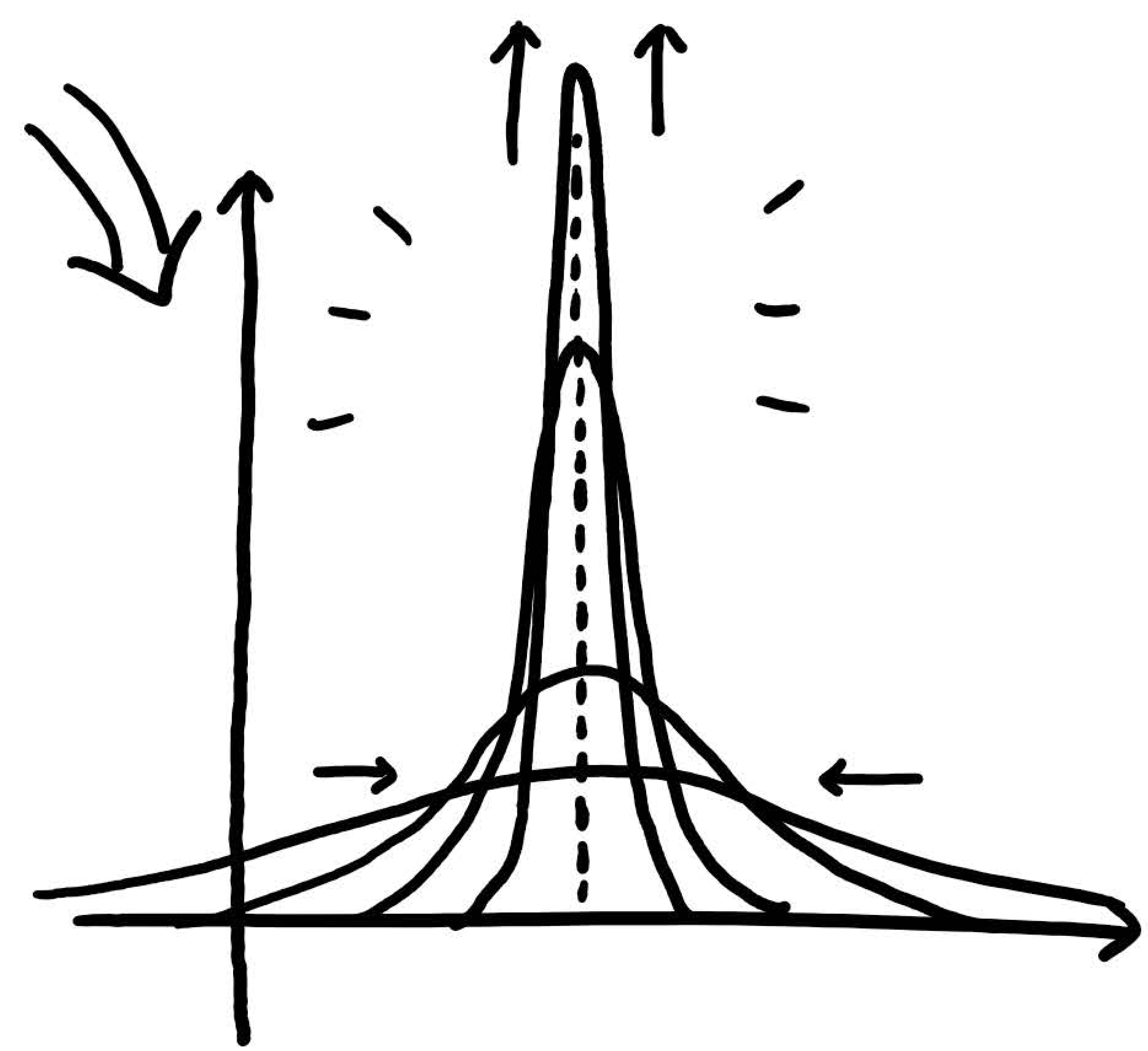
그러니, a 주위에서의 미세한 차이도 잡아내려면 폭을 점점 좁혀야겠죠.



한 함수가 해내지 못하는 일을,

함수를 계속 바꿔나가면 할 수 있어요.

다시 말해,

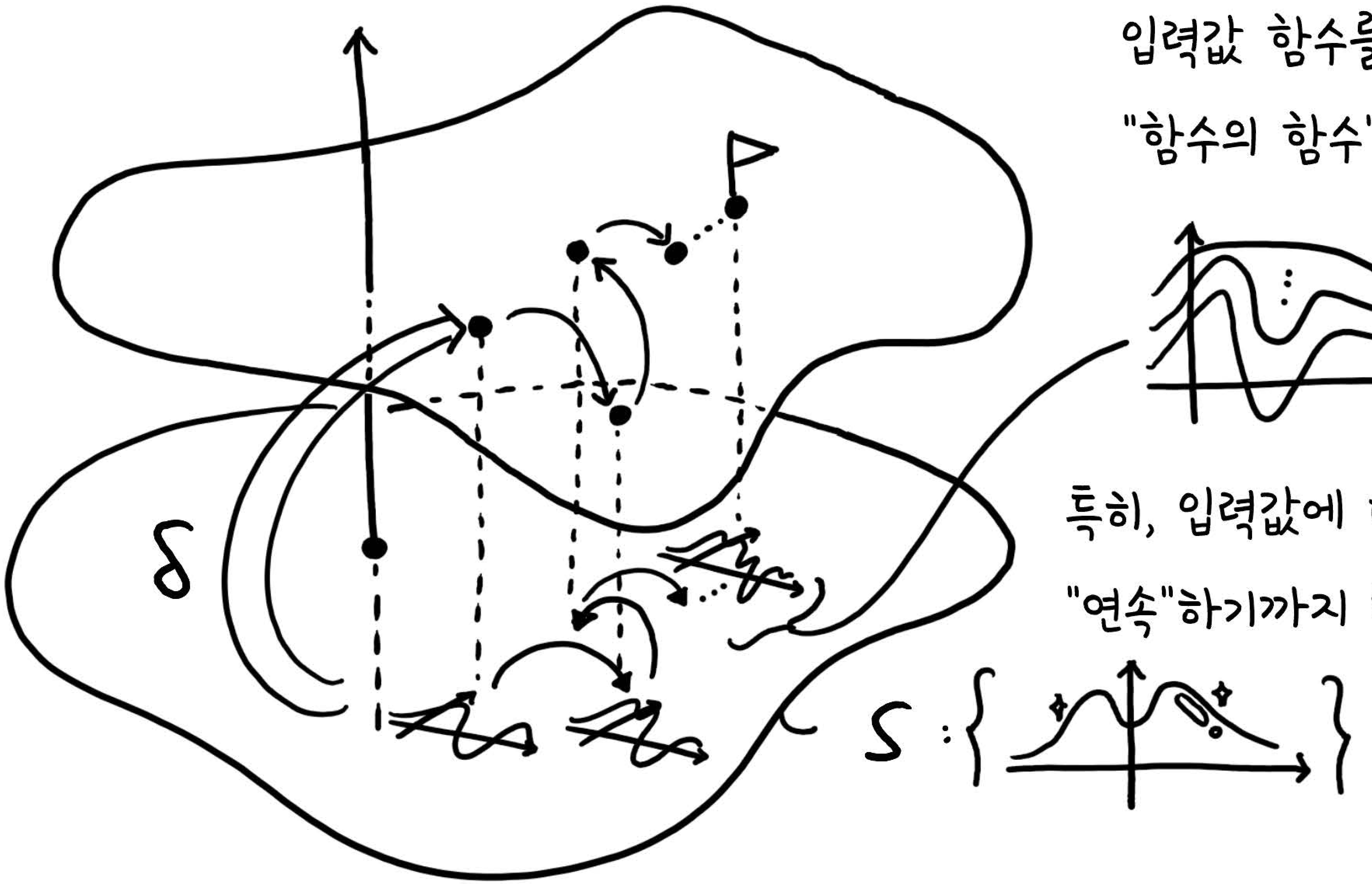


매끈한 함수에 작용하는 함수의 작용뿐

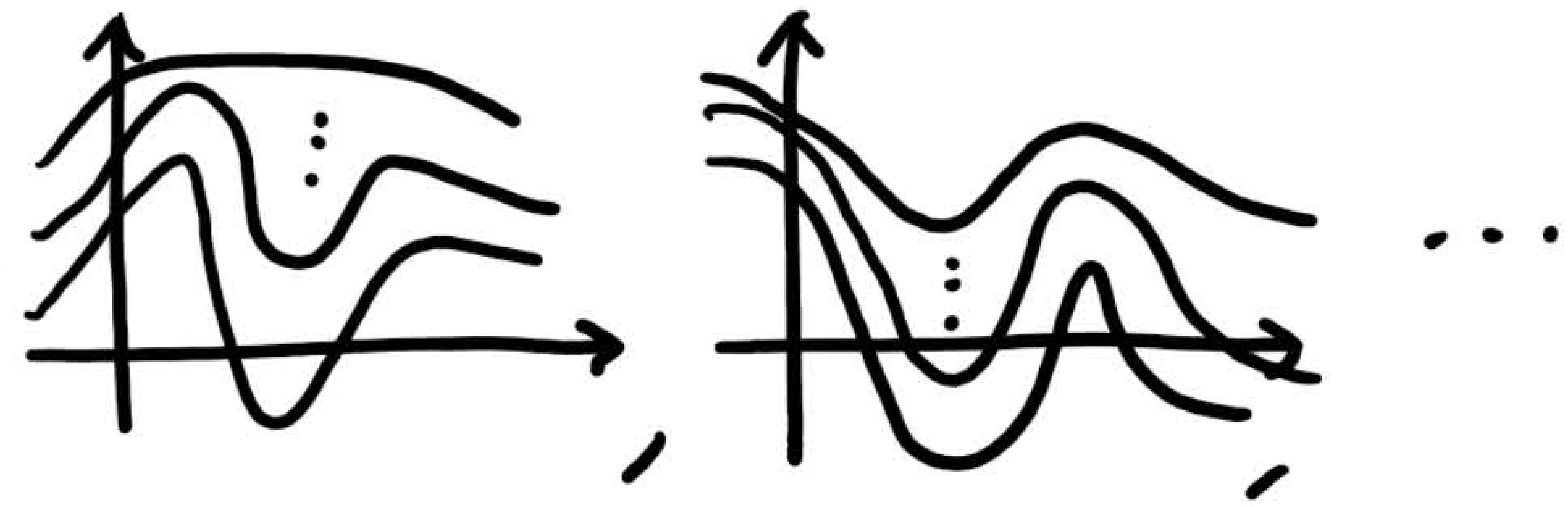
아니라, 그러한 작용의 극한도 고려하면

디랙 델타를 생각할 수 있는 거예요.

여기서 정말 중요한 건 이거예요. 일반적인 함수든 디랙 델타든, 각 x에서 값을 가지는 함수처럼 보는 것이 아니라,



입력값 함수를 받아서 실수값을 내놓는 "함수의 함수"로서 보는 관점 말이에요.



특히, 입력값에 대해 "선형"이고, 어떤 의미에서 "연속"하기까지 한 녀석이에요.

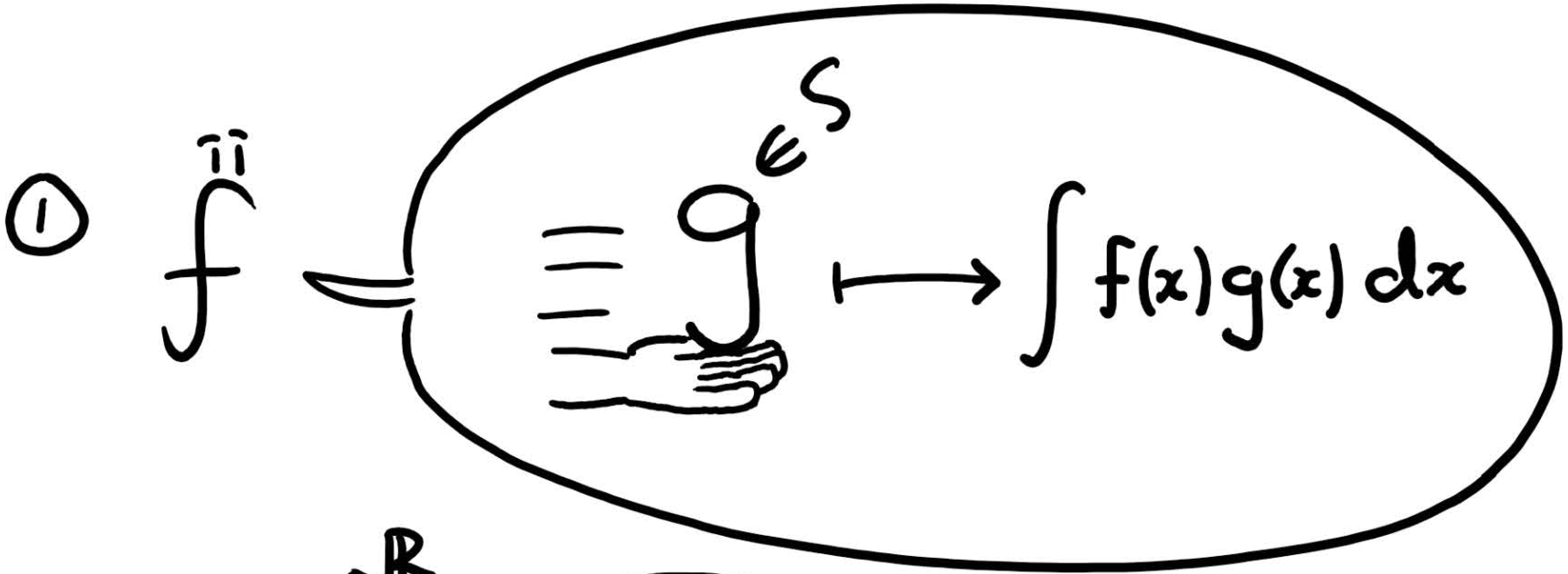
이런 "함수의 함수"를 초함수라고 부르고, 여기서 입력값 역할을 하는 함수는 테스트 함수라고 부릅니다.

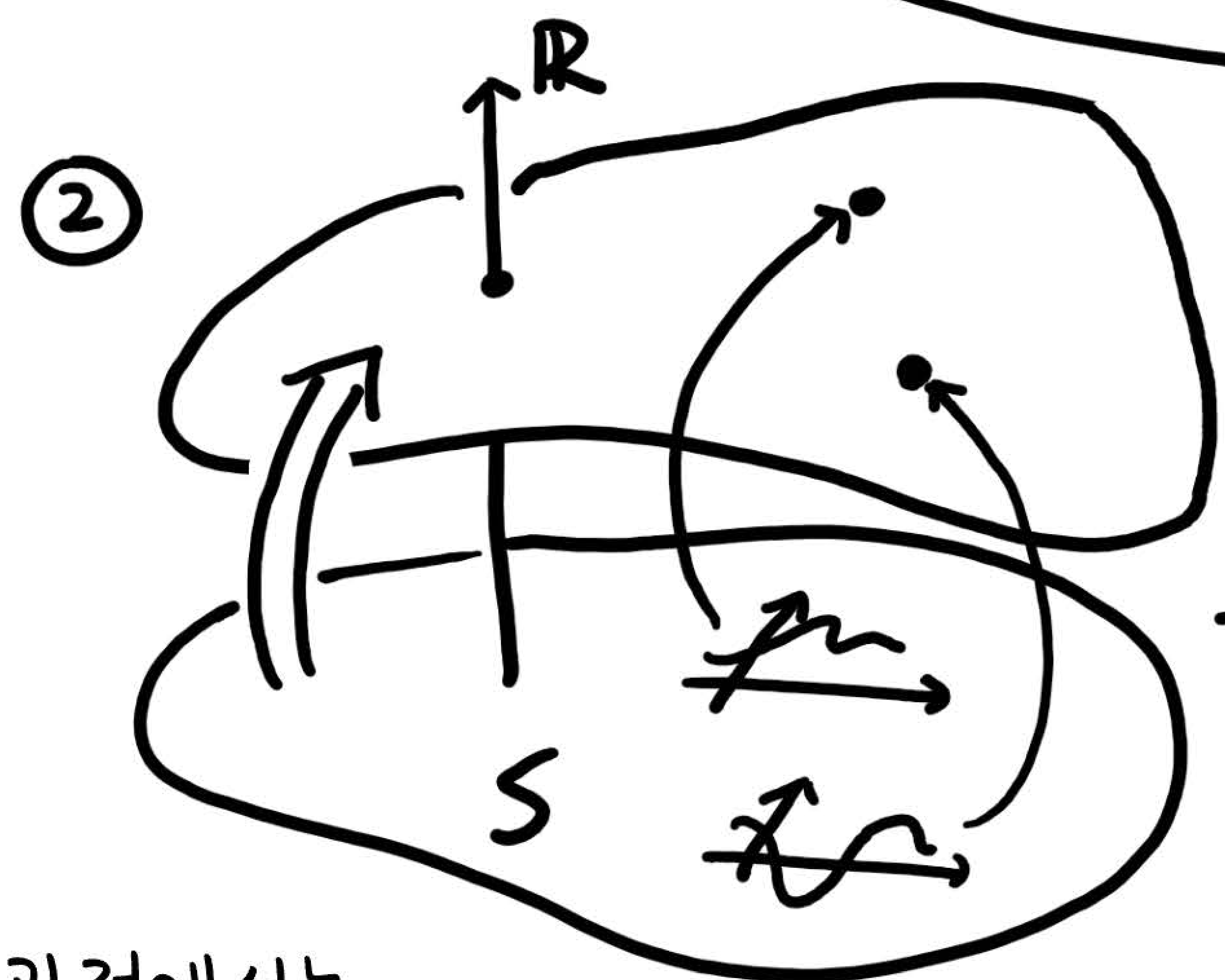
이제 대충 초함수가 정의된 세팅을 봤으니, 미분도 정의를 해야 하는데...

흔히 미분할 수 있던 함수들도

이제는 "함수의 함수" 관점에서

봐야 하고,





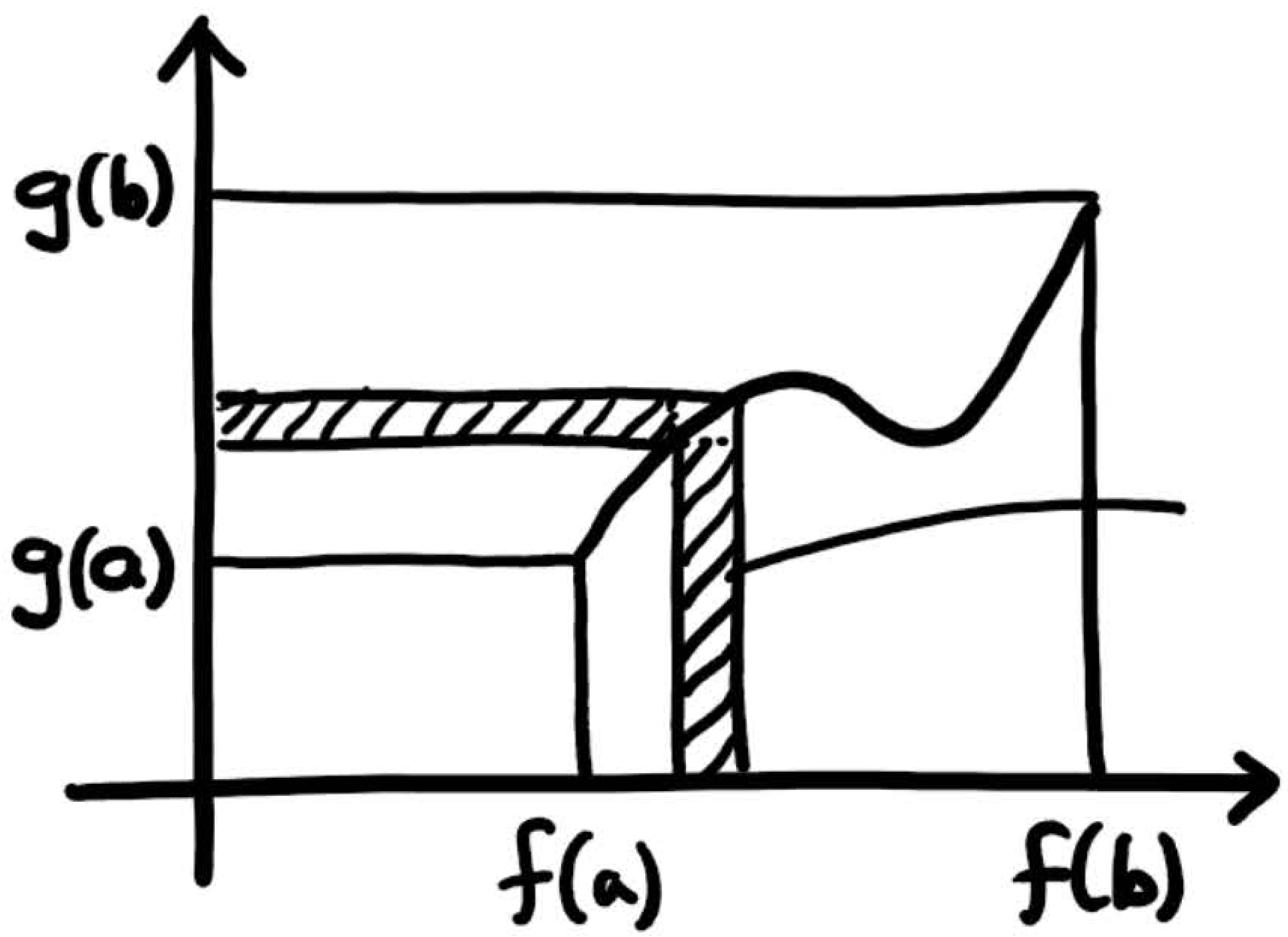
이 관점에서는...

"x"가 없는데 어떻게 x로 미분을 하죠 ㅠㅠ

일단은 미분이 가능하기라도 한 함수들로부터 영감을 얻어야겠어요.

아, 저랑 f가 초함수로서 어떤 관계가 있냐구요? 그야 당연히... 부분적분 관계죠!

앗, 그렇네요! 아래와 같이 생각해 보면, "f에 미분을 취하지 않고도" f'가 함수 g에 어떻게 작용하는지 알 수 있어요.

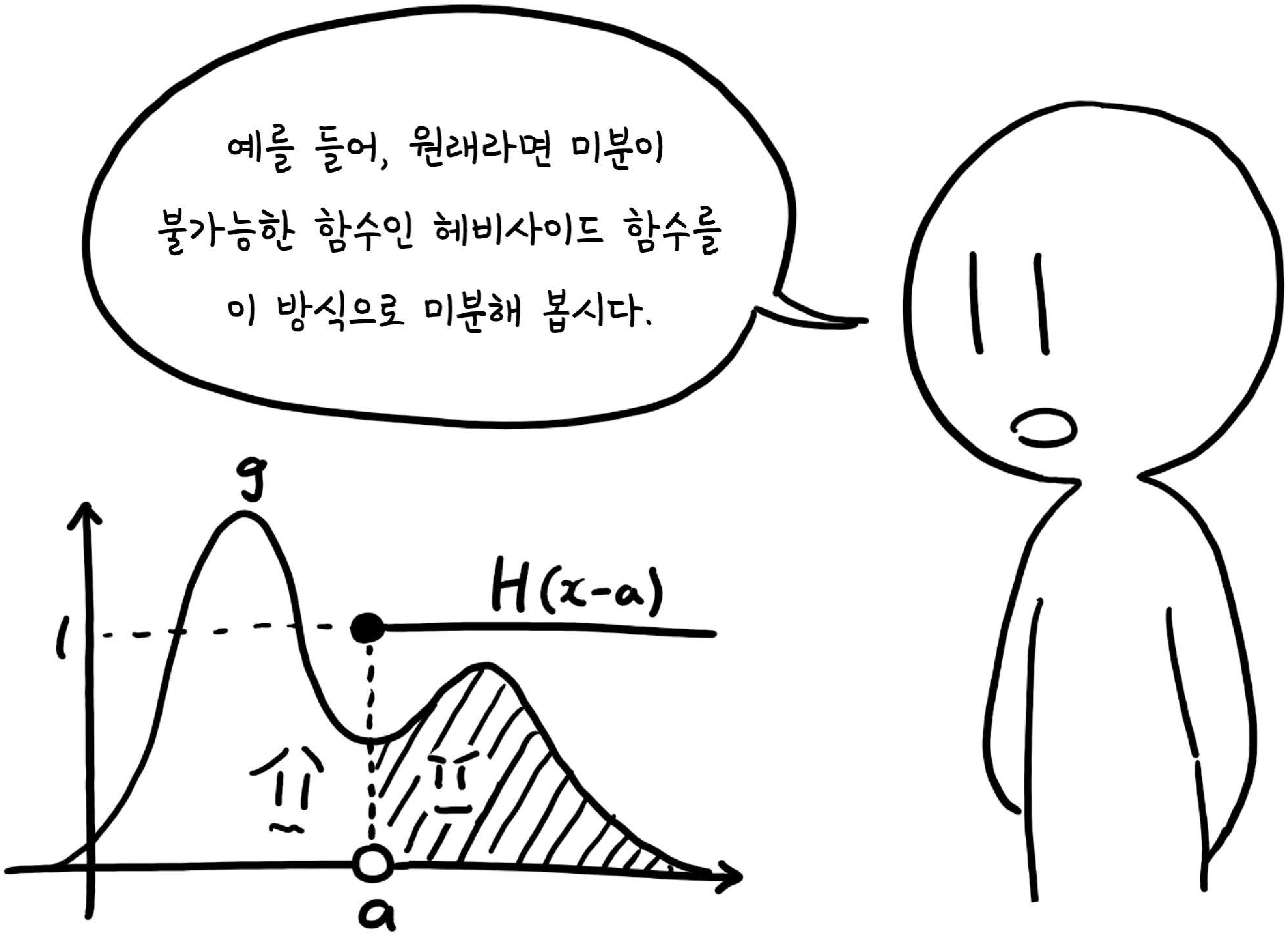


$$\int f'g = -\int fg' + \cancelto{0}{[fg]_{-\infty}^{\infty}}$$

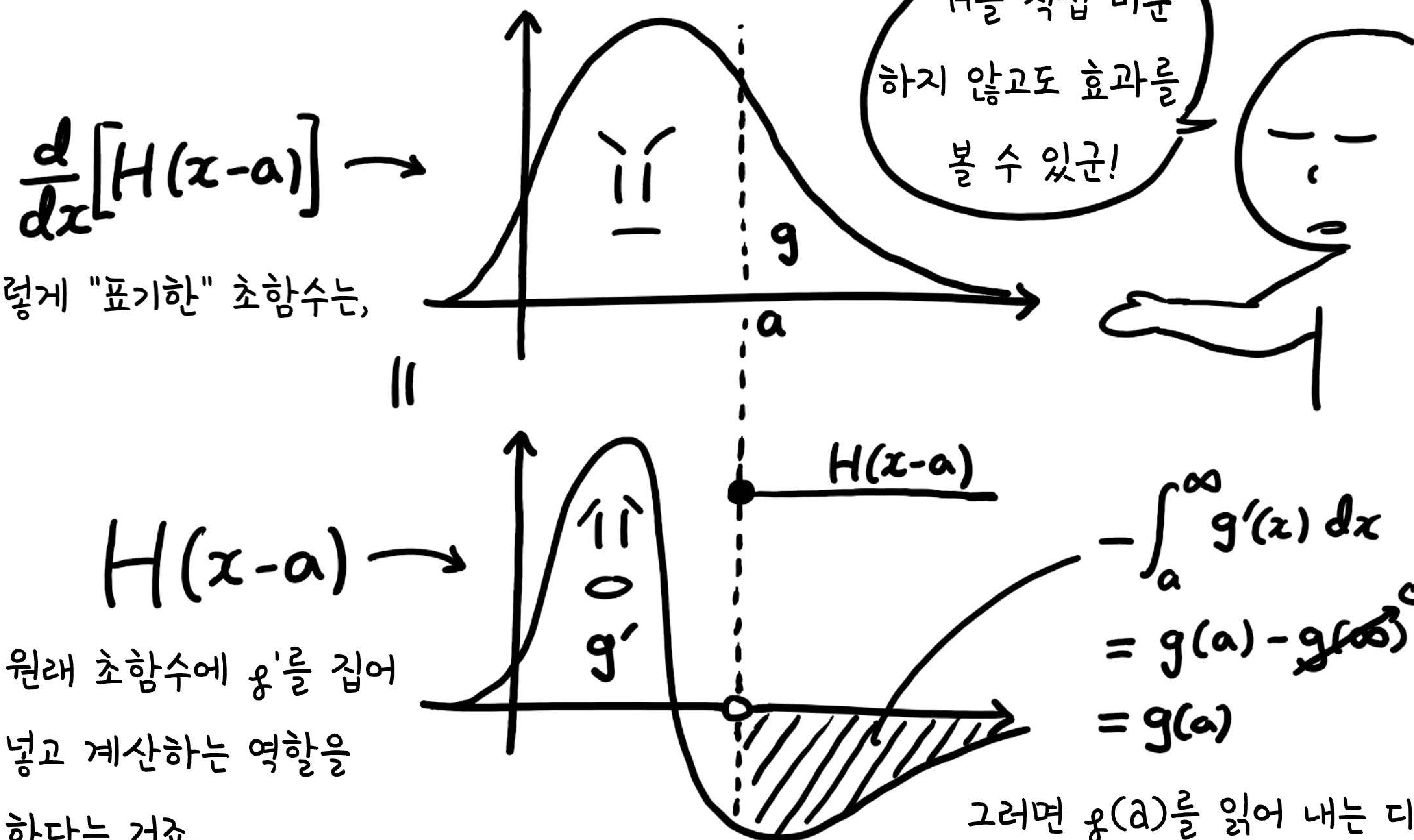
$: fg' + g'f$

여기서 f 자신 혹은 입력 함수 g가 무한대에서 죽으면 이런 등식을 얻죠.

그러니 이걸 흉내내서, 일반적인 초함수의 미분도 정의할 수 있지 않을까 싶죠.



방금 본 것처럼 부분적분을 이용해, 초함수 대신 테스트 함수에 미분을 취해 초함수에 집어넣는 거죠. 즉,



그러면 g(a)를 읽어 내는 디랙 델타의 효과를 보여준단 걸 알 수 있죠.

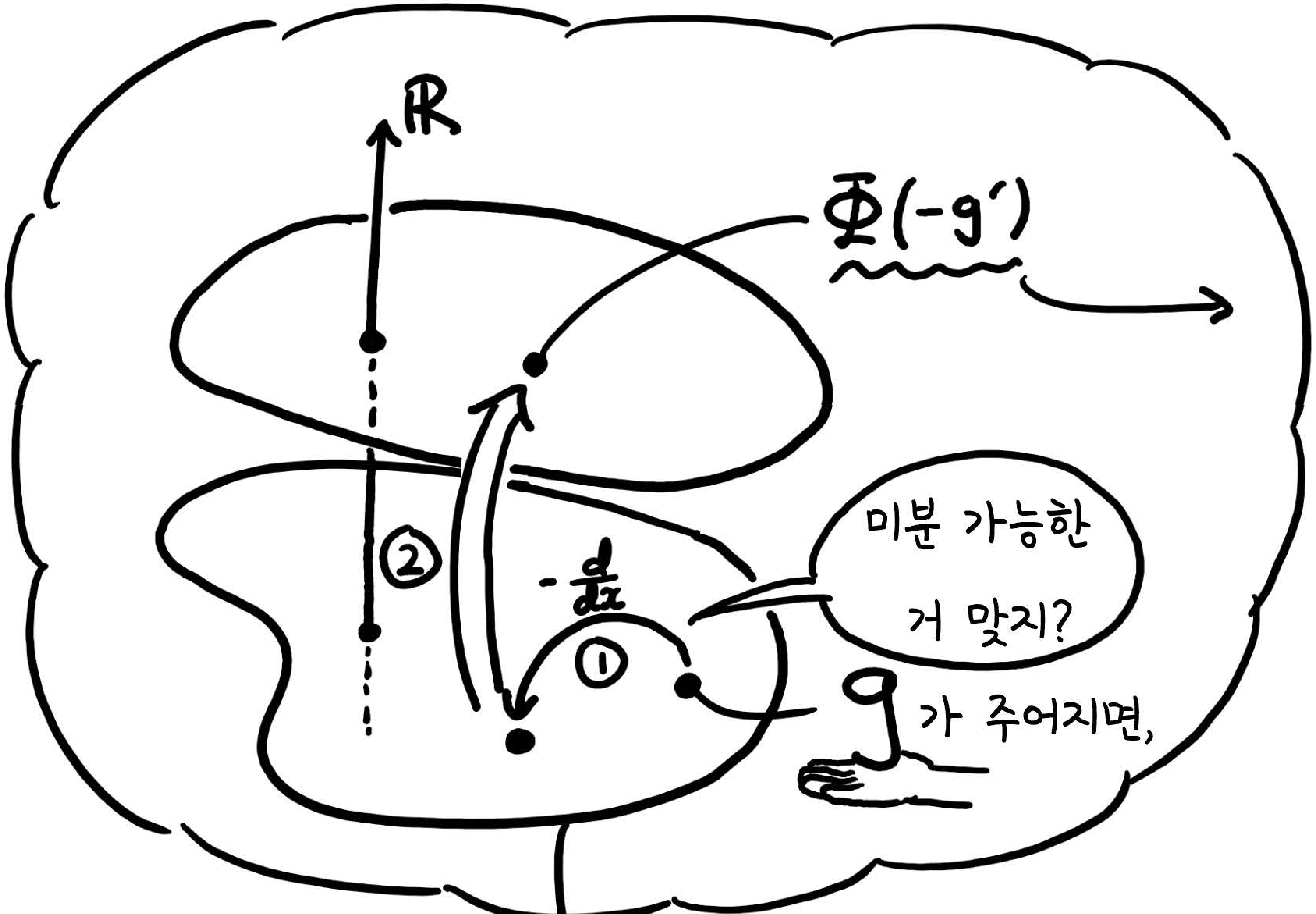

그러니 애초에 "x에 대한 함수"도 아니던 녀석을 x에 대한 함수로 볼 필요 없이,
$\delta(x-1) =$
∞
$\delta'(x-1) =$
∞
$-\infty$
$\delta''(x-1) = \cdots$
g
1
$\delta(x-1)$
$g(1)$
$\delta'(x-1)$
$g'(1)$
$\delta''(x-1)$
$g''(1)$
"함수에 대한 함수"로 인식하는 게
중요하단 걸 항상 명심해야 해요.

이런 식으로, 일반적인 초함수의 미분도 정의할 수 있어요. 아래와 같이.

Φ' ㅇㅇㅇ

$\Phi^{?}$

무슨 생각하냐?



이걸 결과값으로 내놓는 초함수를 원래 함수의 "미분"이라고 부르는 겁니다.

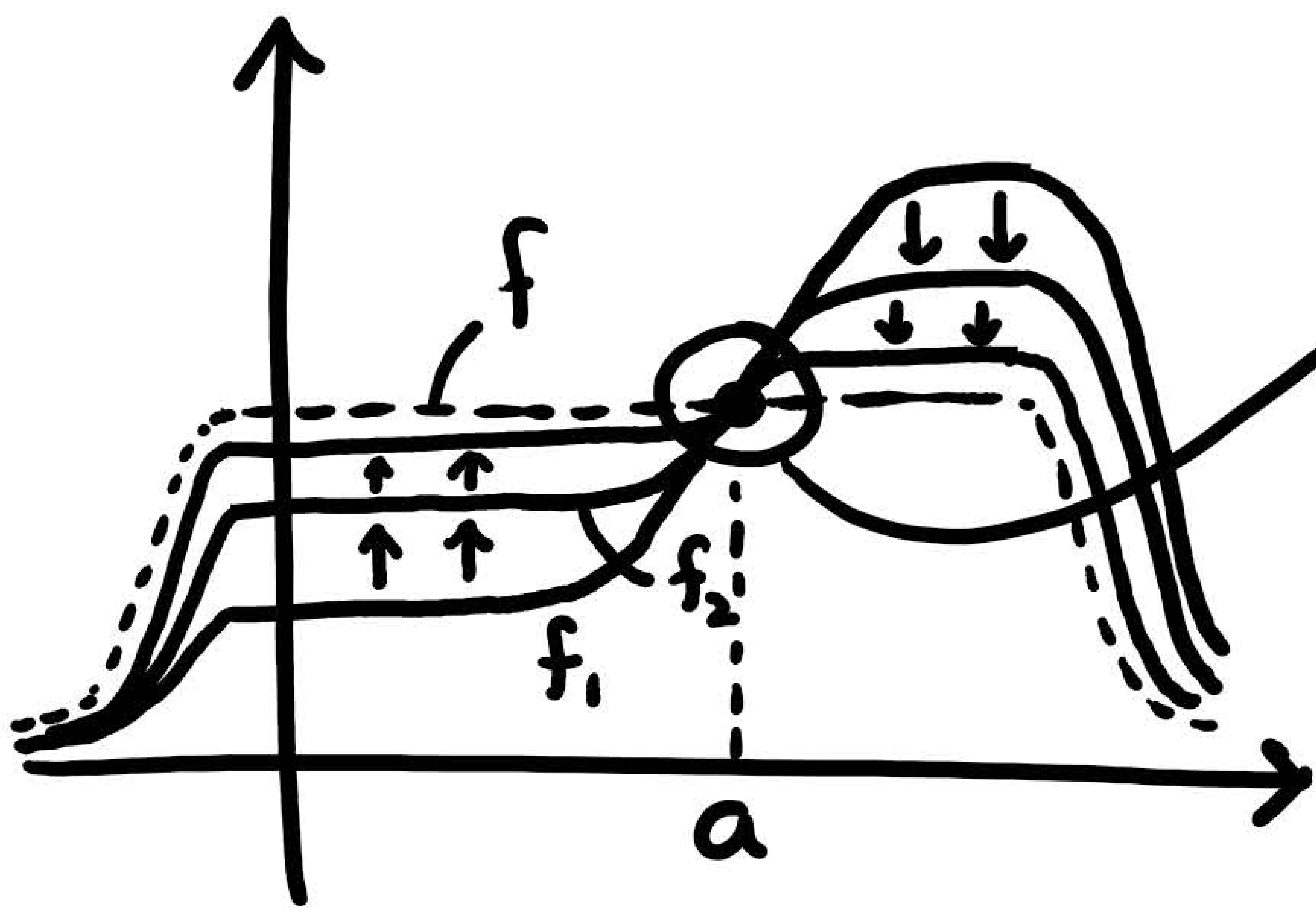
$S : \frac{d}{dx}, \cdots$ ㅇ

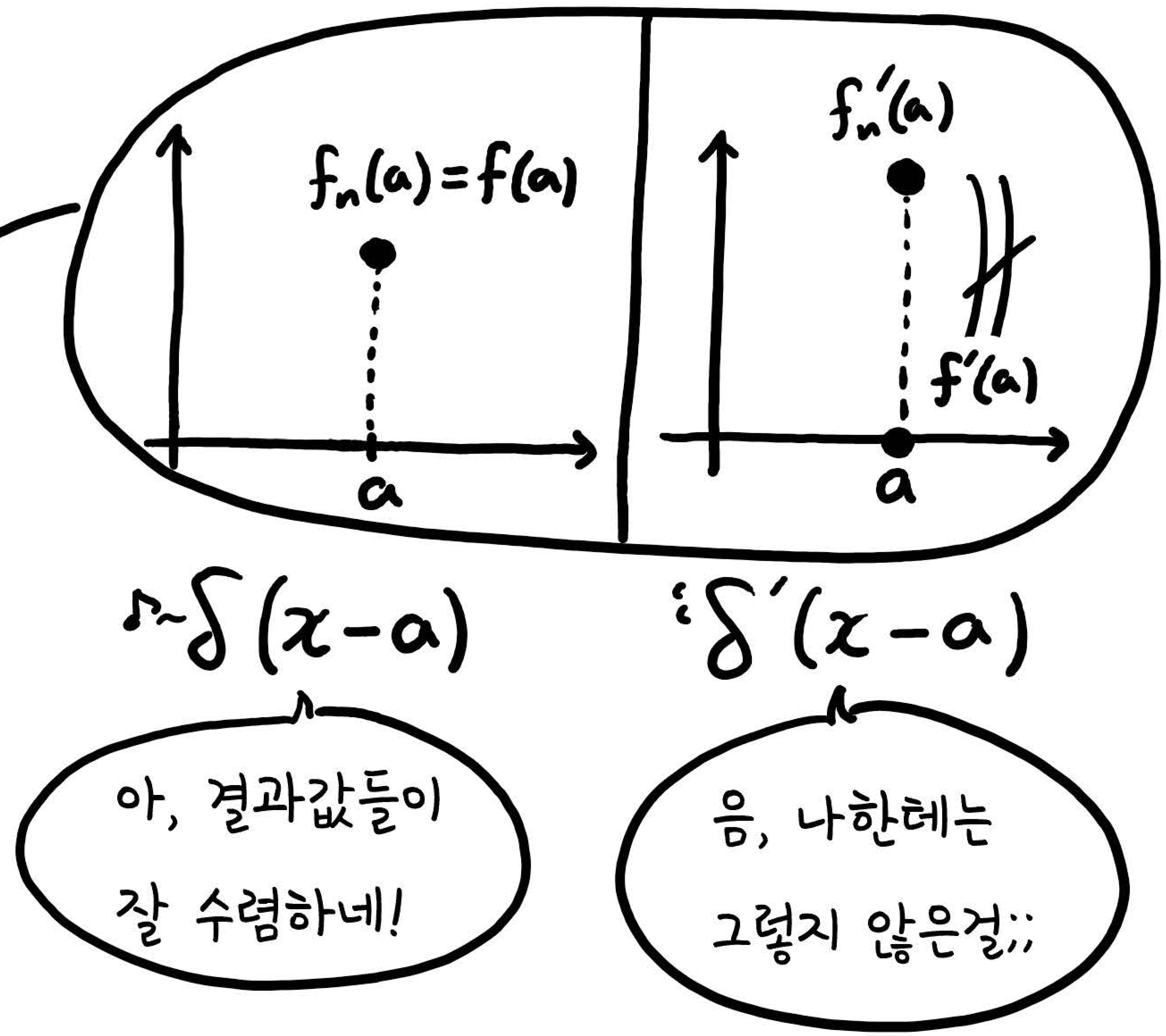
$\subseteq C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \{\frac{d^n}{dx^n} g|_{\pm\infty} = 0\}$

물론 이게 가능하려면, 테스트 함수 g는 무한 번 미분 가능하면서 x가 무한히 커질 때 $g(x)$, $g'(x)$, ...가 0으로 가야겠죠.

그리고 어떤 테스트 함수열이 다른 테스트 함수로 "수렴한다"는 말의 의미도 다시 생각해 볼 수 있어요. 예를 들어,

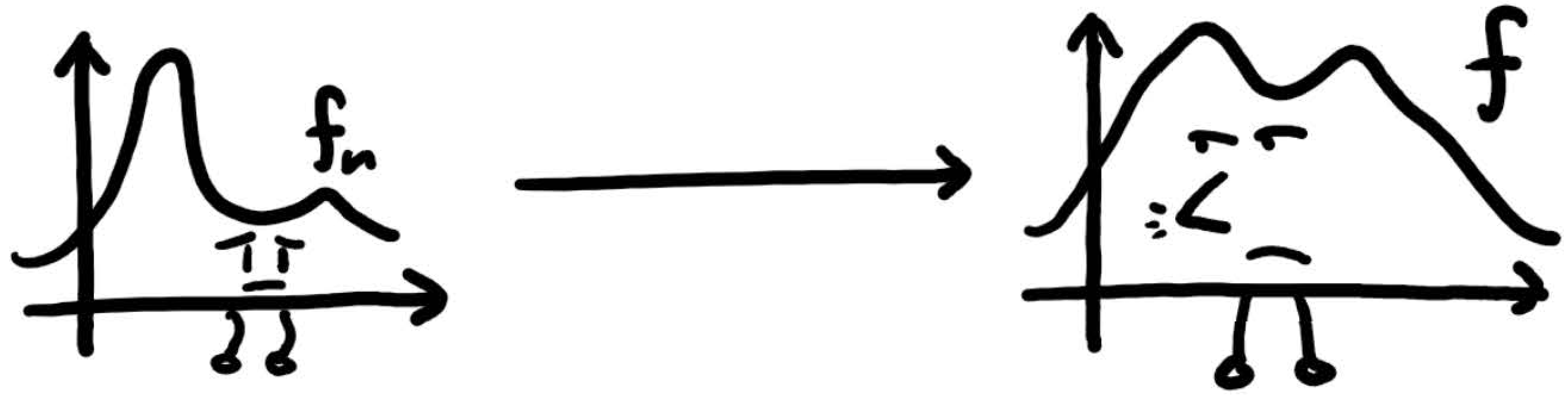
이런 함수열을 고려해 보면,

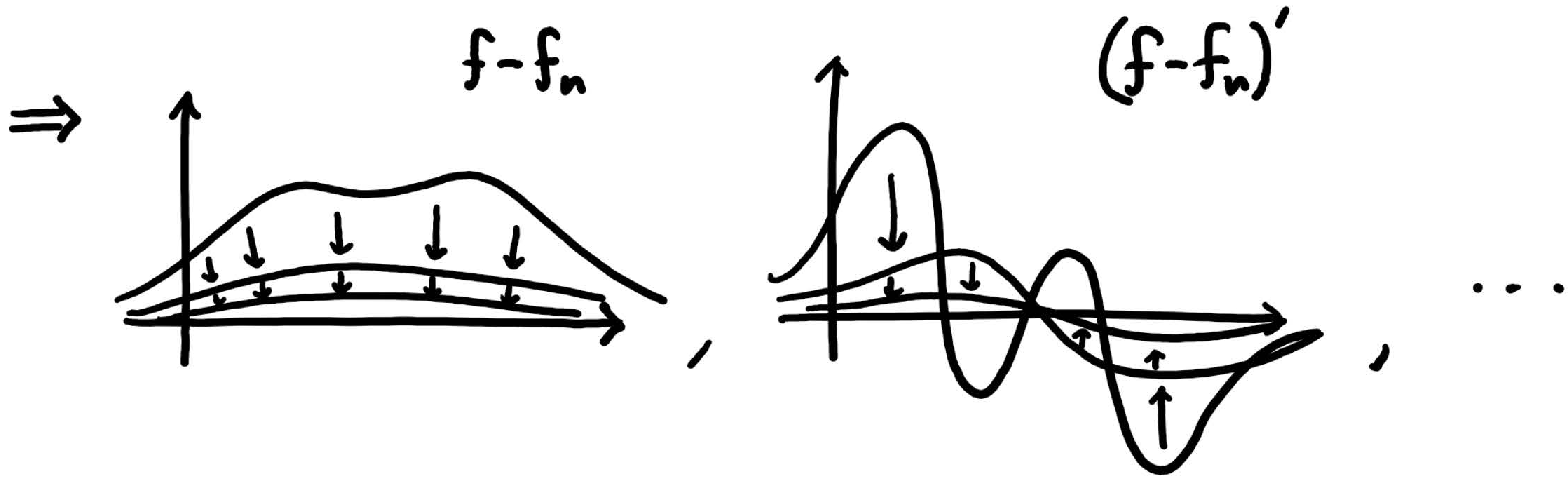




함숫값들은 수렴하고 있지만 도함숫값들은 수렴하지 않아, 디랙 델타 입장에서는 좋지만 그 미분에게는 좋지 않은 함수열이죠.

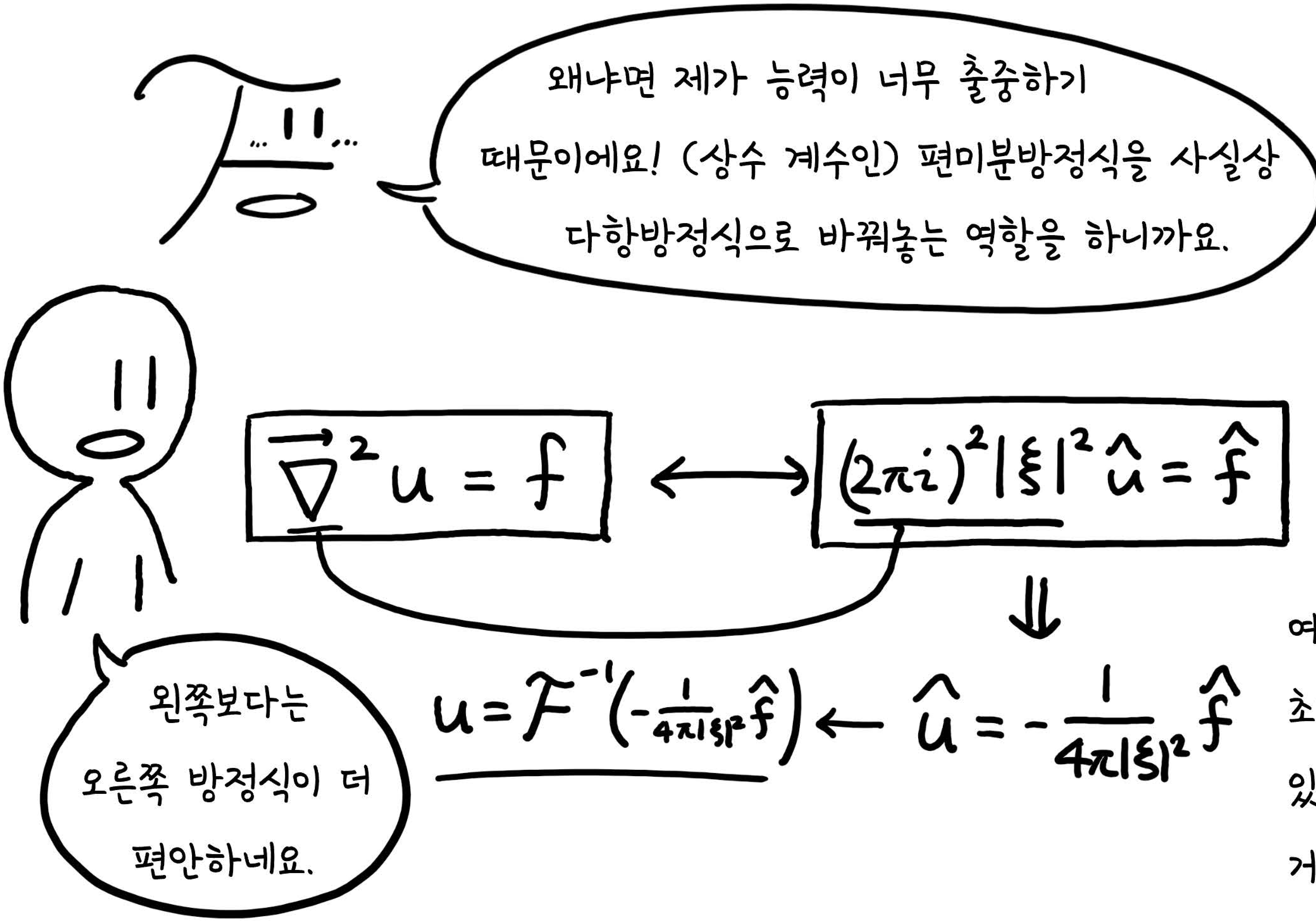
그러니 테스트 함수 공간에서 수렴성을 얘기할 때는,





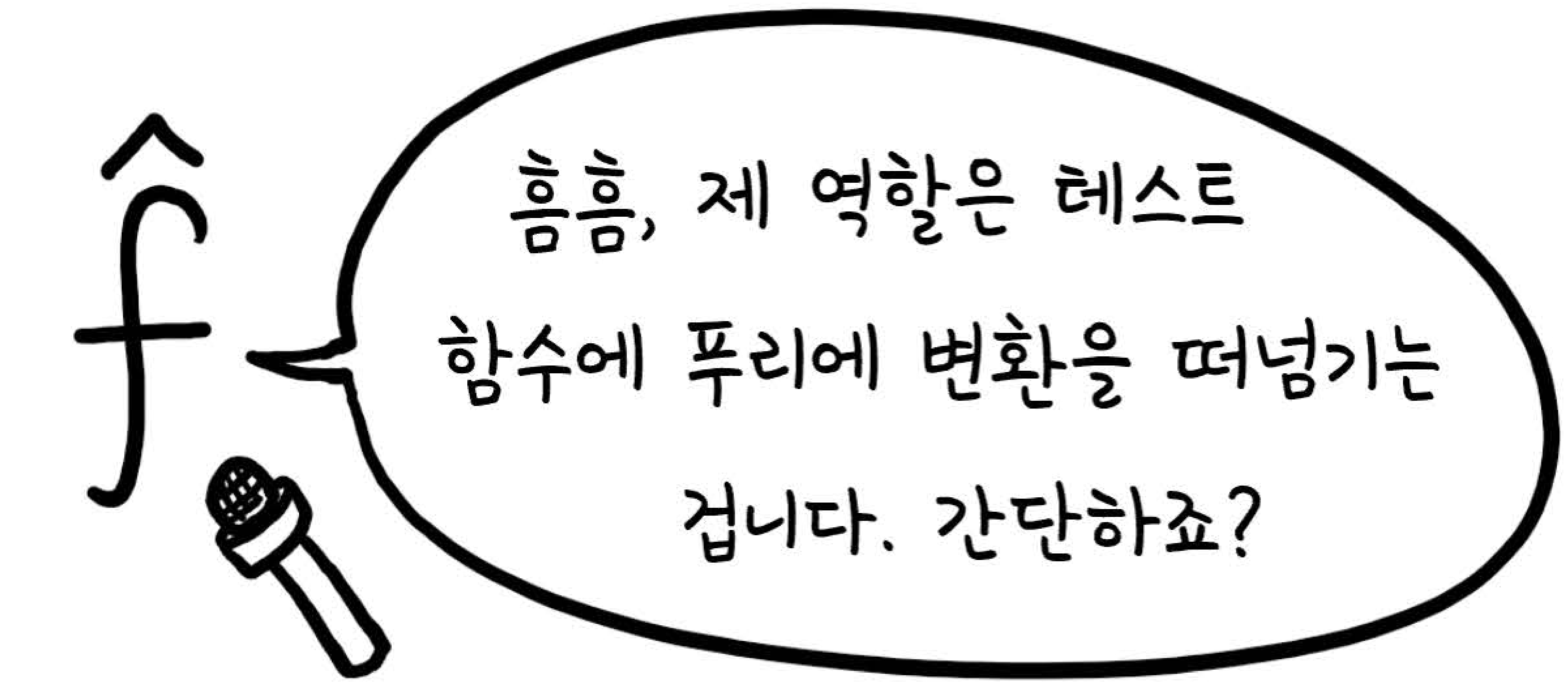
함숫값뿐만 아니라 그 도함수(및 고차도함수들)도 모두 균등하게 수렴하는지를 살펴봐야 한다는 걸 알 수 있어요. 초함수의 "미분"을 잘 정의하려면 말이에요.

이제 다음으로 정의해야 하는 건 초함수의 푸리에 변환이에요.



여기서 f 자리에 초함수도 넣을 수 있었으면 좋겠단 거죠.

이번에도, "좋은 함수"의 푸리에 변환이 테스트 함수에 어떻게 작용하는지를 보면 힌트를 얻을 수 있겠군요.



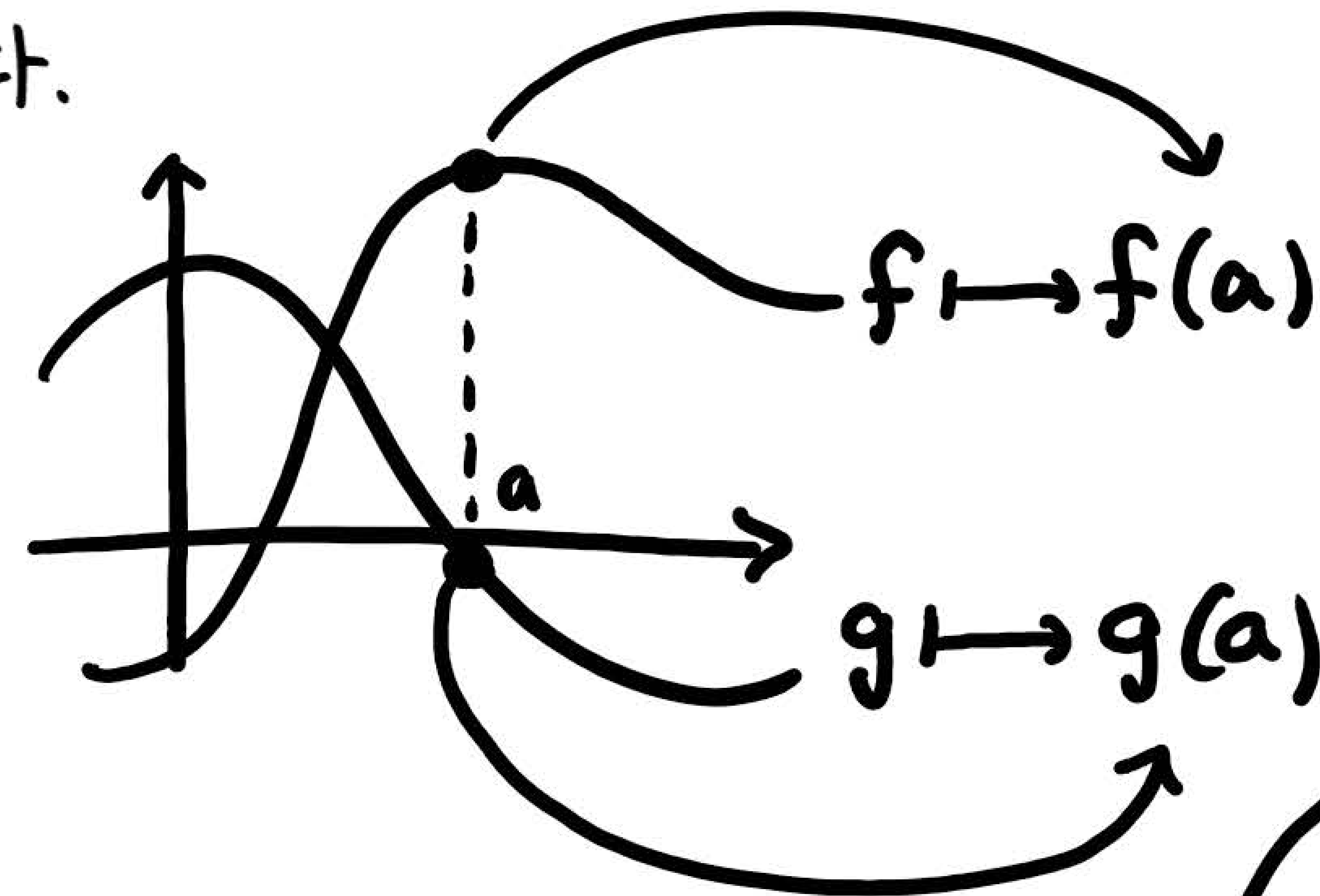
실제로, f, g가 적분 가능한 함수이기만 하면 푸비니 정리에 의해 다음이 성립합니다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(\xi)\, g(x)}_{x,\,\xi\ :\ \text{대칭적}}\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx\, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx$$

예시로 디랙 델타를 다시 가져와 봅시다.

$\delta(x-a)$:



얘의 푸리에 변환이

g에 작용하는 방식은,

$\Downarrow$

$$\left(\mathcal{F}(\delta(x-a))\right) g(\xi) = \underline{\delta(x-a)}(\mathcal{F}g)$$

난 a에서의 값을 읽어내지.

원래 디랙 델타가 g의 푸리에 변환에 작용하는 방식인데, 이 결과물을 살펴보면...

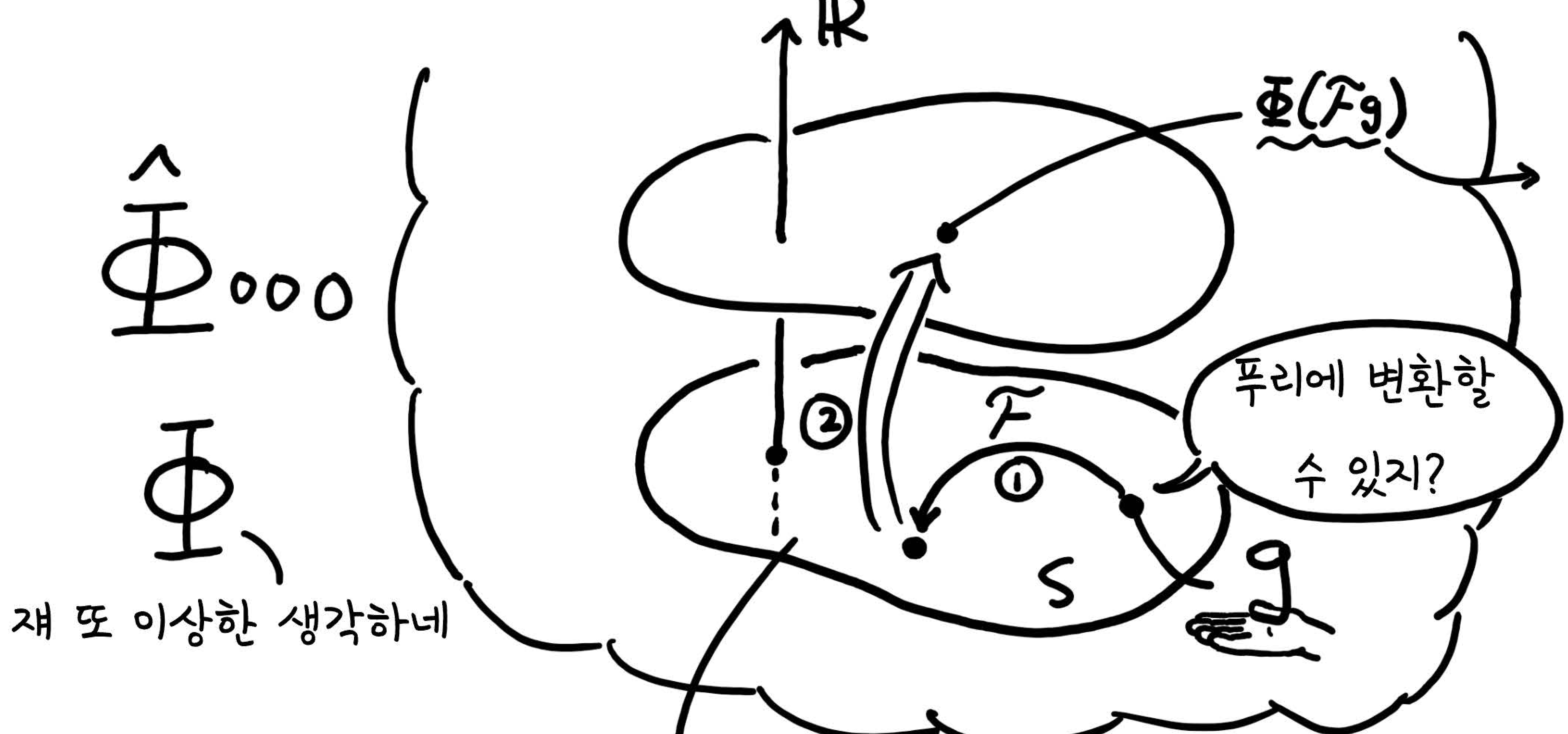
$$= \mathcal{F}g(a) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-2\pi i a\xi} d\xi$$

$e^{-2\pi i a\xi}$

내가 작용하는 방식이랑 똑같네!

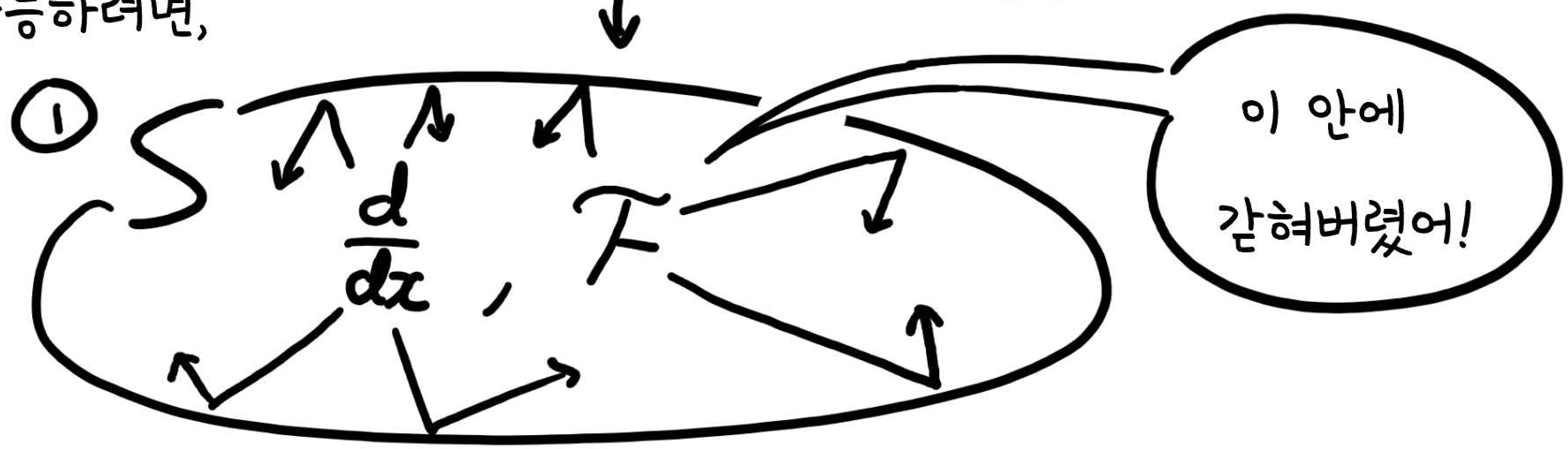
$$: \underbrace{\mathcal{F}(\delta(x-a)) = e^{-2\pi i a\xi}}_{\text{초함수로서}}$$

그럼 이번에도 일반적인 초함수에 이런 전략을 적용할 수 있겠네요.



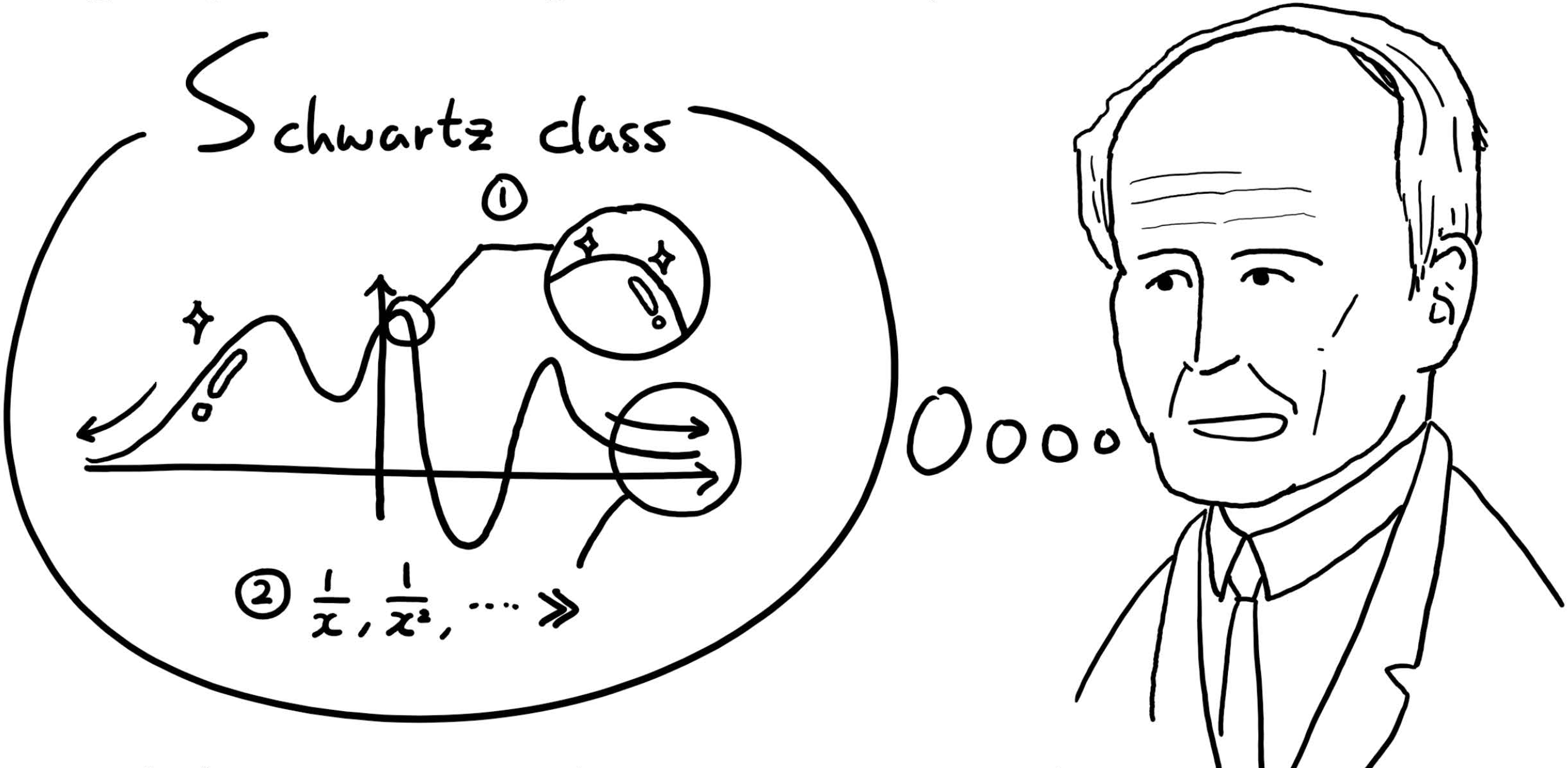
이렇게 초함수 대신 테스트 함수를 푸리에 변환한 다음 초함수에 집어넣는 것 말이에요.

이게 가능하려면,



테스트 함수 공간에서는 미분 및 푸리에 변환을 해도 그 결과물 역시 테스트 함수여야겠죠.

그래서 슈바르츠는 다음과 같은 테스트 함수 공간을 제안했어요. 무한 번 미분 가능하다는 매끄러움 조건은 당연하고,

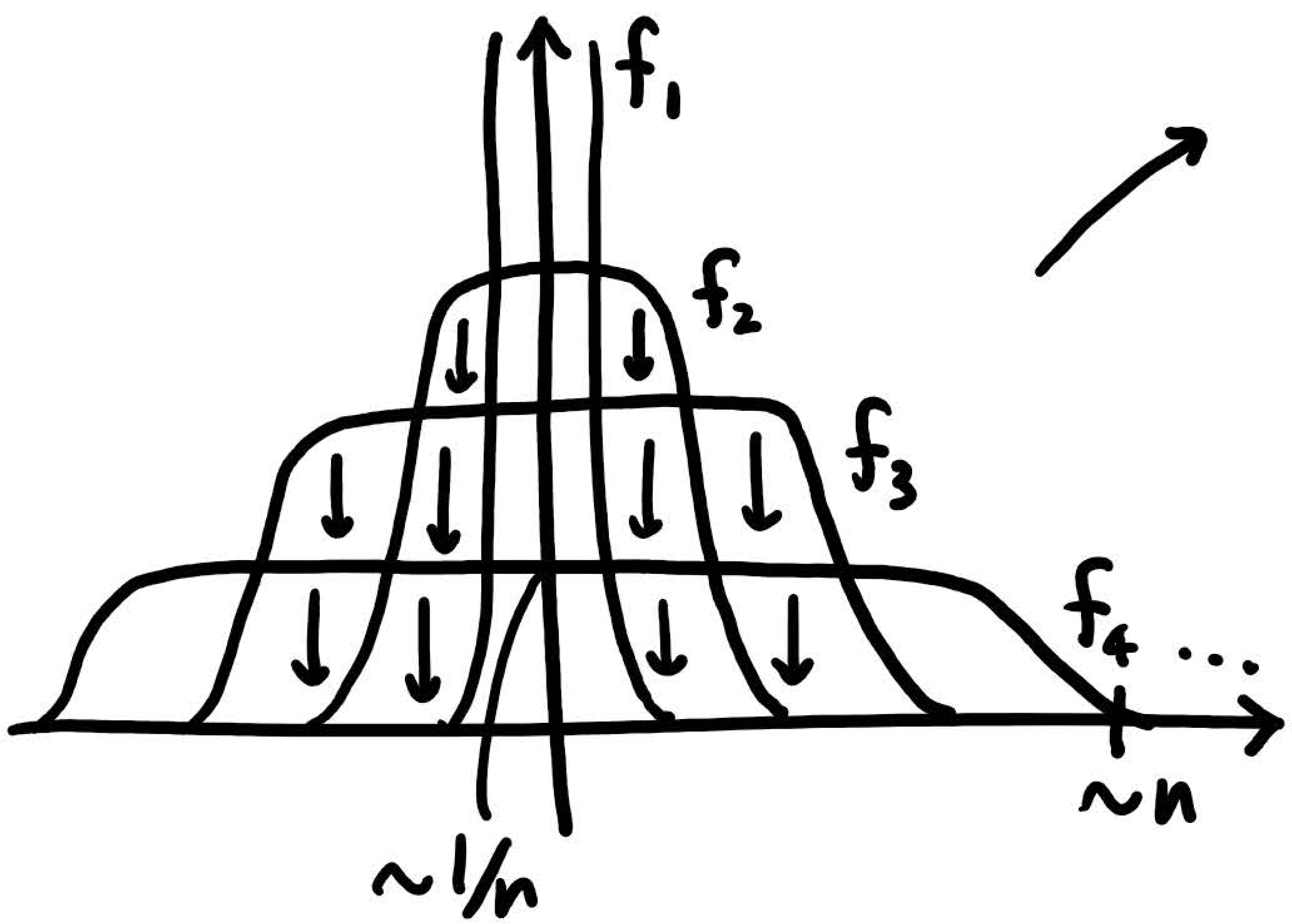


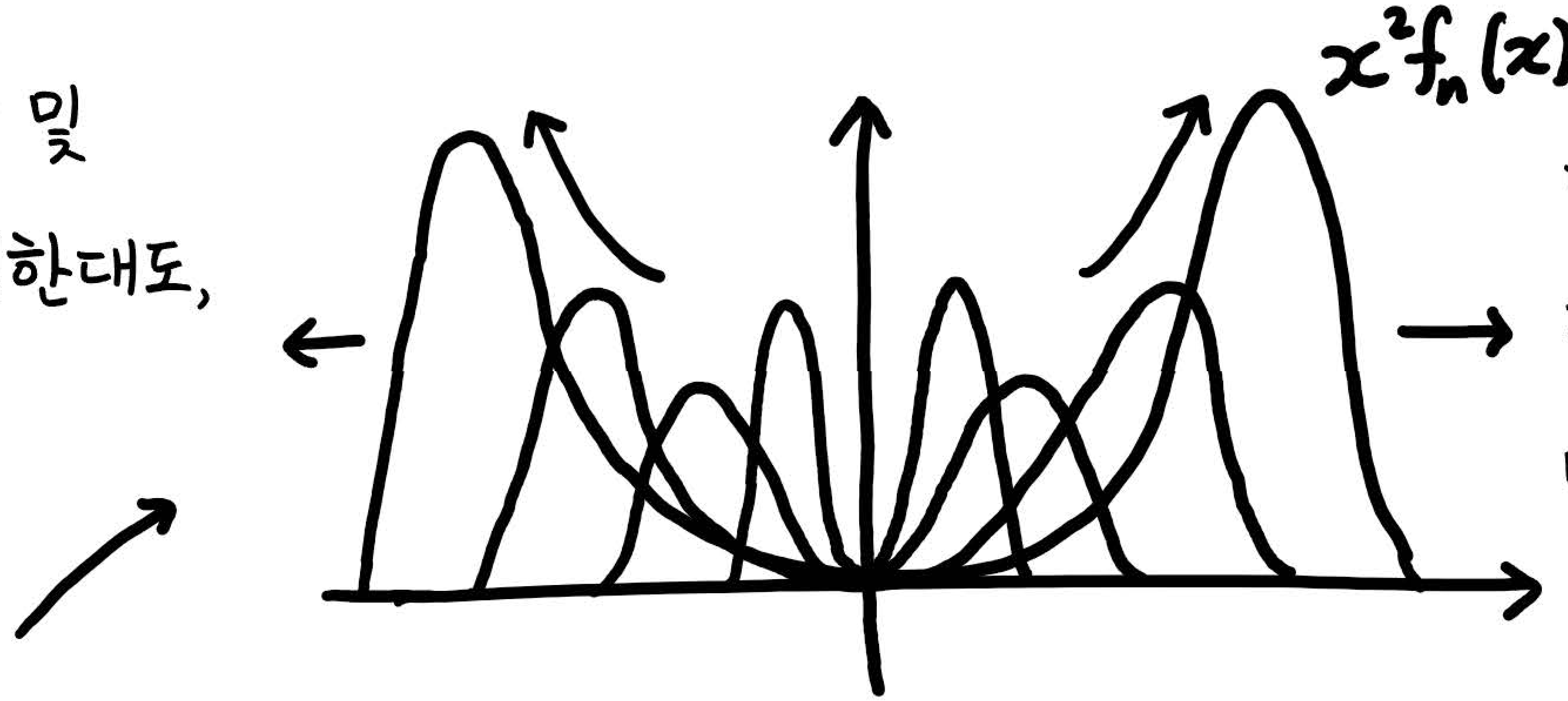
그 어떤 다항 함수보다도 더 빠르게 감쇄해야 한다는 조건까지 덧붙인 거죠.

이 두 조건은 미분 및 푸리에 변환에도 끄떡없이 보존됩니다.

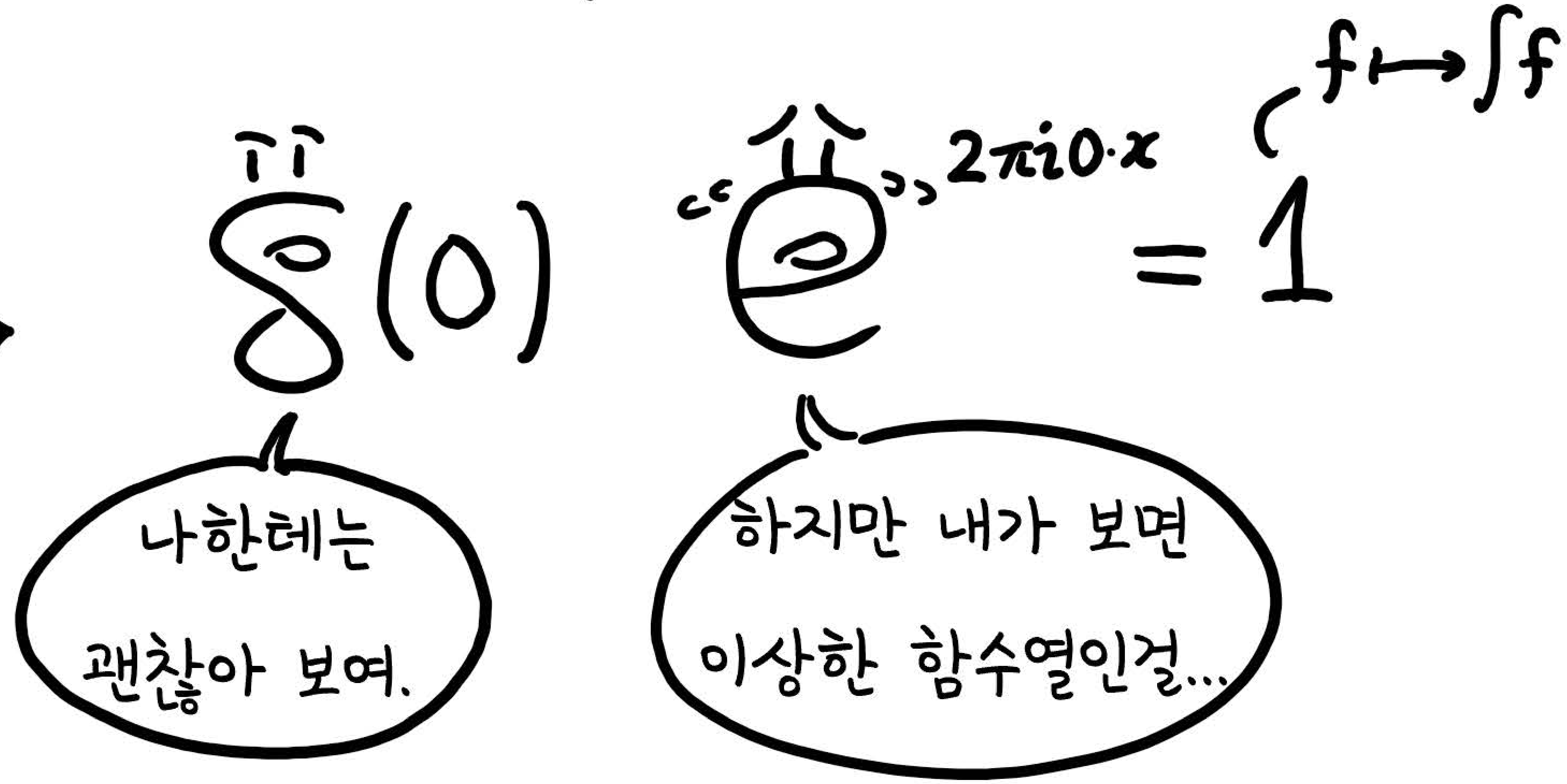
그리고 테스트 함수열에서의 수렴 조건도 조금 바꿔야 할 것 같아요.

예를 들어 테스트 함수열의 함숫값 및
그 도함수들은 0으로 균등하게 수렴한대도,

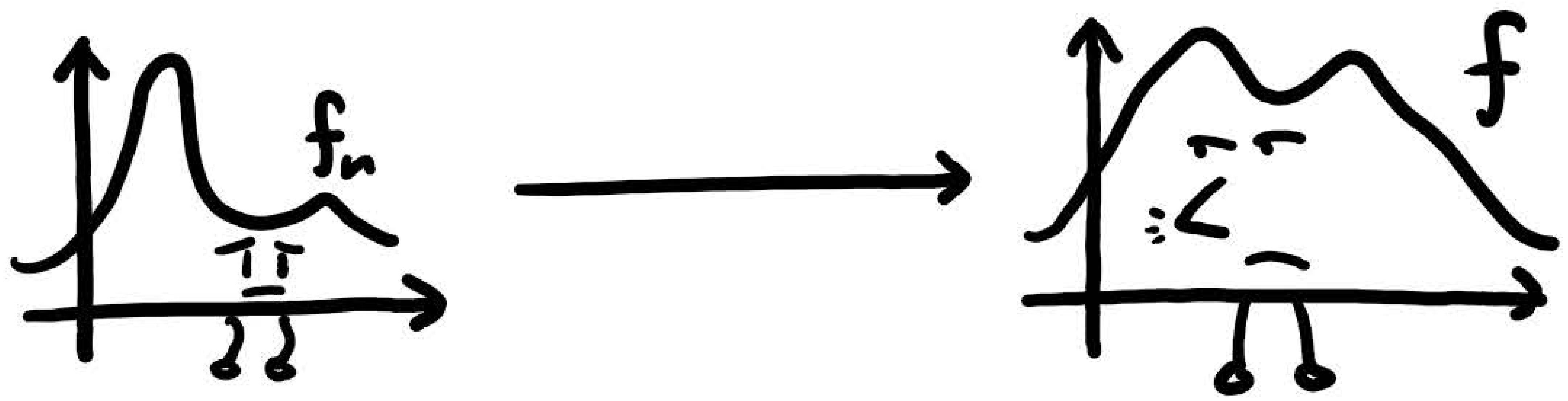




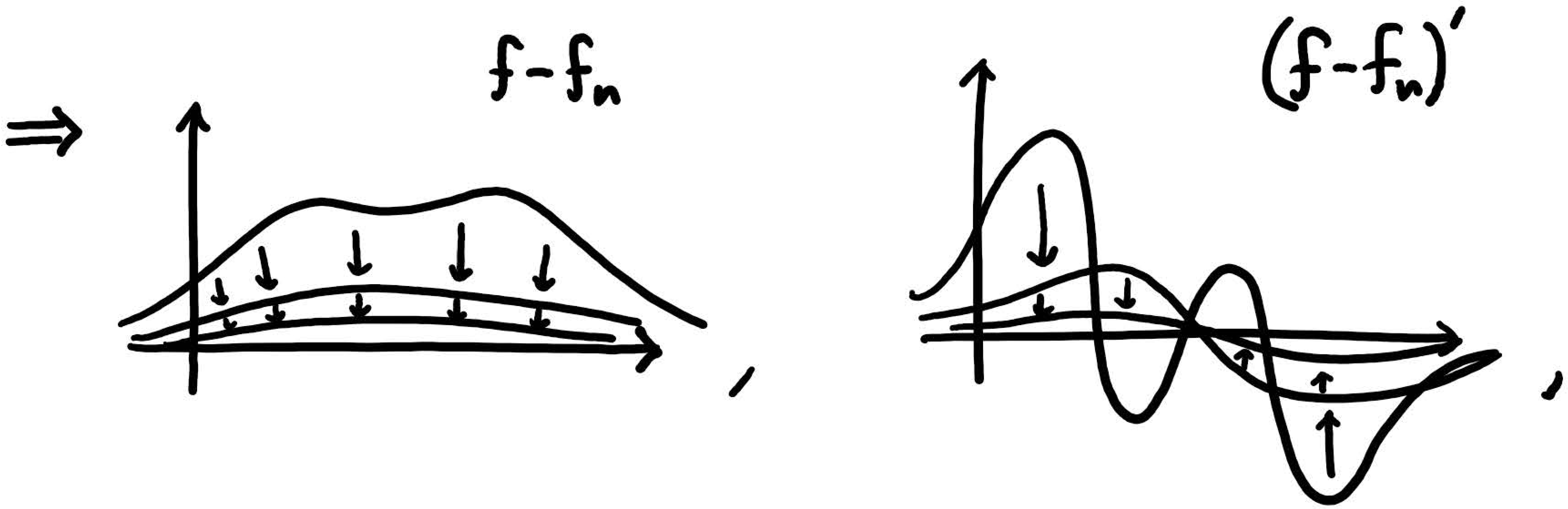
다항식을 곱하면
감쇄가 상쇄될
만큼 약하다면...



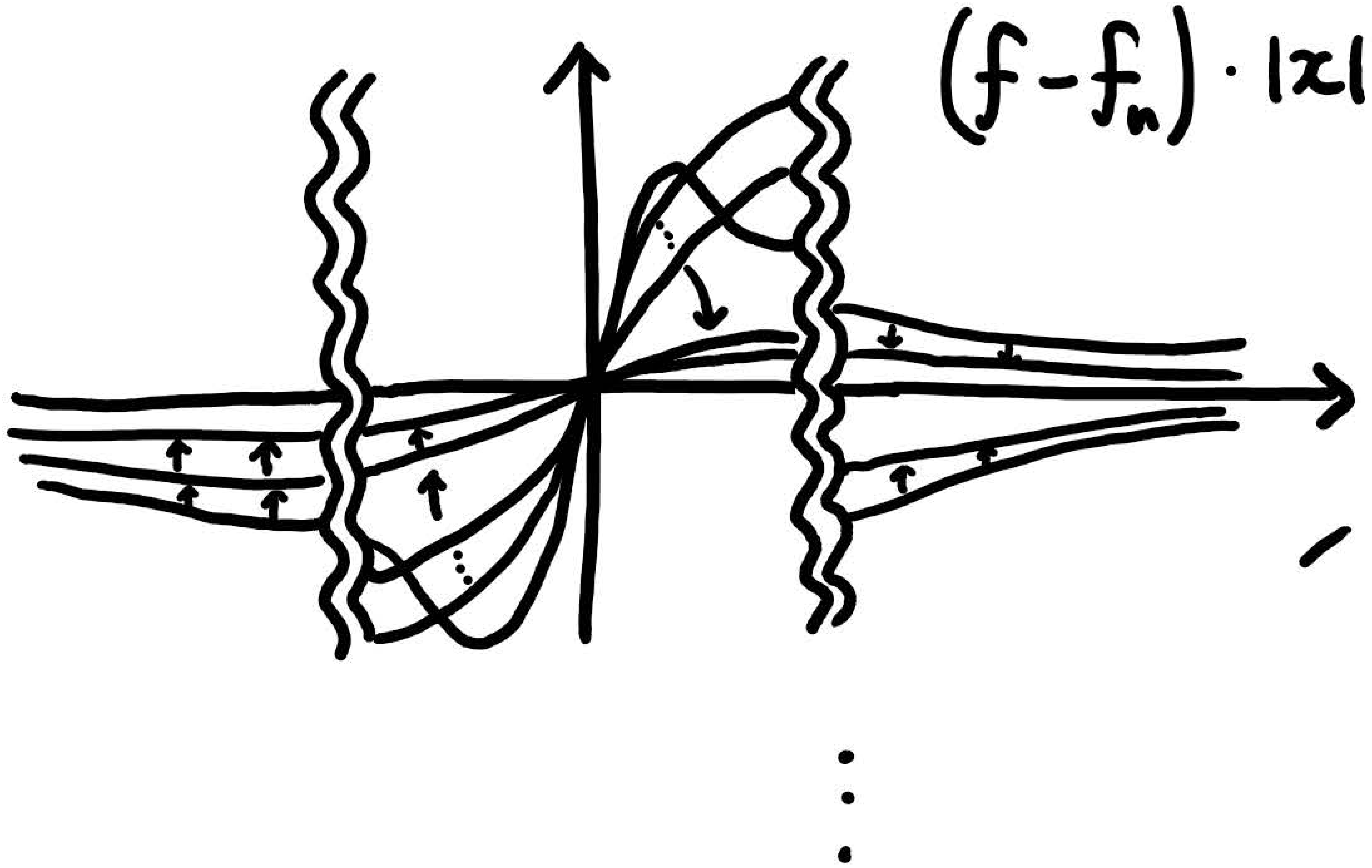
어떤 초함수에게는 수렴하는 함수열처럼
관찰되지만 그 푸리에 변환에게는 수렴
하지 않는 것처럼 보일 수 있어요.



그러니 슈바르츠 공간에서 어떤 함수열이
다른 함수로 수렴한다는 건,



. . . 함수 및 도함수값들이
균등하게 수렴하는 건
물론이고,

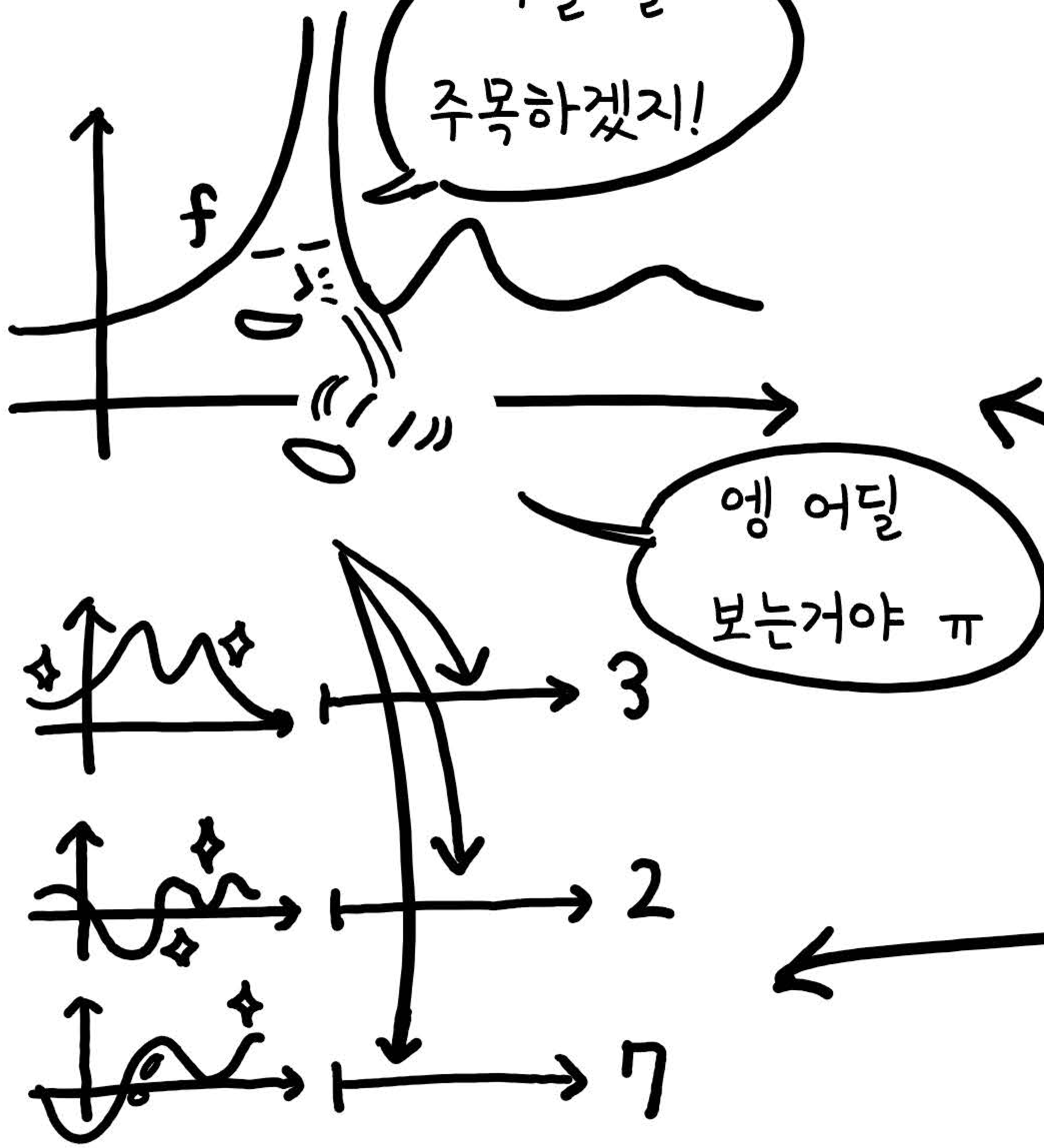


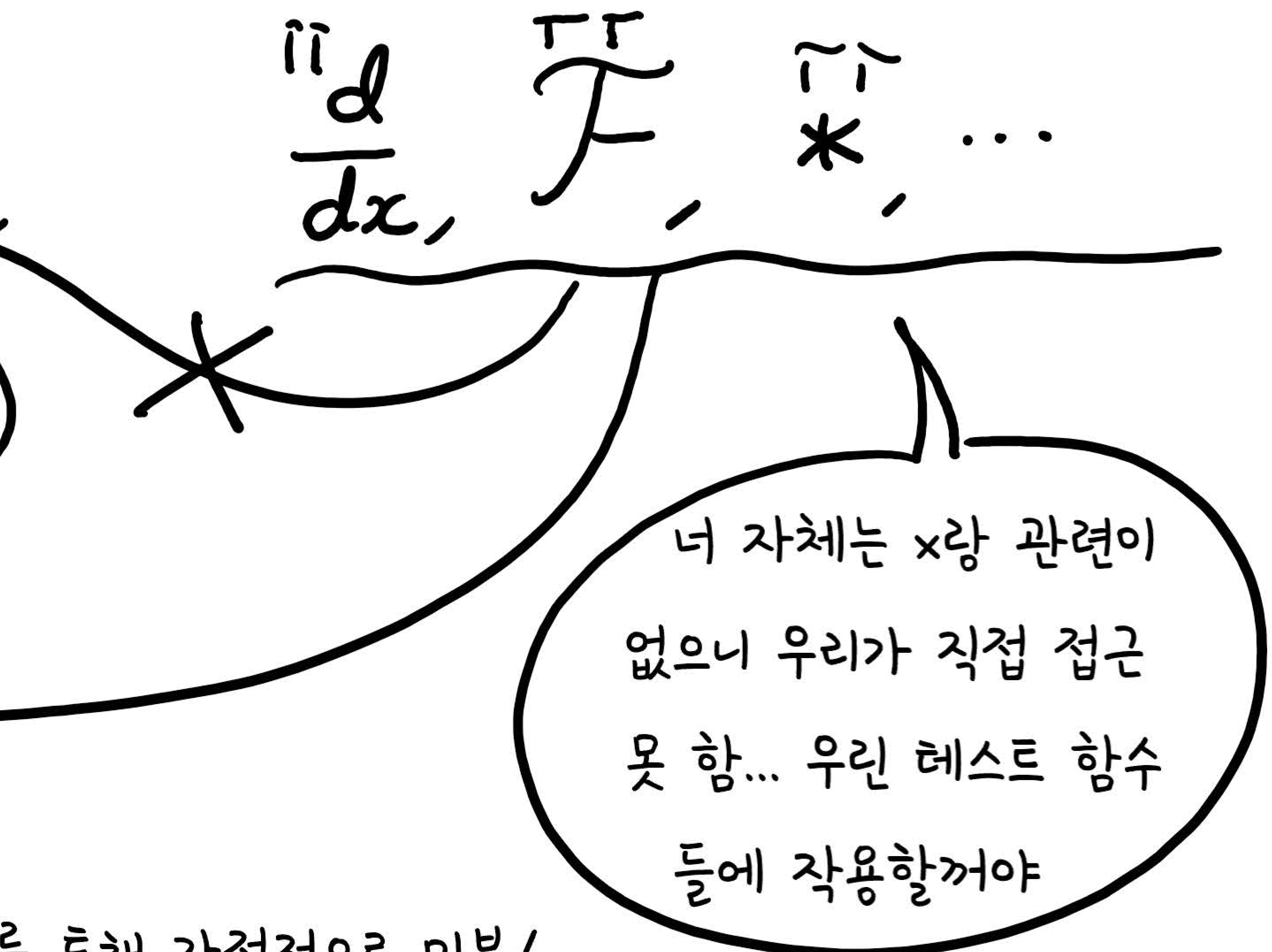
⋱

거기에 다항식을 곱해도
여전히 균등하게 수렴하는
상황을 말하는 거예요.

좀 테크니컬한 부분이 있지만, 요약하자면 다음과 같아요.

초함수는 (그게 원래는 x에 대한 함수였든 아니든) "함수의 함수"로서 다룰 거고,





이렇게 테스트 함수를 통해 간접적으로 미분/푸리에 변환 등을 생각할 거란 거죠.

이런 정의를 이용하면, 초함수에 대한 미분방정식도 의미를 가질 수 있습니다.

우변이 너무 못생겼는데요;;

$$\vec{\nabla}^2 u = \delta(x)$$

잔말 말고 풀어라.

이런 상황에서도, 먼저 푸리에 변환을 해 주면...

$$(2\pi i)^2 \|\xi\|^2 \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\vec{\nabla}^2 u) = \mathcal{F}(\delta) = 1$$

아주 예쁜 다항식이 나오니, 이걸로 양변을 나눠 주고 푸리에 역변환만 하면 됩니다.

$$u = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{-4\pi^2|\xi|^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{4\pi|\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$$

그러면 이렇게 디랙 델타를 결과물로 내놓는 미분방정식의 해도 구할 수 있는 거죠!

아직은 함수가 아니라 초함수로서의 의미지만요.

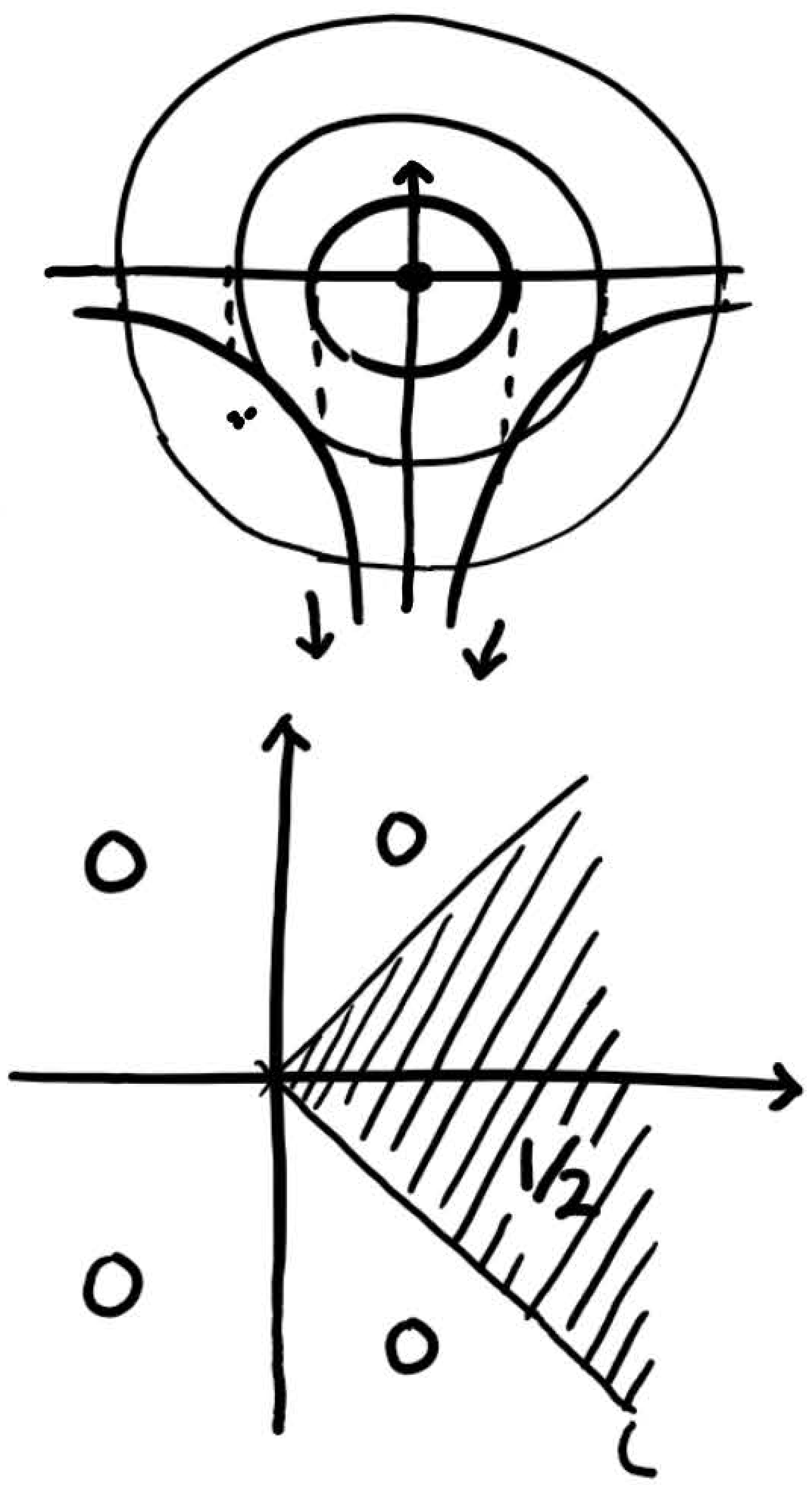
놀랍게도, 이런 방식은 임의의 상수 계수 편미분방정식에 적용할 수 있어요.

$$\boxed{\sum_{i_1,\cdots,i_k} \underbrace{a_{i_1\cdots i_k}}_{\text{상수}} \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} u = \delta(x)}$$

나는 항상 초함수
관점에서의 해를 가진다구!
계산은 좀 힘들지만...

이때 나오는 해를 편미분방정식의 "근본적 해(fundamental solution)"라고 부릅니다. 예시를 들어 보면,

$$\vec{\nabla}^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 : F = -\frac{1}{4\pi r}$$

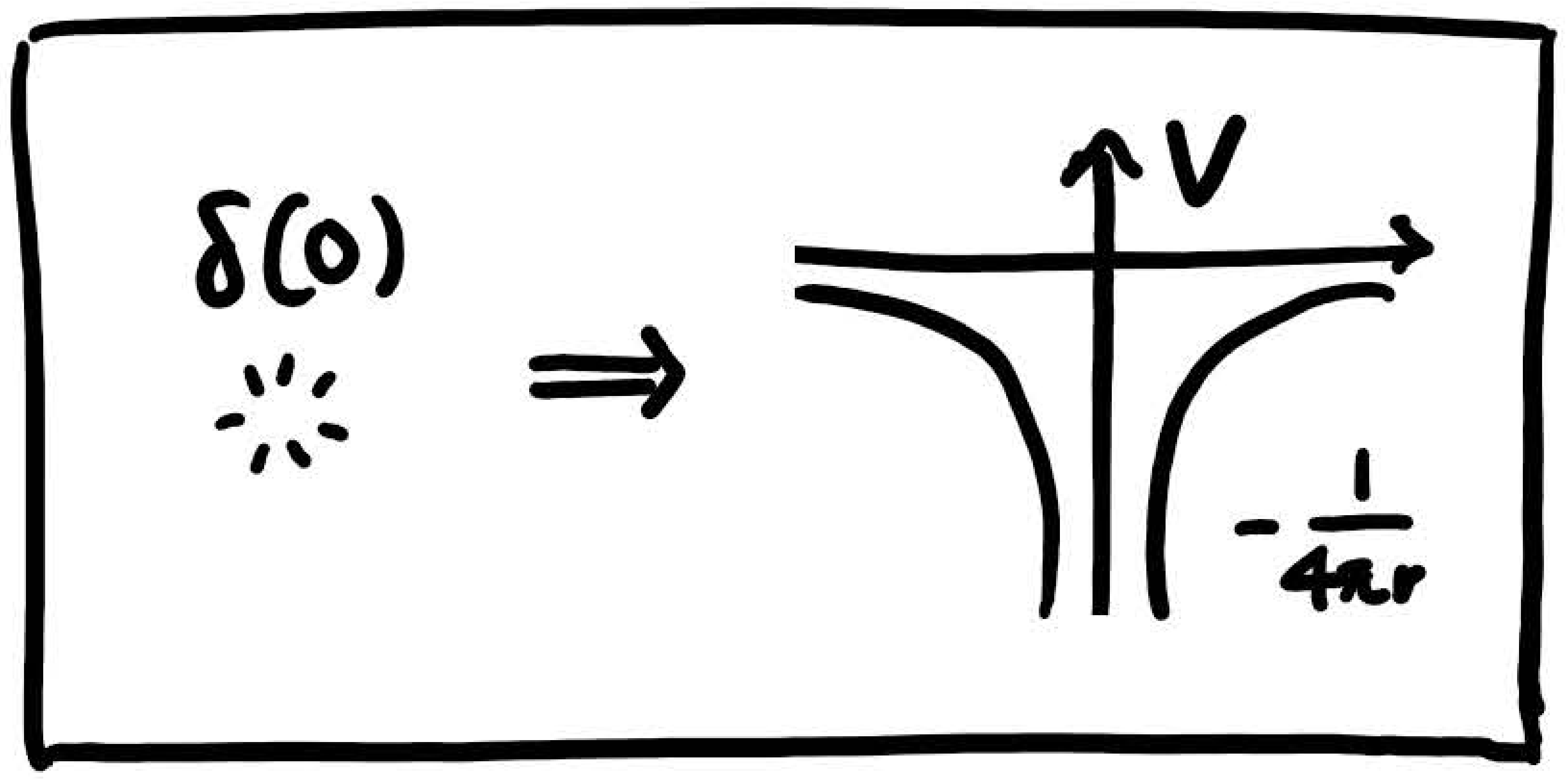


라플라스 방정식의 근본적 해는 r의 지수승으로 나타나고,

$$\square^2 = \partial_t^2 - \partial_x^2 :$$

$$F = \frac{1}{2} H(t-x) H(t+x)$$

이런 파동방정식의 근본적 해는 (약간 수정해 주면) 왼쪽과 같이 구할 수 있어요.

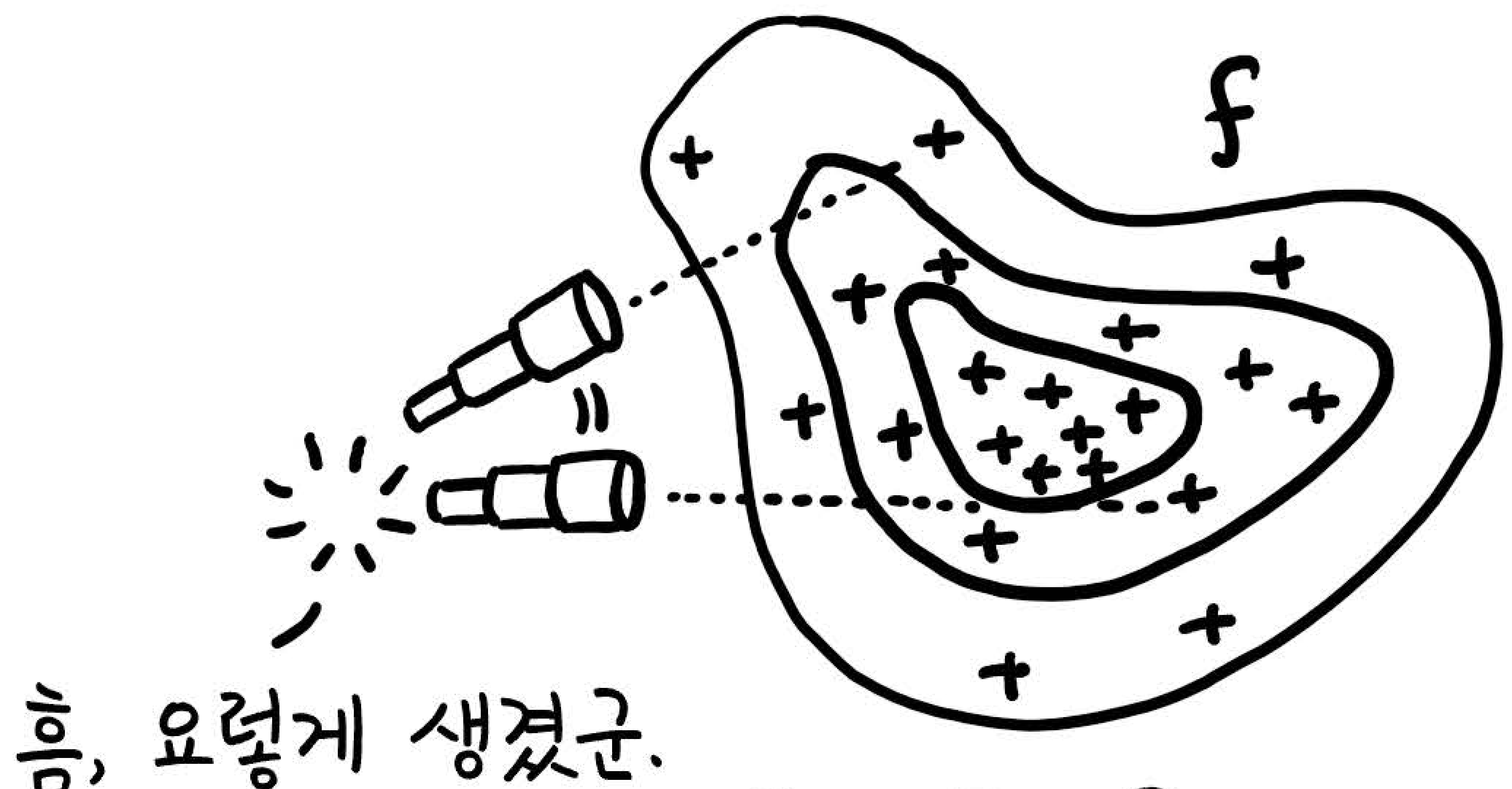


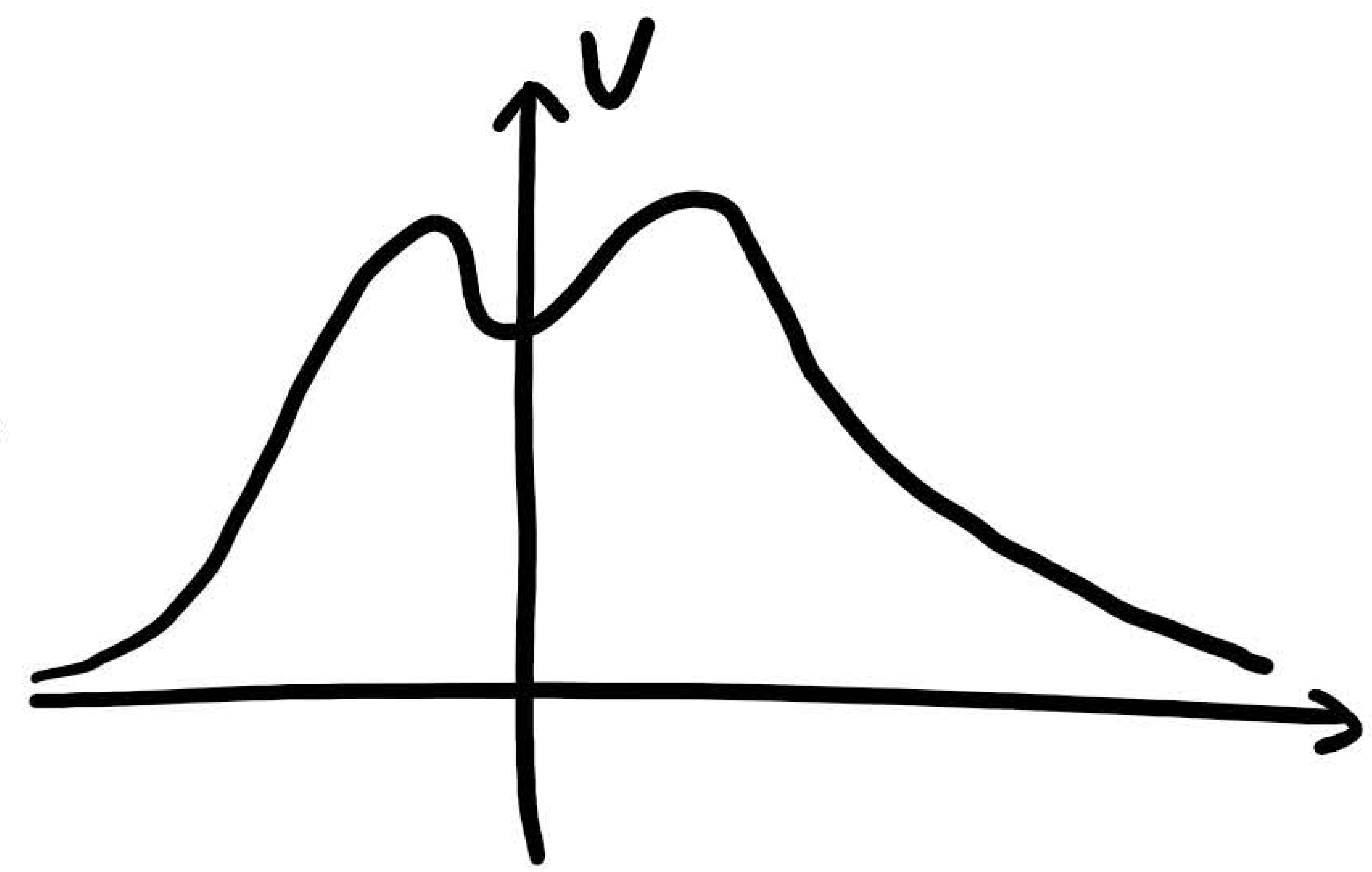
음 그런데, 초함수로서의 해는... 뭔가 우리가

보통 생각하는 함수로서의 해는 아니잖아요?

그럼 전부 형식적인 이야기일 뿐 아닌가요?

앗 그렇죠. 'x에 대해' 제대로 미분하지도 못하는 함수를 어디다 쓰겠어요?





$f = \delta * f$

$F * f \leftarrow \nabla^2 u = \delta * f = f$

...가 아니라, 델타 함수를 이용해 방정식의 우변 f를 읽어낸 후, 그 정보를 F와 결합하면

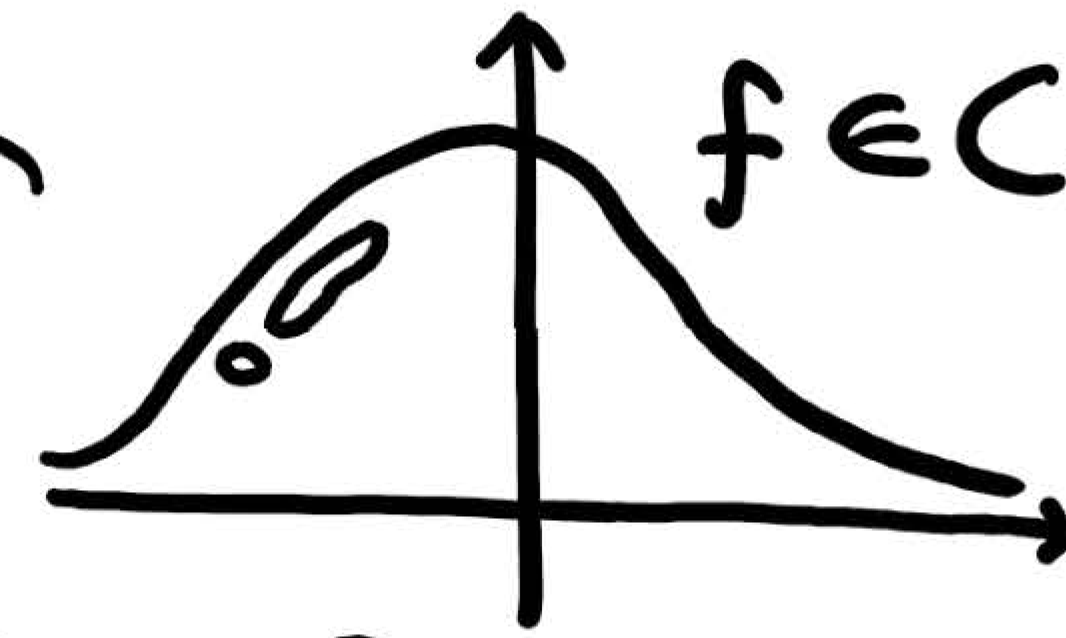
"형식적인 초함수"로서가 아니라 "진짜 함수로서"의 해가 만들어집니다.

어떻게 이게 가능한 걸까요? 일단, 시키는 대로 근본적 해를 먼저 하나 준비합니다.

$$\vec{\nabla}^2 F(x) = \delta(0)$$

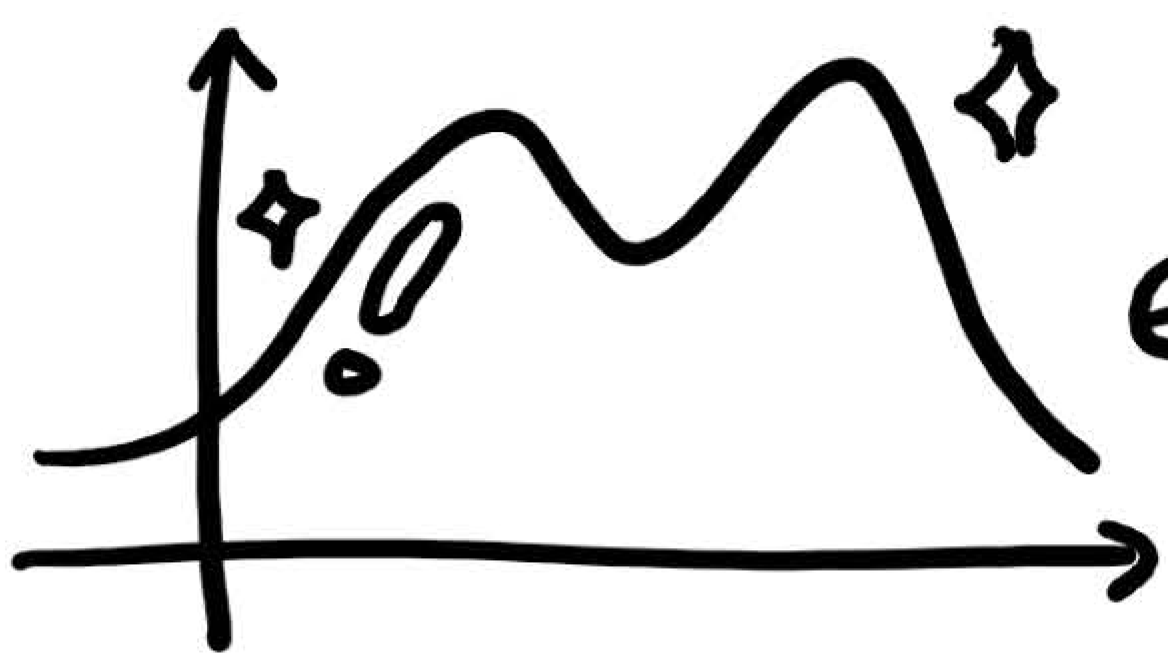
아직은 함수가 아닌 초함수로서의 등식이지만....

이런 "매끄러운" 정보 함수와 결합해주면?



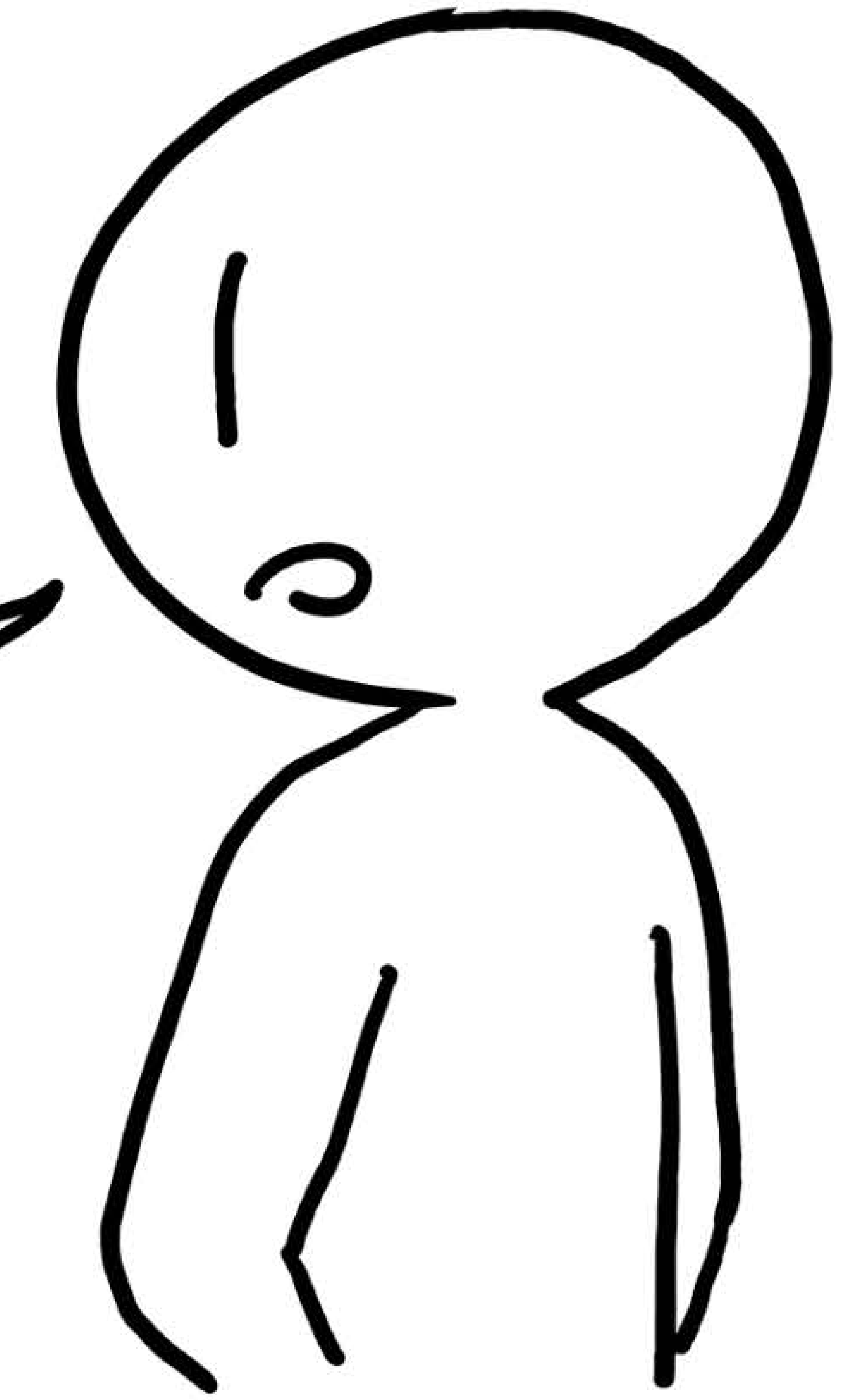
$f \in C_0^\infty$

$$\vec{\nabla}^2 (\underbrace{F * f}) = \delta(0) * f = f$$



$\in C^\infty$

여전히 초함수로서의 등식이긴 한데, 여기서 F*f가 사실 매끄러운 함수가 됐거든요.



그 이유는 다음과 같은데요,

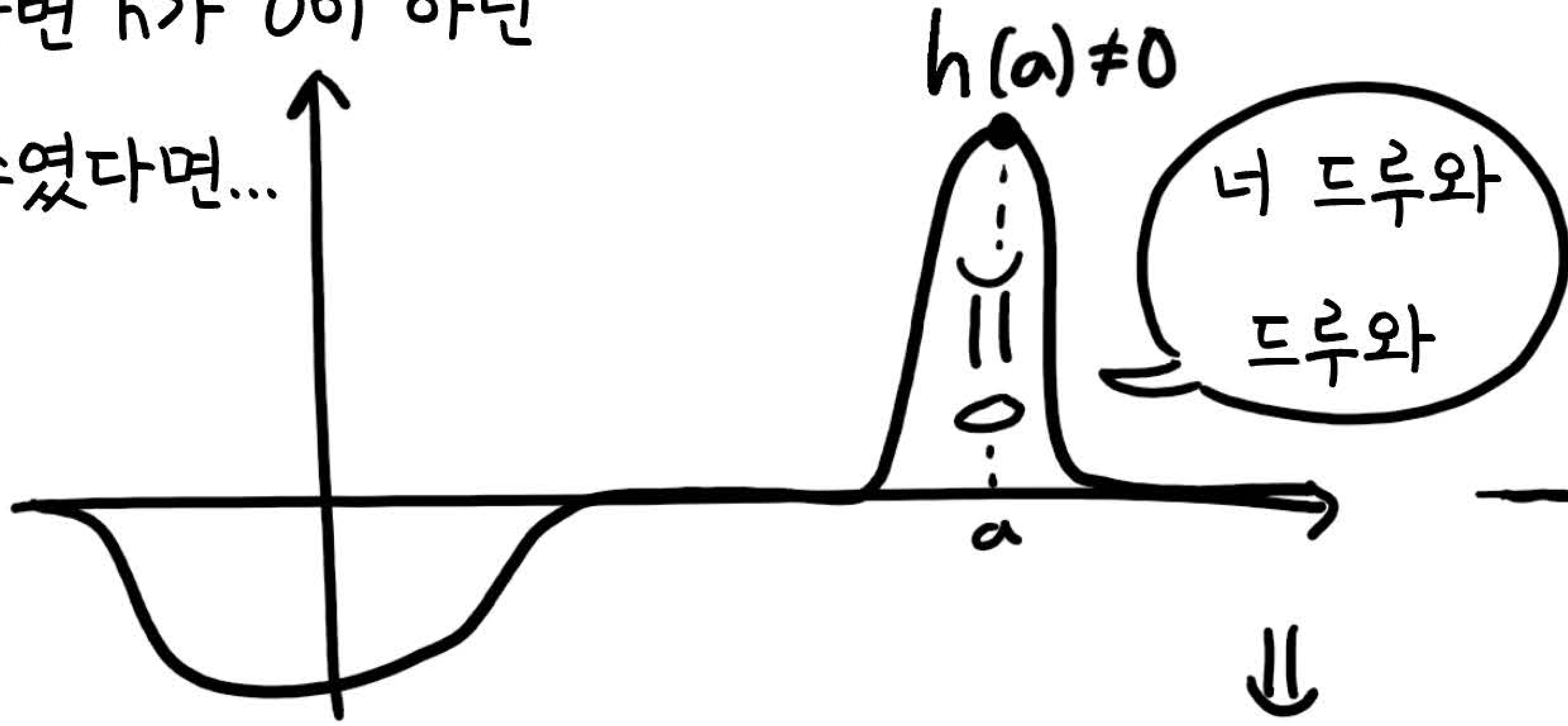
야! 초함수 계급장 떼고 함수로서 겨뤄 보자!

초함수로서

$$\underbrace{\vec{\nabla}(F*f)-f}_{h}=0$$

?? 그래 어디... 어차피 똑같을 텐데

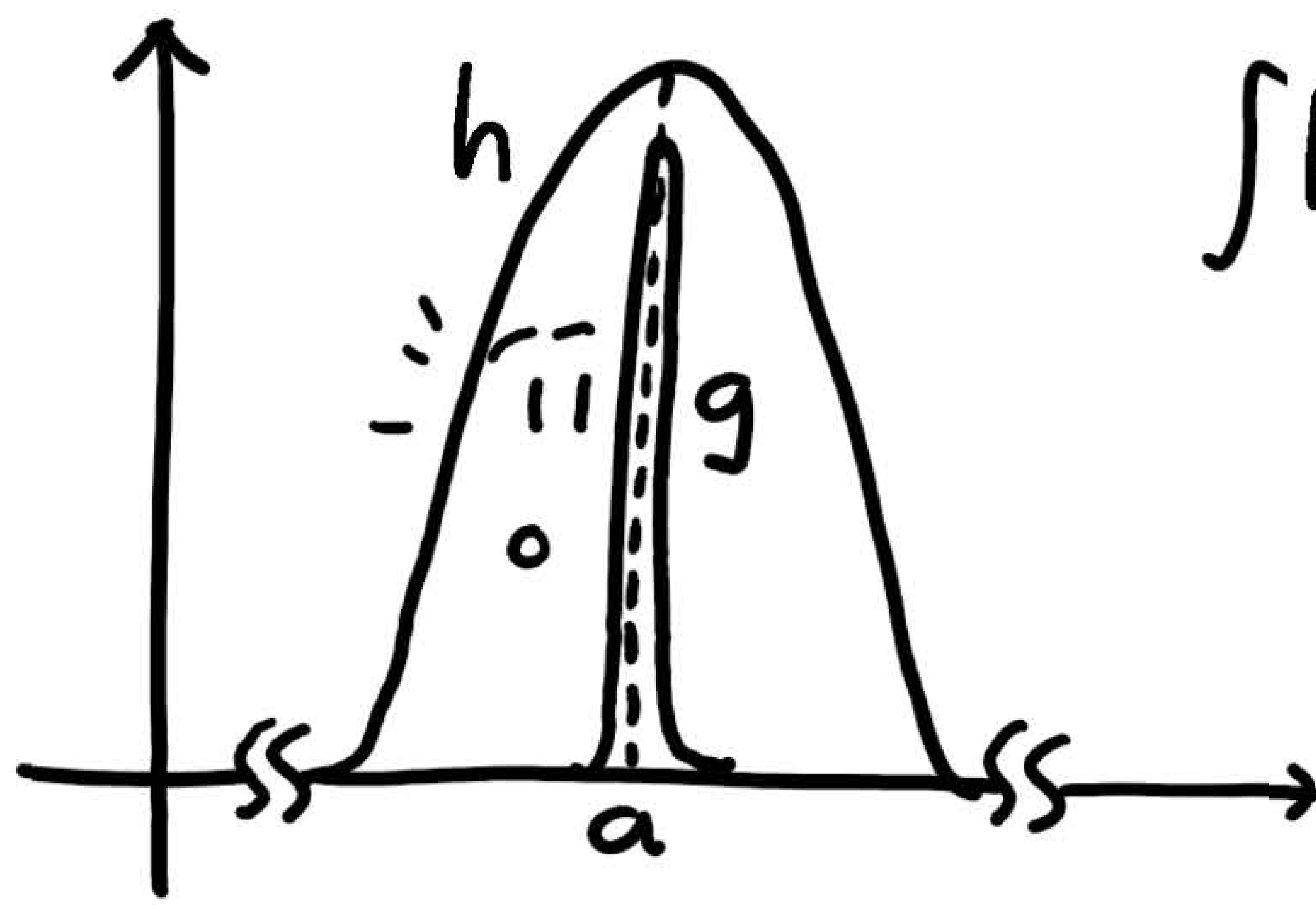
만약 좌변 h가 0이 아닌 연속함수였다면...



그 0이 아닌 지점 근처에 몰려 있는 테스트 함수를 집어넣어 주면,

$\Downarrow$

h가 a 근처에서 0이 아니었단 걸 잡아내 주죠. 즉 "함수의 함수" 관점에서도 0이 아니었단 거니 실격이네요.



$\int hg > 0$

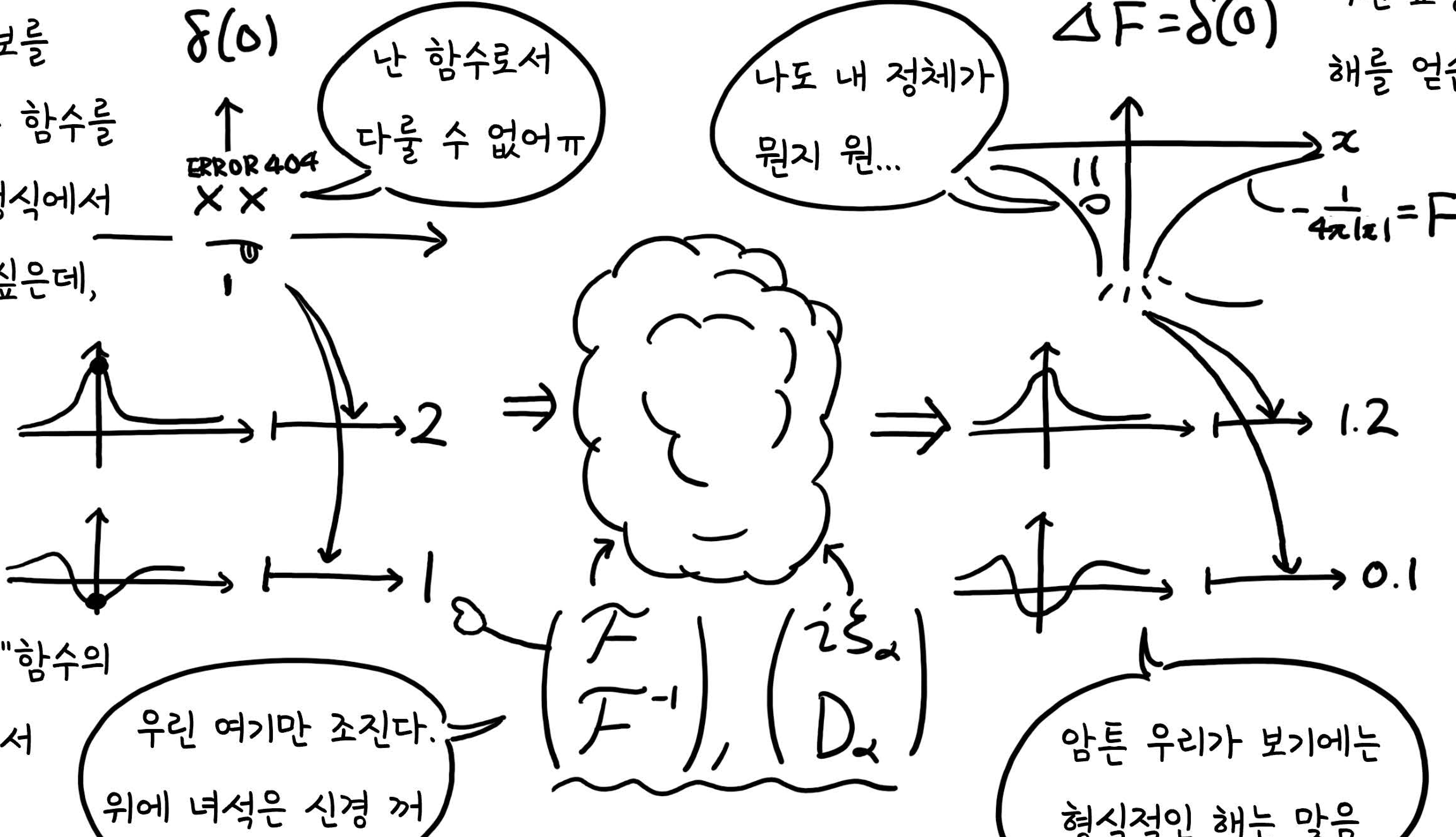
아니 내 값이 0이 아니라고?

그러니 그런 일이 없단 건, h는 함수로서도 0이었단 거죠.

$\therefore h \equiv 0.$

그러니까 이게 참 묘한 논리입니다. 다시 정리해 보면,

위치 정보를 읽어내는 함수를 미분방정식에서 다루고 싶은데,



이런 요상한 해를 얻습니다.

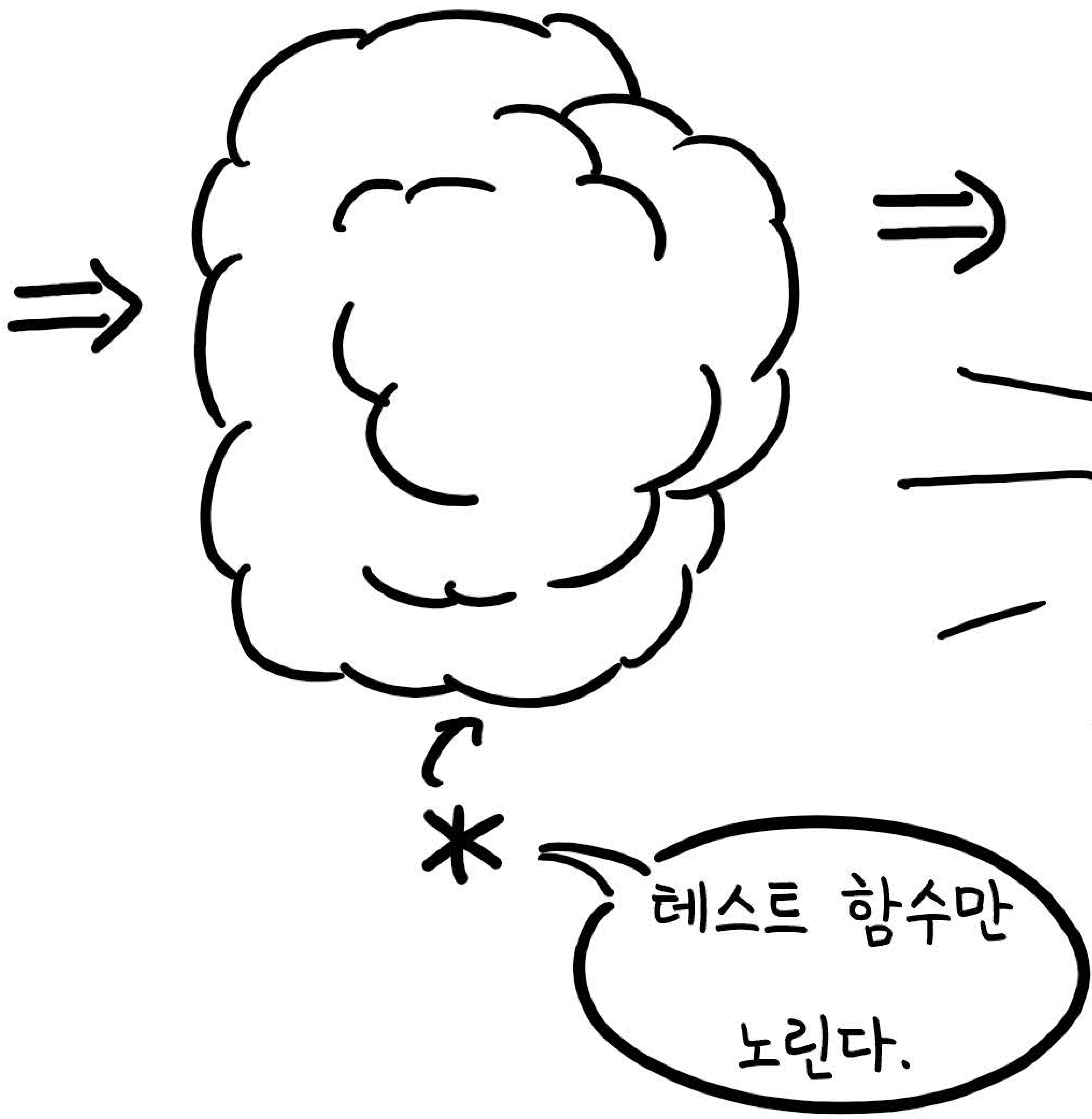
그러니 "함수의 함수"로서 다루고,

...이런 요상한 형식을 통해서,

그러고 나서 이제 위치 정보 f를 대입합니다.

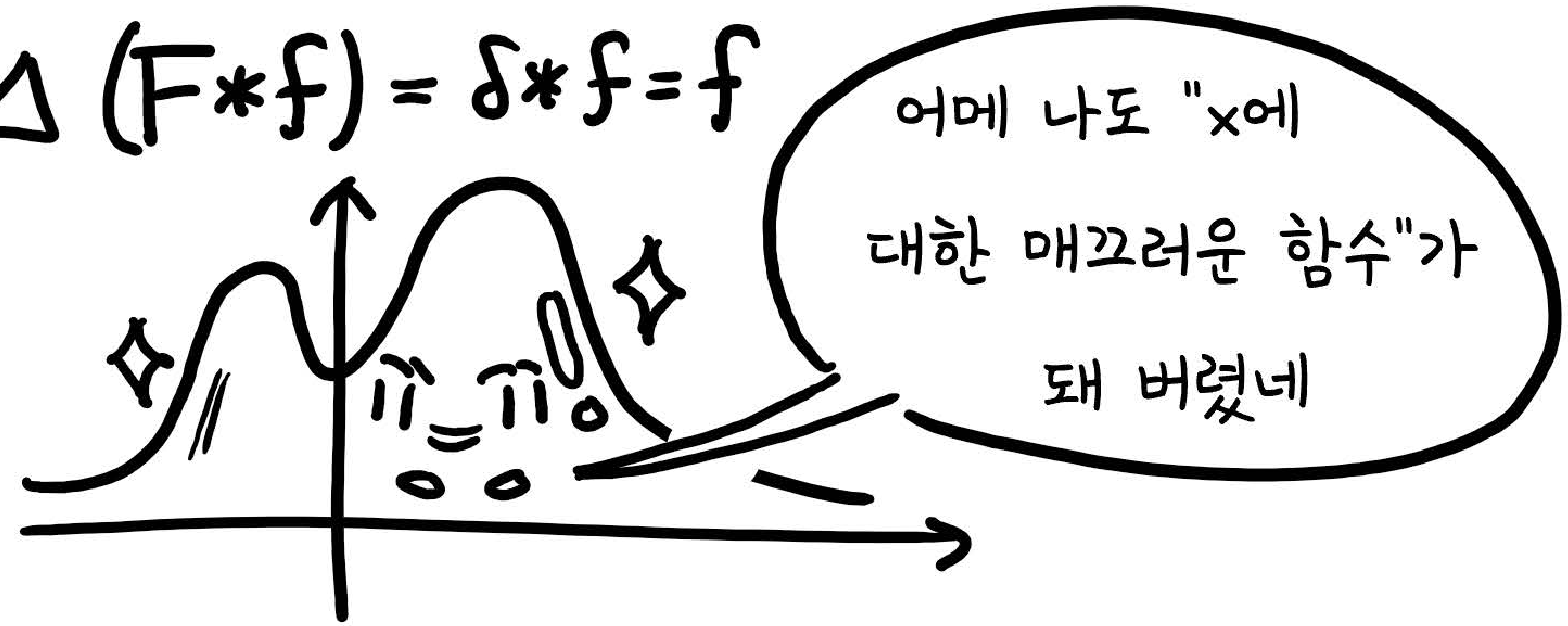
사실 이 과정도 초함수에 직접 하지 않고

테스트 함수들에 한다고 볼 수 있어요.

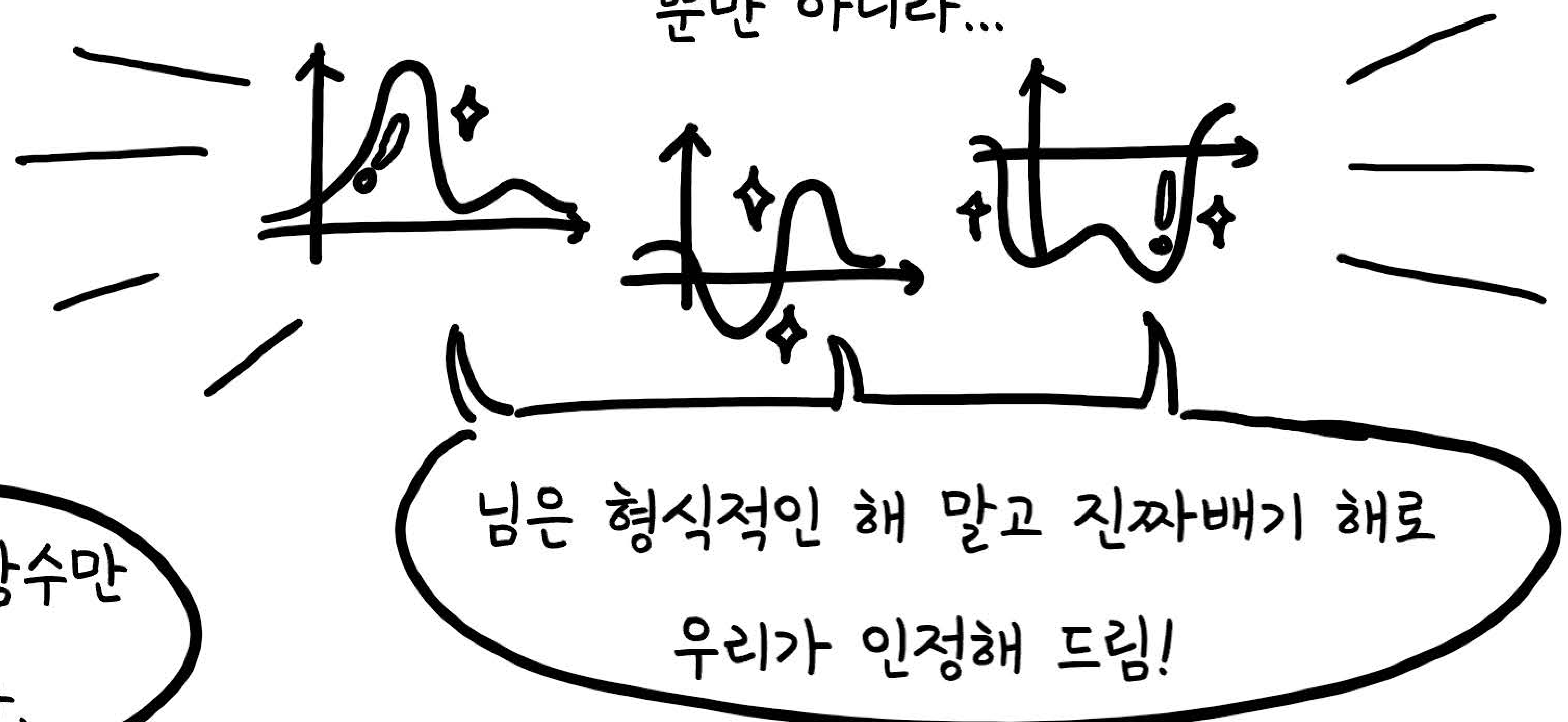


근데 만약 f가 충분히 좋은 함수였다면...

$$\Delta(F*f)=\delta*f=f$$



뿐만 아니라...



이렇게 테스트 함수들이 인증까지 해주는 상황이 된 거죠.

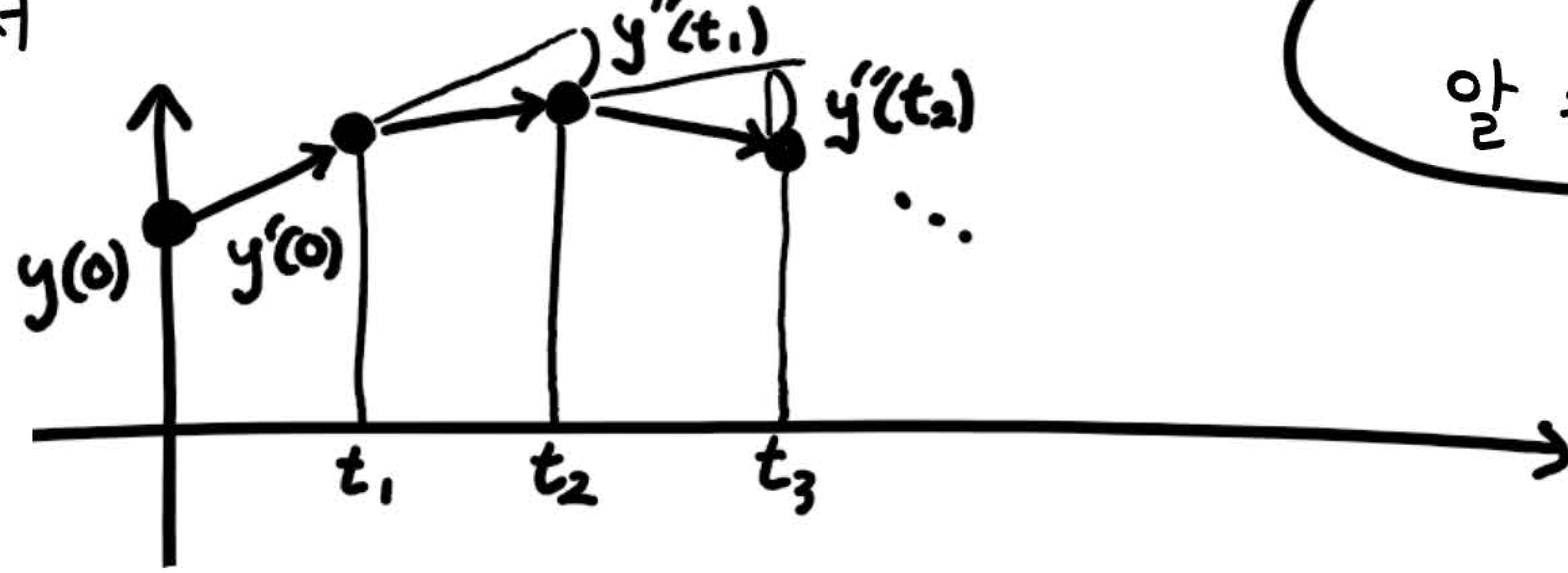
더 쉽게 나타내 보자면...

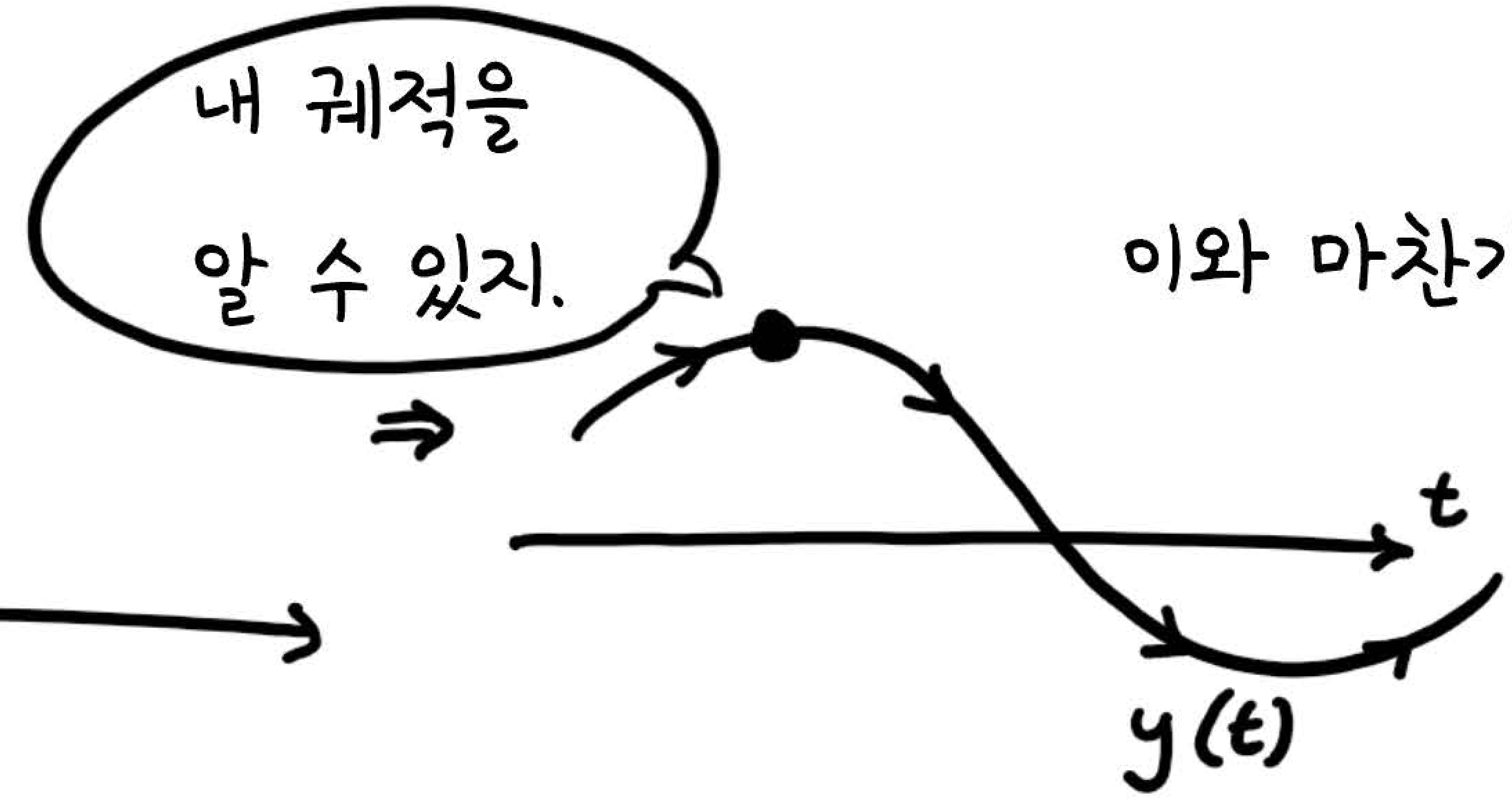

자, 이 녀석에 대한 미방 해를 좀 구해 오너라.
엑, 저걸 어떻게 한담!
엥 그게 짐이 요구한 해란 말이냐?
제조 방법이 수상한데?
헤헤 그렇습지요.
음, 그렇군.
일단 이 키트 써보자
뭐야 이상한데?
일단 해
잘 되고 있남?
물론이옵니다 충성
지시약으로 시험해 보죠.
F*f
F*f
여기서 지시약 역할을 하는 게 테스트 함수죠.

여기서 한 발짝만 더 나아가 봅시다. 지금 방법은 초기값 문제를 풀 때도 쓸 수 있는데요,

처음 시점에서 함숫값 및 미분 정보가 주어지고,

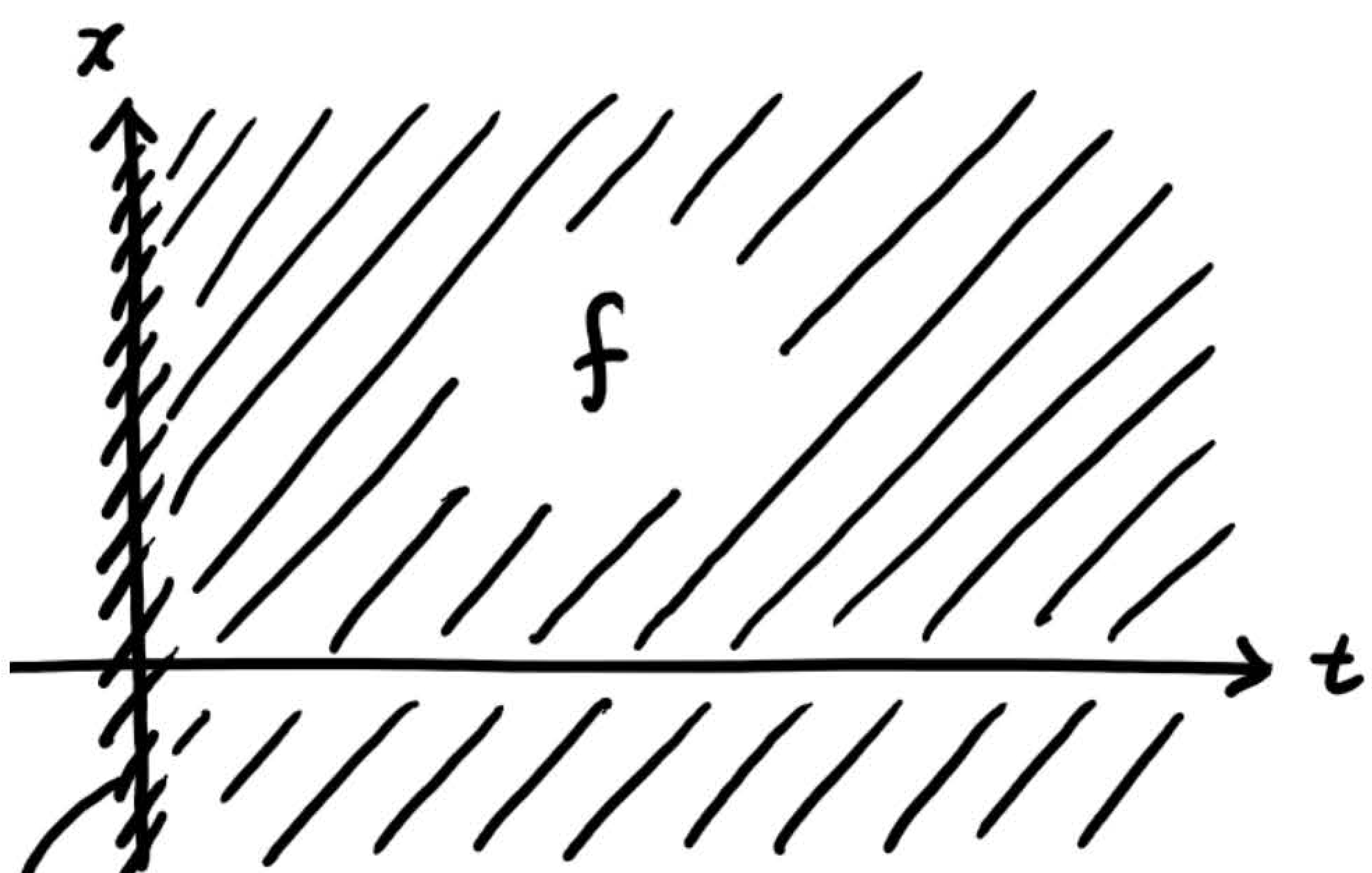
이계미분 정보도 있으면,





이와 마찬가지로,

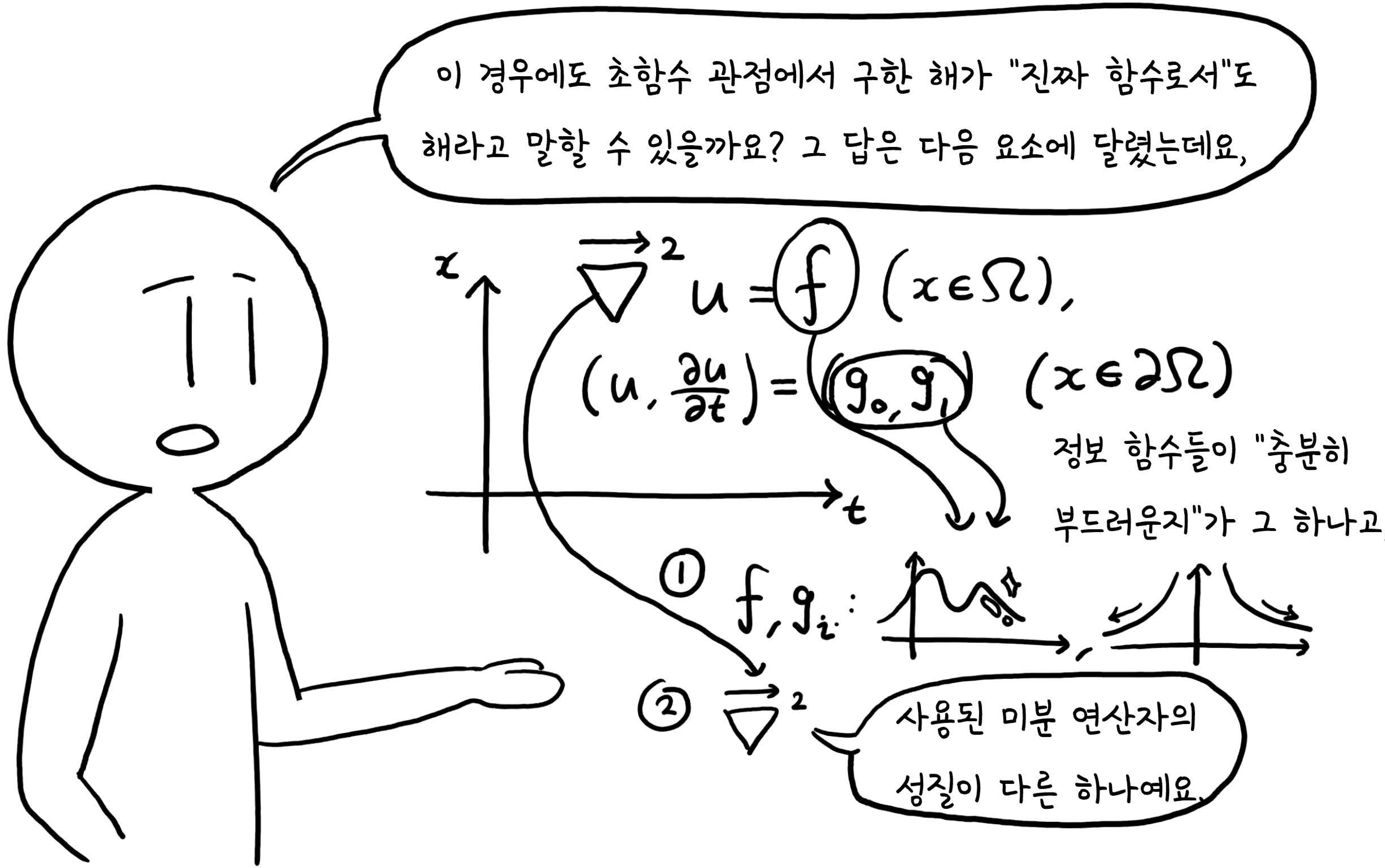
특정 영역에서의 이계미분 정보 및 경계값에서의 함숫값/미분 정보가 같이 주어지면,



$$(g_0, g_1) = (V, \partial_t V)$$

$$\Rightarrow \quad V = F * f 1_\Omega + \partial_t F * g_0 1_{\partial\Omega} + F * g_1 1_{\partial\Omega}$$

디랙 델타가 경계값 정보까지 읽어내서 해를 제공합니다.


이 경우에도 초함수 관점에서 구한 해가 "진짜 함수로서"도
해라고 말할 수 있을까요? 그 답은 다음 요소에 달렸는데요,
x
t
$\vec{\nabla}^2 u = f \quad (x \in \Omega),$
$\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = (g_0, g_1) \quad (x \in \partial\Omega)$
정보 함수들이 "충분히
부드러운지"가 그 하나고,
① f, g_i:
② $\vec{\nabla}^2$
사용된 미분 연산자의
성질이 다른 하나예요.

이 부분도 설명드리고 싶지만, 분량상 이쯤에서 해석학 얘기를 마무리하겠습니다.


여섯 화 동안의 해석학 얘기, 어떠셨나요? 재밌게 읽어 주셨다면 더 바랄 나위가 없겠네요.
이번 만화에서는 해석학의 큰 줄기 중 하나인 "푸리에 해석학"의 발전을 따라가면서, 거기에 엮인 세 가지 개념을 살펴보았어요.
(간단한) 적분 연산자 및 진동 적분,
f
D_N
르벡 측도 및 르벡 적분,
그리고 "함수의 함수"인 초함수였죠.
3.2∈R


개념과 같이 역사적인 흐름도 그려내고 싶었지만, 분량상 단편적인 얘기밖에 드릴 수가 없었네요 ㅠㅠ 실제 역사는 이보다 훨씬 복잡했습니다!
우리도 한몫 했는데, 우리 얘기는 언제 해줄꺼야??
ㅠㅠ 다음 작품 그릴 때는 균형을 더 잡아 볼께요...


그럼 저는 여기서 이만 인사드리고, 다른 작품에서 다시 찾아 뵙겠습니다.
다들 안녕히 계세요!!
— 해석학하는 만화 끝.

<참고문헌>

Primary Source

- P. A. M. Dirac, The physical interpretation of the quantum dynamics, 1927. Proc. Roy. Soc. A, Vol 113, Issue 765, 621-641
- P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (3rd ed). 1947, Oxford University Press.
- L. Schwartz, Théorie des distributions, Vol I. 1950, Paris / Vol II. 1951, Paris.
- O. Heaviside, On operations in physical mathematics, 1893. Proc. Roy. Soc. London (52), 504-529.
- J. Hadamard, Sur les operations fonctionnelles. 1903, C. R. Heb. Seances Acad. Sci. (136). 351-354.
- J. Hadamard, Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy. 1908, Acta Math. (31), 333-380.
- S. Soboleff, Sur un théorème d’analyse fonctionnelle, Rec. Math. [Math. Sbornik] N. S., 1938, Vol. 4 (46), 471-497.

Secondary Source

- Wheeden, R. L. Zygmund, Measure and Integral : An Introduction to Real Analysis (1st ed). 1977, CRC Press.
- G. B. Folland, Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications (2nd ed). 1999, Wiley.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis (Princeton Lectures in Analysis Vol 4). 2003, Princeton University Press.
- W. Rudin, Functional Analysis. 1991, McGraw-Hill.
- K. Yosida, Functional Analysis (2nd ed). 1968, Springer-Verlag/Kinokuniya.
- J. Lützen, The Prehistory of the Theory of Distributions. 1982, Springer-Verlag.