퍼즐

[11월의 퍼즐 해설] 11을 피하려면

2019년 12월 2일

박부성

11월의 퍼즐에 참여해주신 모든 분들께 감사드립니다.

11월의 퍼즐 정답자는 **김일희, 정수현**님 두 분입니다.

(정답과 해설을 함께 제출 해주신 분이 김일희님 한 명 뿐이었으나, 김일희님께서는 기존에 정답자로 선정되셨기 때문에 이외 가장 먼저 정답을 제출해주신 정수현님을 함께 선정하였습니다.)

11월의 퍼즐 문제 보러가기

이 아기자기한 문제는 1999년 루마니아 수학 올림피아드 팀 선발 문제였다.

1부터 차례대로 자연수를 나열해 보면, 9까지는 각 자리 숫자의 합이 증가하다가, 다음 수인 10에서는 합이 1로 줄고, 다시 11부터 19까지는 증가하다가, 다음 수인 20에서 감소한다. 그리고 28까지는 11의 배수 없이 이어지다가 29에서 $2+9=11$이 되어, 1부터 시작하면 28까지 28개의 수를 나열할 수 있다.

29를 건너뛰고 30부터 나열한다고 생각해 보면, 38에서 $3+8=11$이 되고, 39부터 시작하여도 47에서 $4+7=11$이 되어 연속된 수 10개도 나열할 수가 없다.

또 수가 1씩 커지는 상황을 보면, 각 자리 숫자의 합이 1씩 증가하다가 일의 자리가 9인 수 다음에 받아올림이 하나 생기면서 합이 증가하는 양상이 바뀐다.

이상의 관찰을 토대로 생각해 보면, 28개보다 더 많은 수를 나열하려면 9를 이용하여 받아올림이 일어나는 현상을 이용하여야 하고, 28보다 큰 수를 생각하는 대신 1보다 작은 쪽으로 수를 늘려가야 함을 알 수 있다. 즉, $1, 2, 3, \ldots$ 대신에 $10\cdots01, 10\cdots02, 10\cdots03, \ldots$으로 생각하고, 앞에 작은 수를 나열하여

$$9\cdots99, 10\cdots00, 10\cdots01, 10\cdots02, 10\cdots03, \ldots$$

으로 생각하는 식이다.

이렇게 하면 커지는 쪽으로는 $10\cdots18$까지 만들 수 있고, 작아지는 쪽으로는 9가 11개여서 각 자리 숫자의 합이 11의 배수가 되는 경우를 제외하면 $9\cdots99$ 앞에 $9\cdots98$, 그 앞에 $9\cdots97$ 등을 만들 수 있다.

만약 9가 하나뿐인 $97, 98, 99, 100, \ldots, 118$인 경우라면, $9+2=11$이므로 이 수열 앞에는 $93, 94, 95, 96$이 올 수 있다.

만약 9가 두 개인 $997, 998, 999, 1000, \ldots, 1018$인 경우라면, $9+9+3=22$이므로 이 수열 앞에는 $994, 995, 996$이 올 수 있다.

이런 식으로 생각하면, 9가 다섯 개일 때,

$$999990, 999991, \ldots, 999998, 999999, 1000000, \ldots, 1000018$$

이 가능하고 이 앞에도 999989, 999988 등이 올 수 있다. 이때 $9+9+9+9+8+0=44$이므로, 가능한 최대 길이는

$$999981, 999982, \ldots, 999990, 999991, \ldots, 999999, 1000000, \ldots, 1000019$$

으로 38개가 가능하다.

만약 9가 여섯 개라면, $9+9+9+9+9+9+1=55$이므로

$$9999992, 9999993, \ldots, 999999, 1000000, \ldots, 1000018$$

이 가능하지만 38개를 넘지는 못한다. 9가 일곱 개, 여덟 개, 아홉 개, 열 개인 경우도 마찬가지이다.

$10 \cdots 01$ 꼴이 아닌 경우, 예를 들어 $20 \cdots 01, 20 \cdots 02, \ldots$를 생각해 보면 큰 쪽으로는 $20 \cdots 08$까지 가능하고 작은 쪽으로 아무리 늘려도 38개를 넘을 수는 없다.

이상의 관찰로부터, 나열할 수 있는 연속한 자연수는 최대 38임을 알 수 있다.

다음은 11월의 정답자로 선정된 **김일희**님의 해설입니다.

십의 자리 이상이 동일하고 일의 자리가 0부터 9까지 연속한 10개의 수의 각 자릿수합을 11로 나눈 나머지를 보면, 0~9, 1~10, 2~0, 3~1, 4~2 … , 10~8 총 11가지 경우가 존재한다. 그 중에 0을 포함하지 않는 (11을 피하는) 경우는 1~10이 유일하고, 다른 경우들은 0이 하나씩 꼭 존재한다.

백의 자리 이상이 동일한 연속한 100개의 수의 각 자릿수합을 11로 나눈 나머지를 보면, 0~9, 1~10, 2~0, 3~1, 4~2 … , 10~8 을 circular order 로 본 수열의 일부가 된다. 여기서 0을 포함하지 않는 가장 긴 sub-sequence의 길이는 0~9, 1~10, 2~0 부분에서 처음과 끝의 나머지 0을 제거한 수열로 길이가 9 + 10 + 9 = 28이다.

따라서 더 긴 길이의 수열을 찾으려면 백의 자리가 바뀌는 것을 포함하는 수열만 생각해보면 된다. 만약 백의 자리가 바뀌기 전에 0~9, 1~10 으로 끝나고, 백의자리가 바뀐 뒤에 1~10, 2~0 으로 시작해서 1~10 을 두 번 사용할 수 있다면, 처음과 끝의 0을 제거한 1~9, 1~10, 1~10, 2~10 으로 길이가 38인 수열을 만들 수 있다.

실제로 999981 부터 1000018까지 총 38개의 연속한 수가 그런 예가 된다. 일반적으로는 (11n+6) 자리에서 (11n+7) 자리로 넘어갈때 동일한 예를 발견할 수 있다.