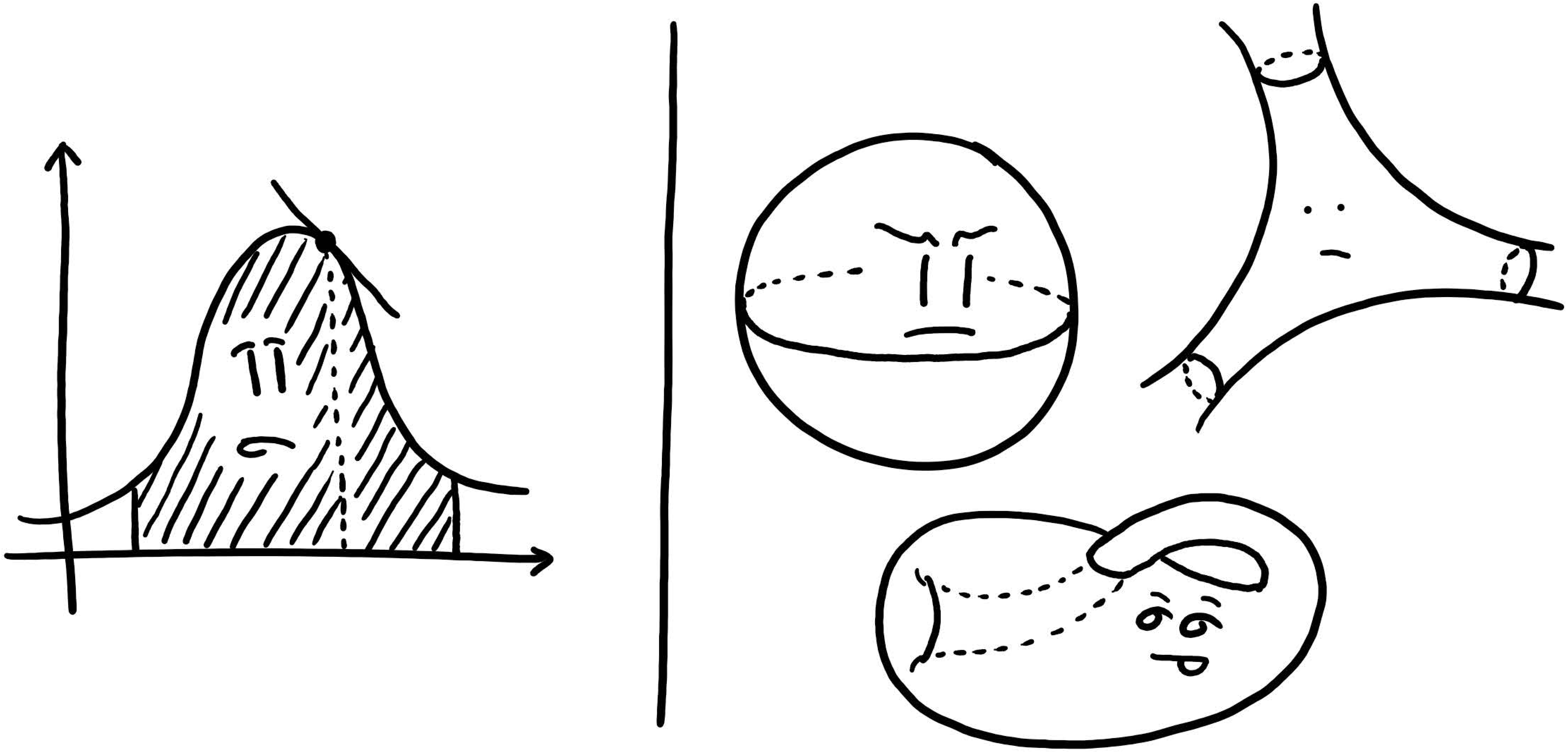

이것은 기하학인가 아니면 위상수학인가
제1화 : 무엇이 무엇이 똑같을까

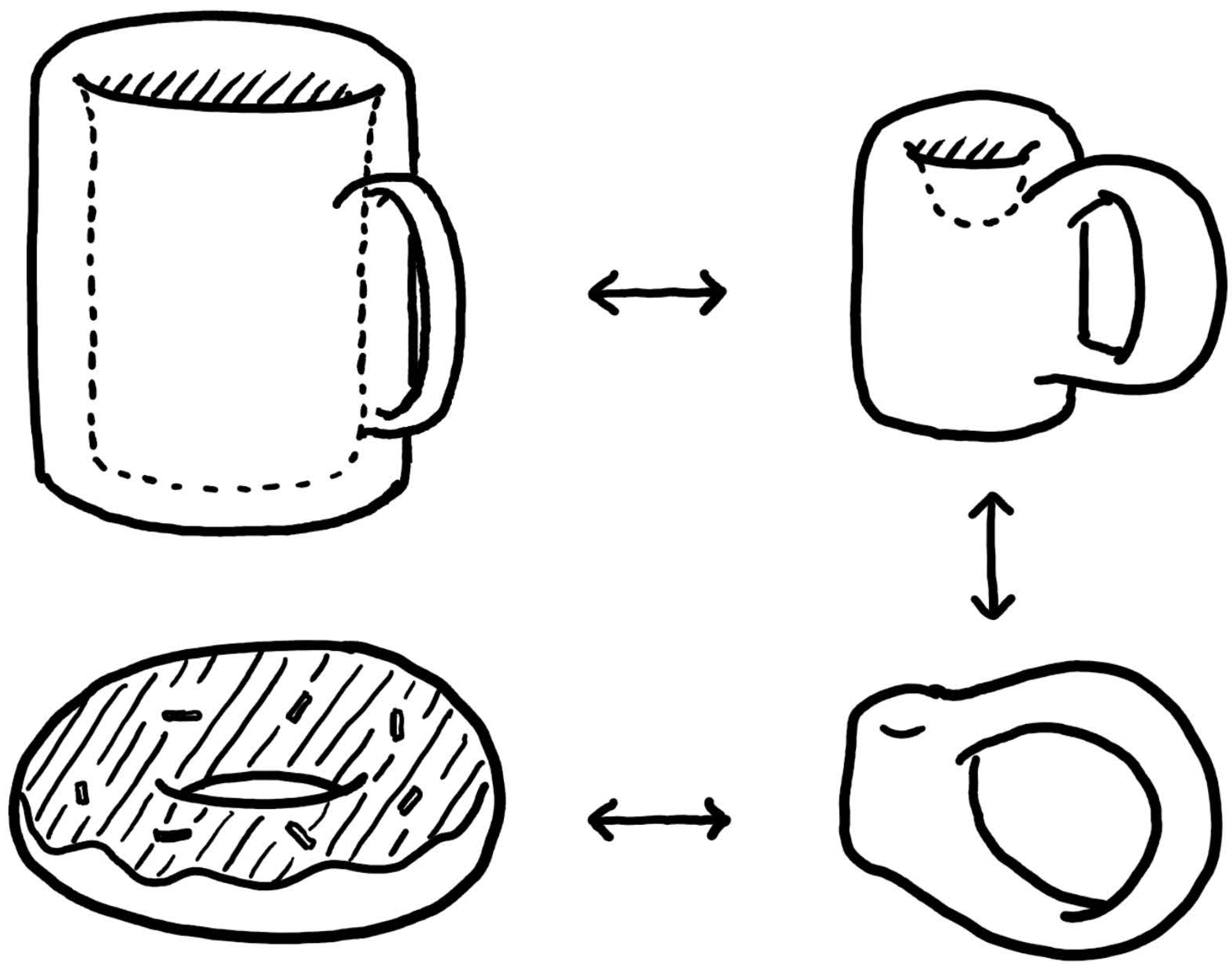

안녕하세요,
해석학하는 만화 작가입니다!
이번에는 새로운 시리즈로
다시 돌아왔습니다.

지난 시리즈에서는 함수의 미분/적분에 관한 해석학 얘기를 했는데요,



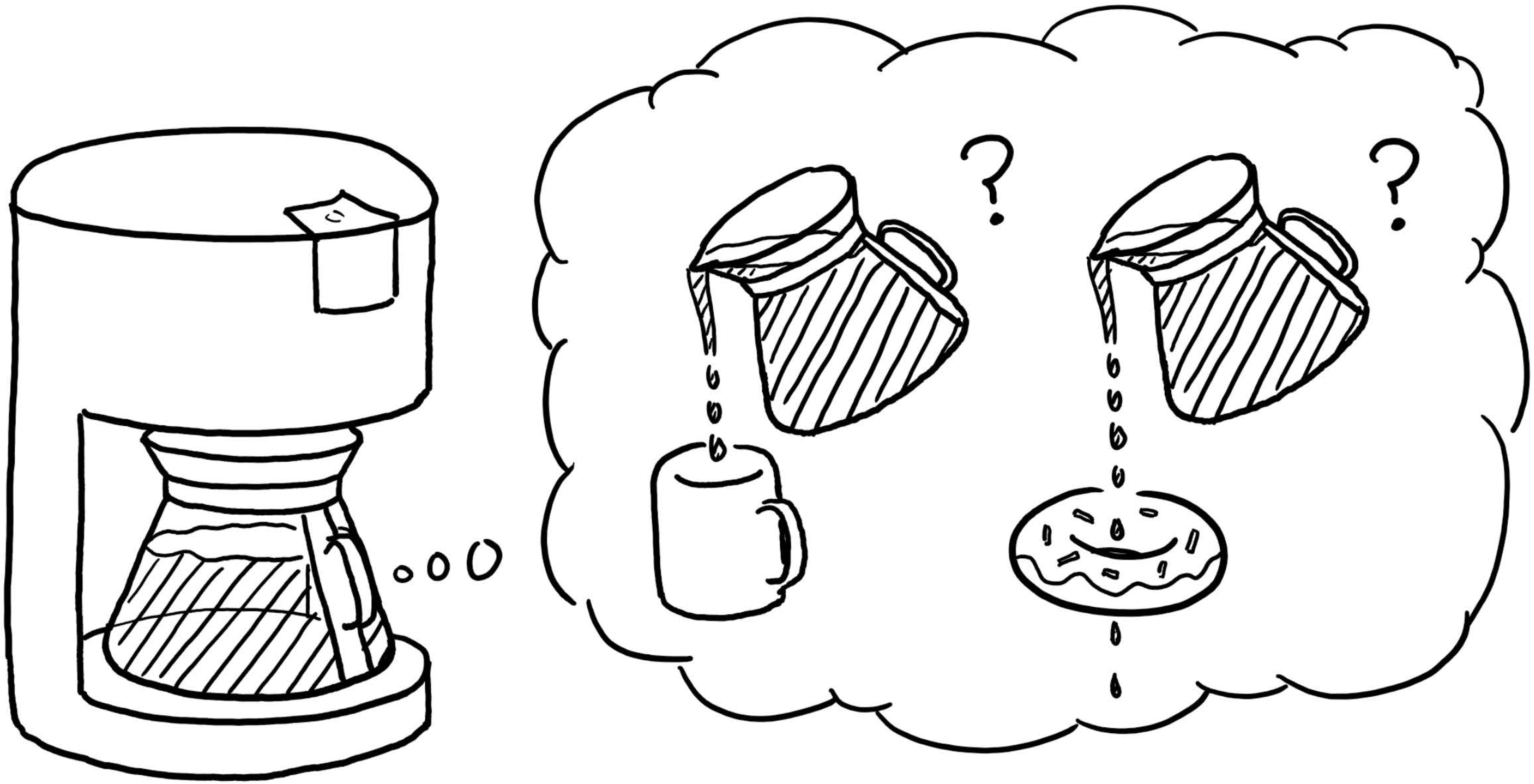
이번 시리즈의 주인공은 기하학적인 "물체"들입니다.

흔히들 "수학자들은 머그컵과 도넛을 같다고 생각한다"는 얘기를 하는데요,



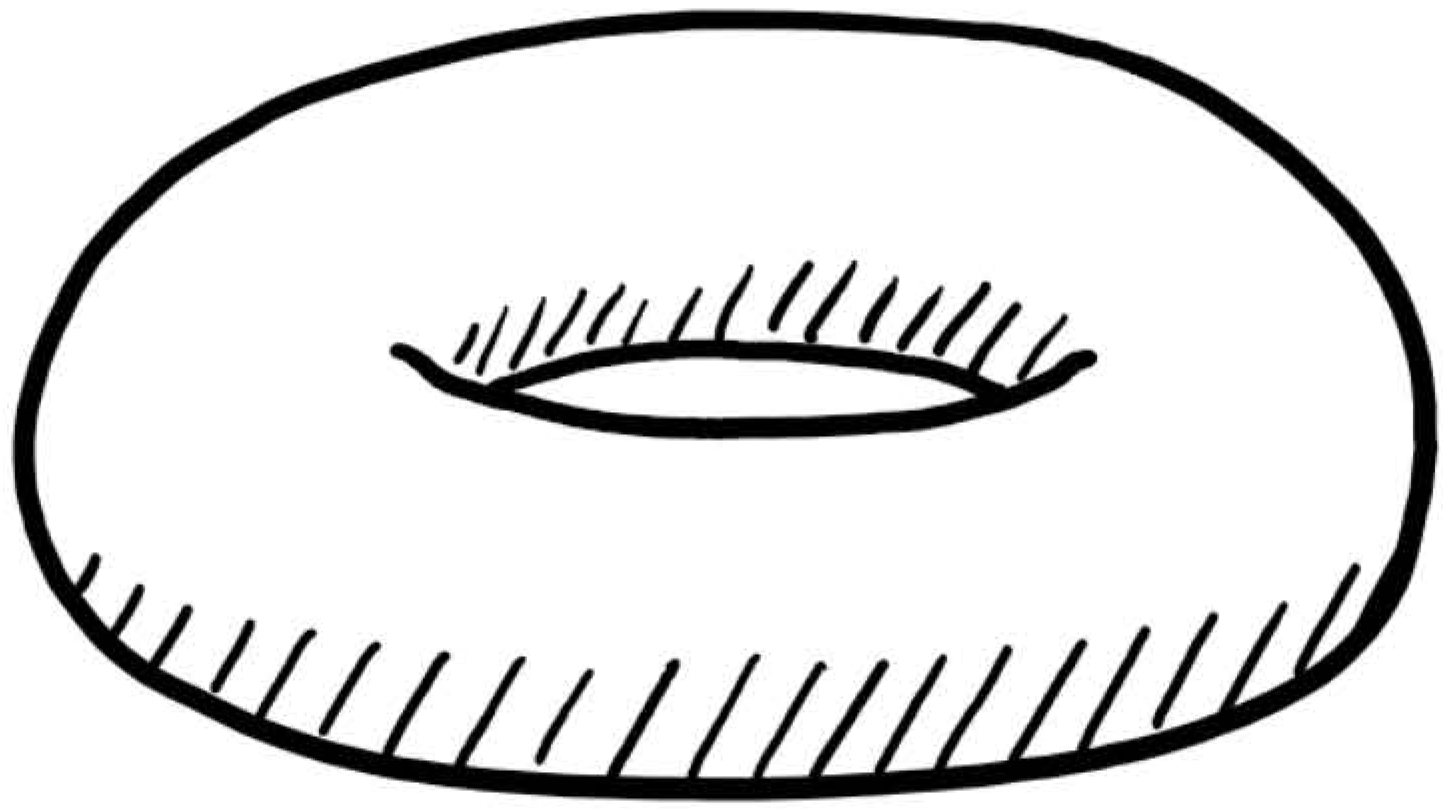
들으면 들을수록 수학자들은 밥 먹기 피곤할 것 같다는 생각이 들죠?

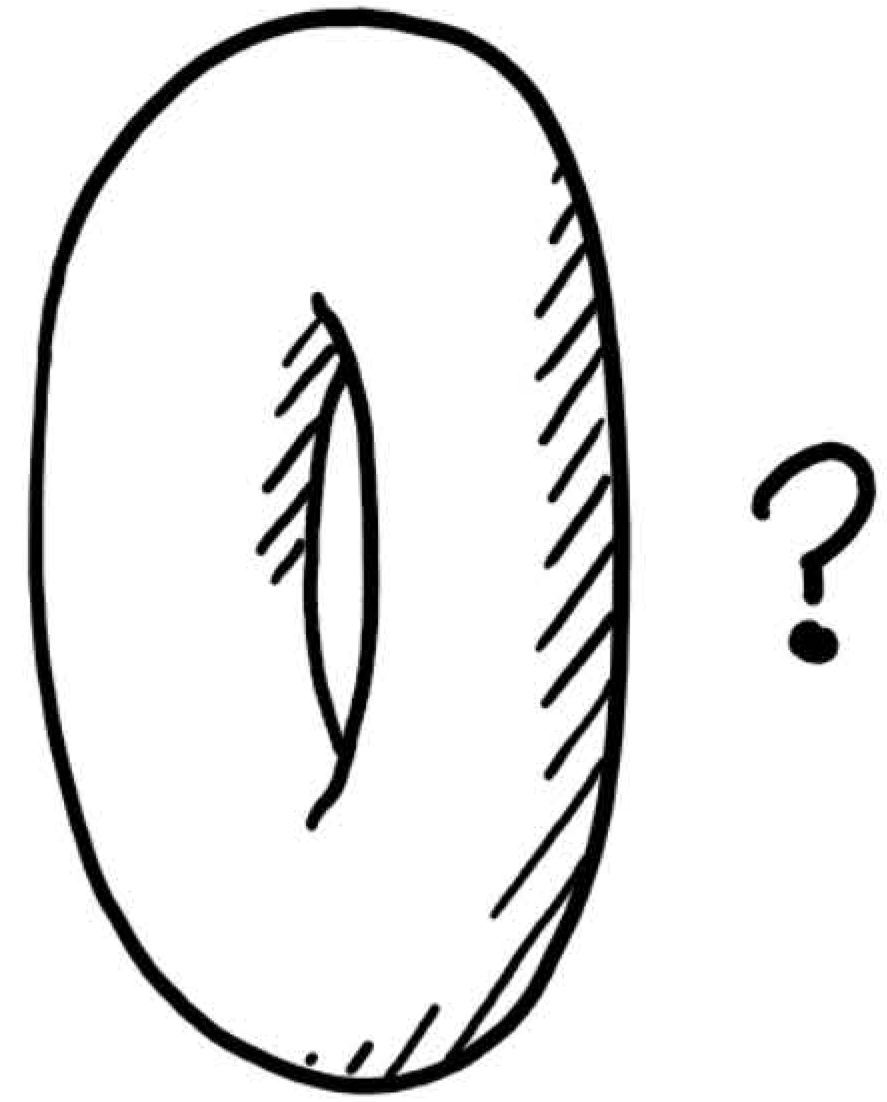
음, 수학자들도 적어도 커피 먹는 시간에는 둘을 구분하는 것 같습니다.

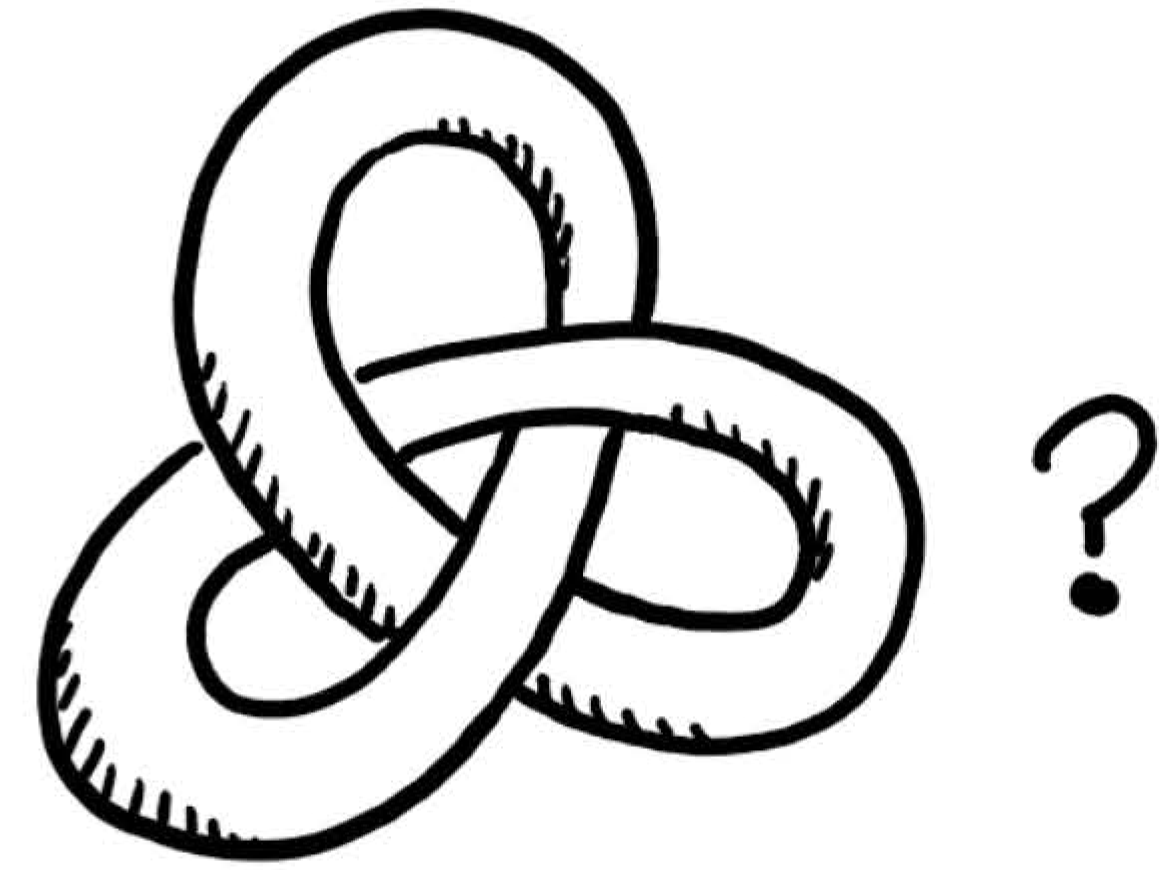


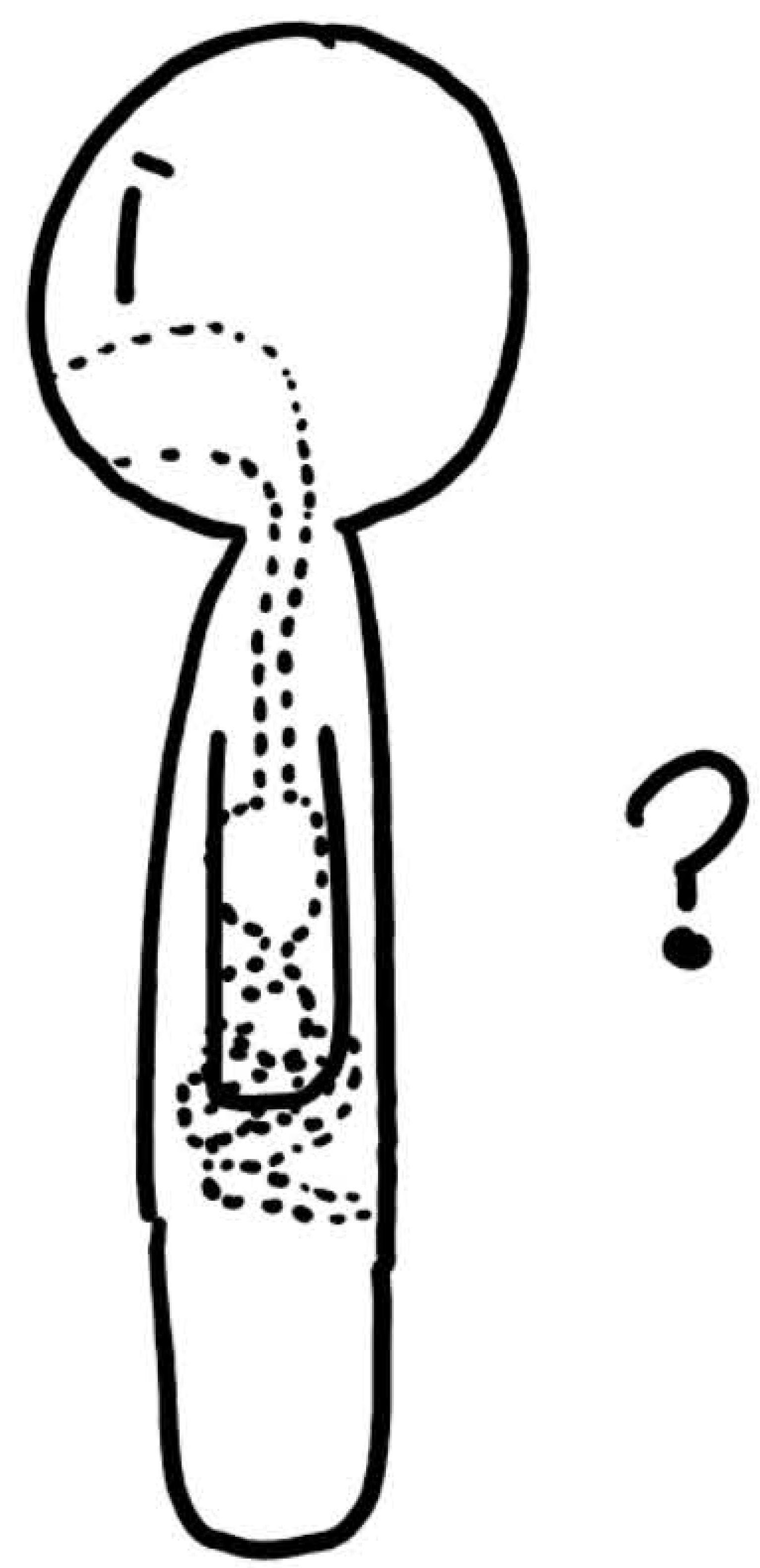
... 농담이고, 사실은 두 물체를 다르게 볼 때도 있고, 같게 볼 때도 있어요.

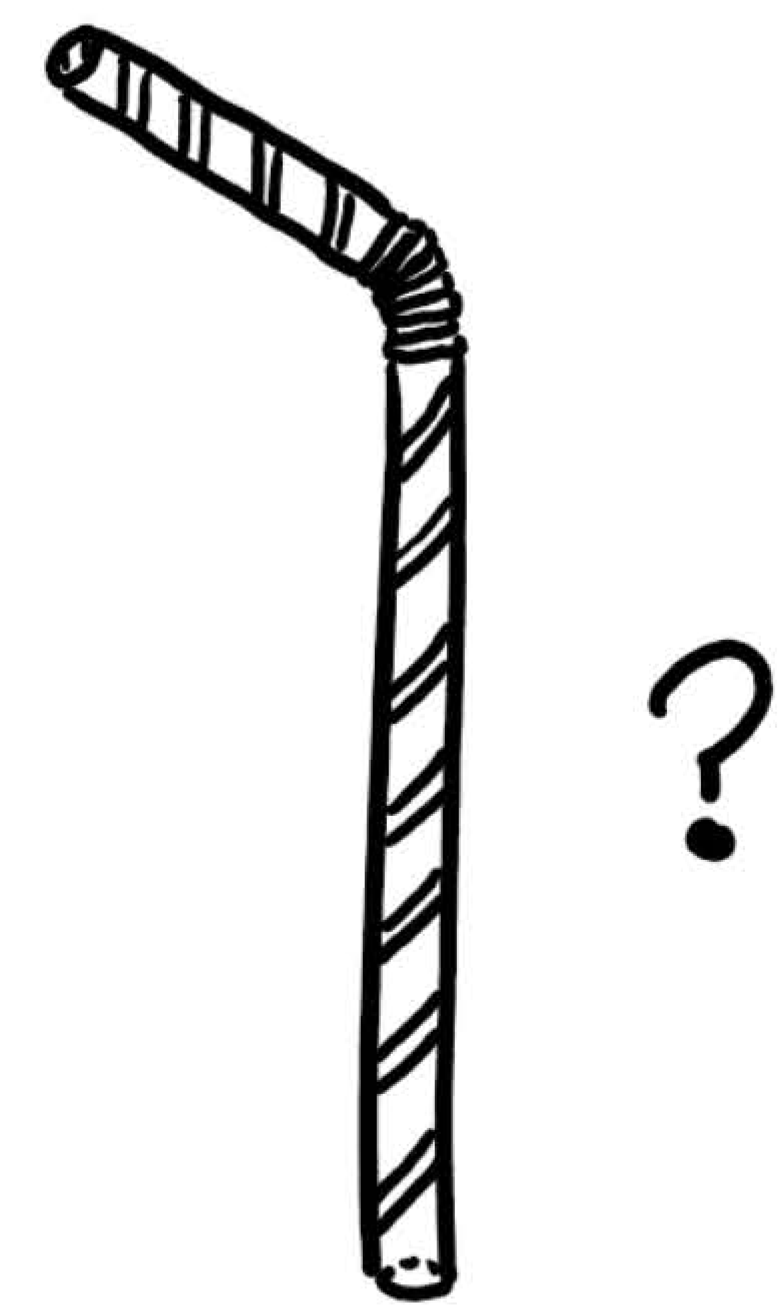
아니, 상황에 따라 어떤 물체들을 같게 보는지가 달라진다구요?







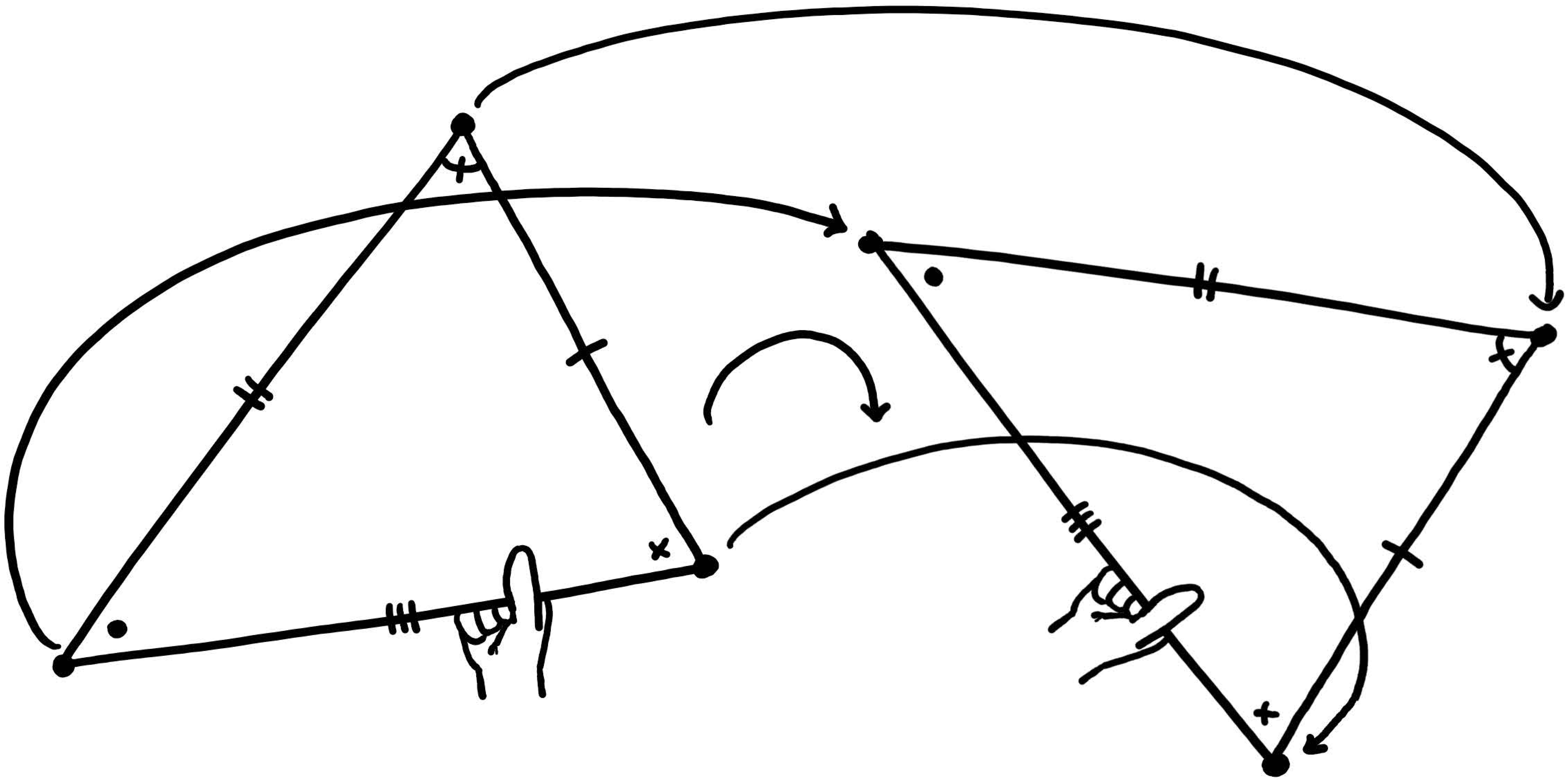




네, 몇 가지 관점이 있는데

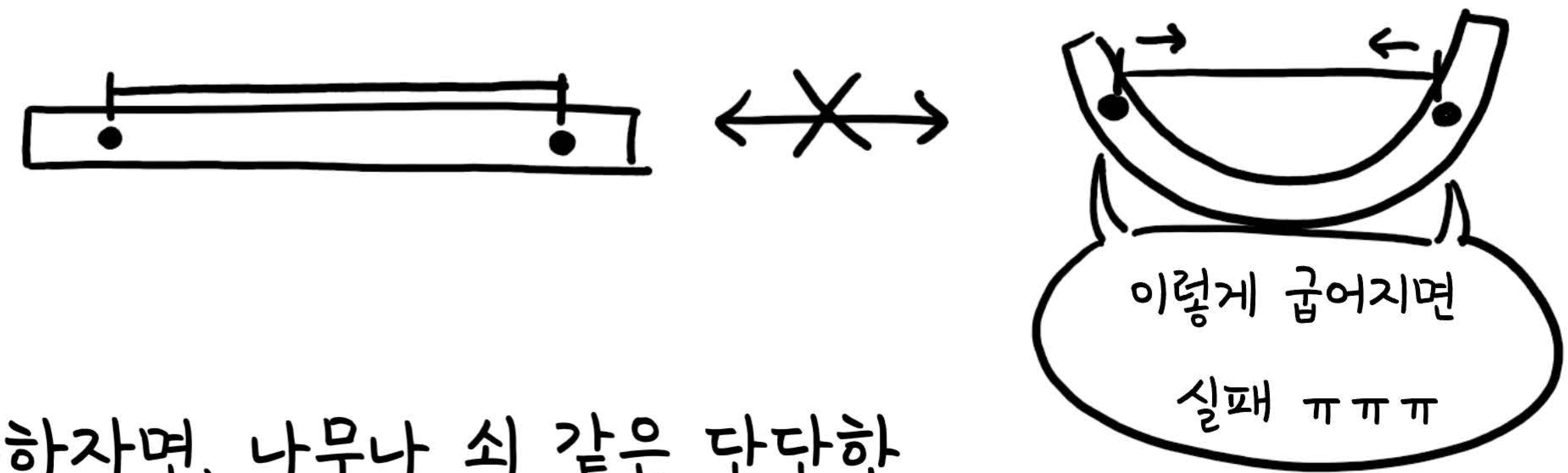
한번 살펴보겠습니다.

먼저 가장 쉽게 상상할 수 있는 "같음의 기준"은 바로 합동입니다.

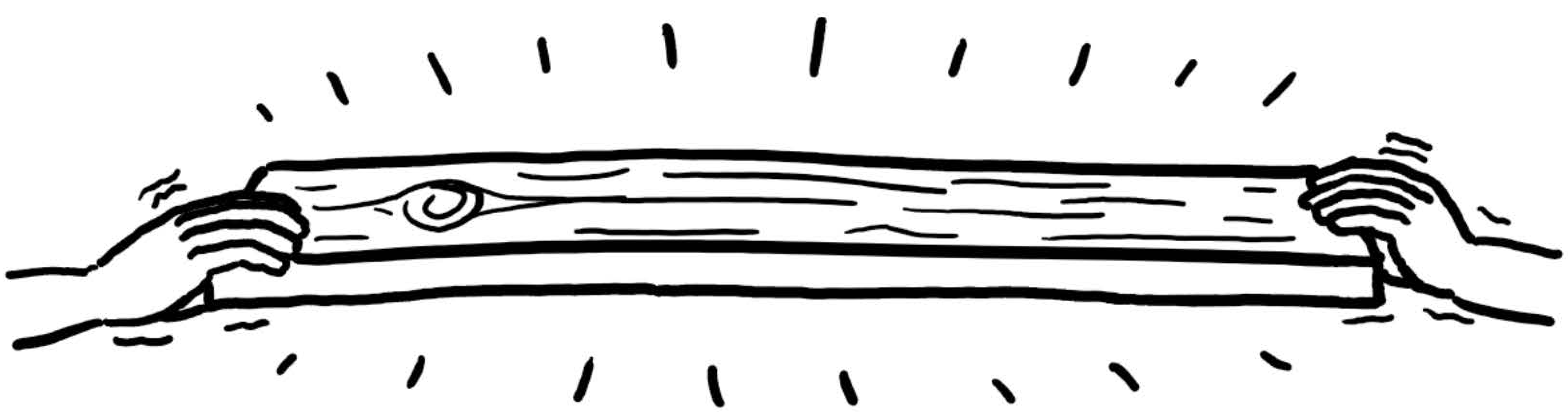


도형을 이루는 변의 길이, 각도 등이 일치할 때 두 도형이 합동이라고 하죠.

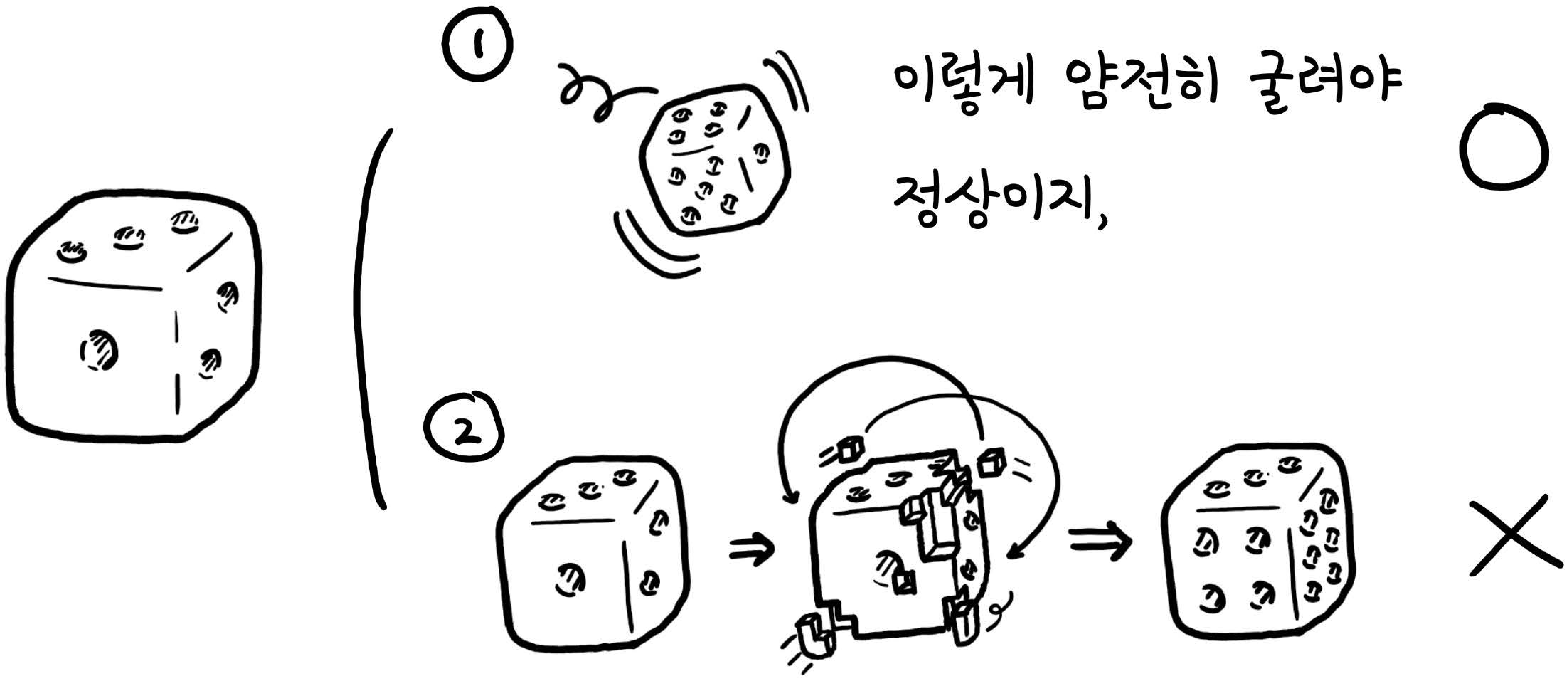
다각형 말고 일반적인 도형에서는, 변의 길이나 각도 대신 "도형의 각 점들 사이 거리"가 보존되는지 보면 됩니다.



비유하자면, 나무나 쇠 같은 단단한 "강체"를 다룬다고 상상할 수 있겠죠.

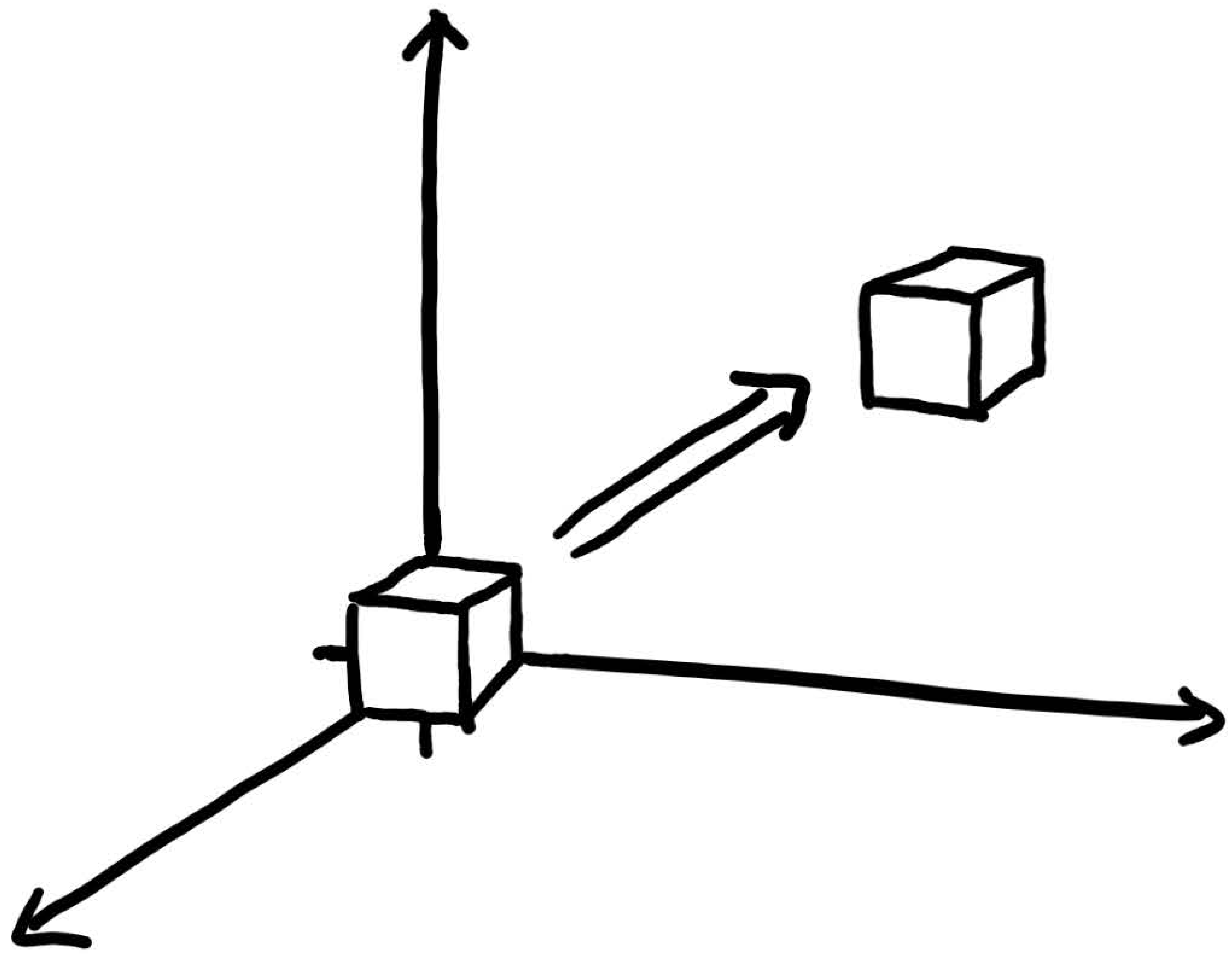


이런 강체를 이리저리 움직이는 걸 상상해 봅시다. 주사위를 예로 들면,

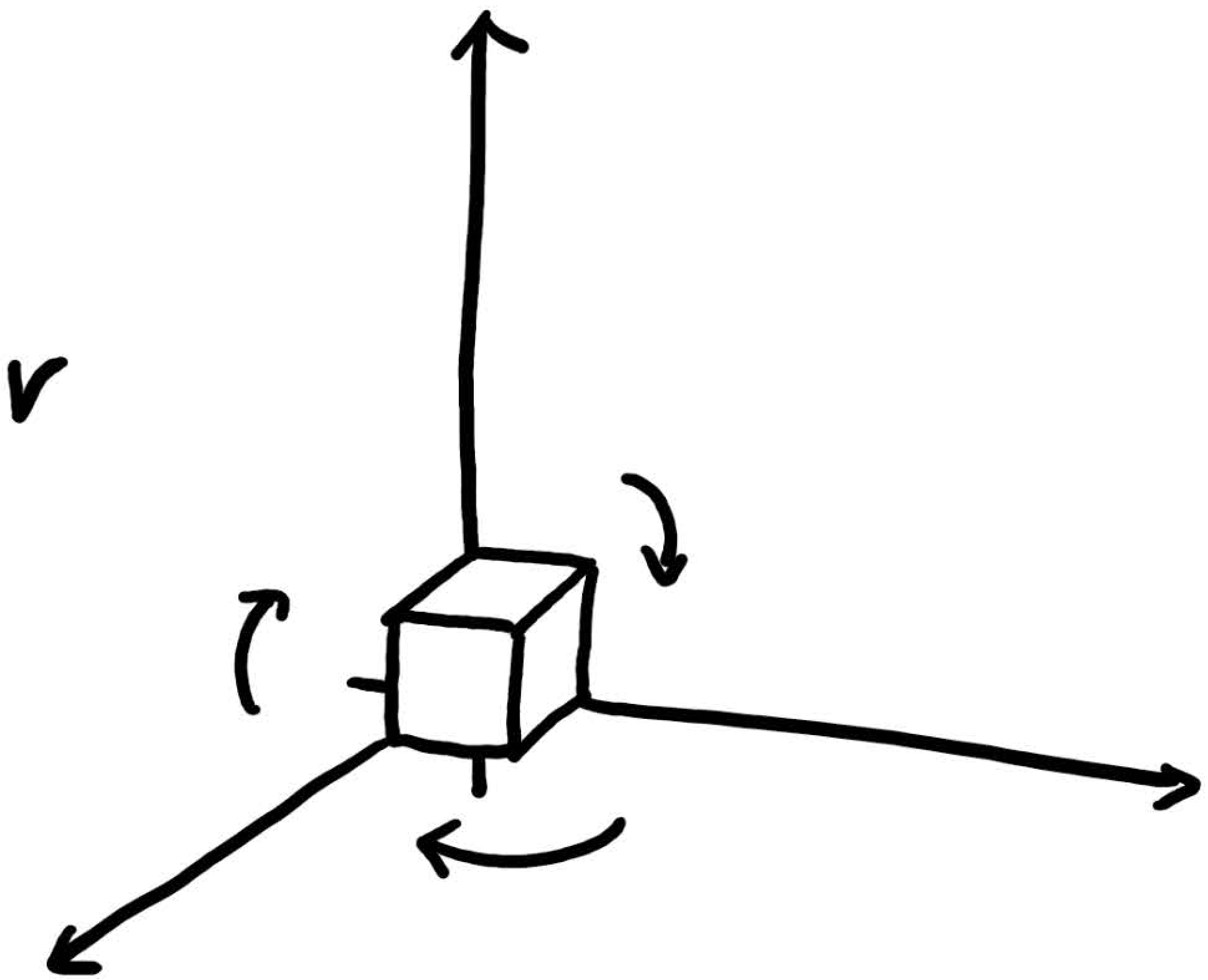


어... 이런 움직임은 (적어도 현실에서) 관찰하기 어렵겠죠.

첫번째와 같은 굴림은, 다음 두 카테고리에 속하는 변환의 합성으로 생각할 수 있습니다.



or

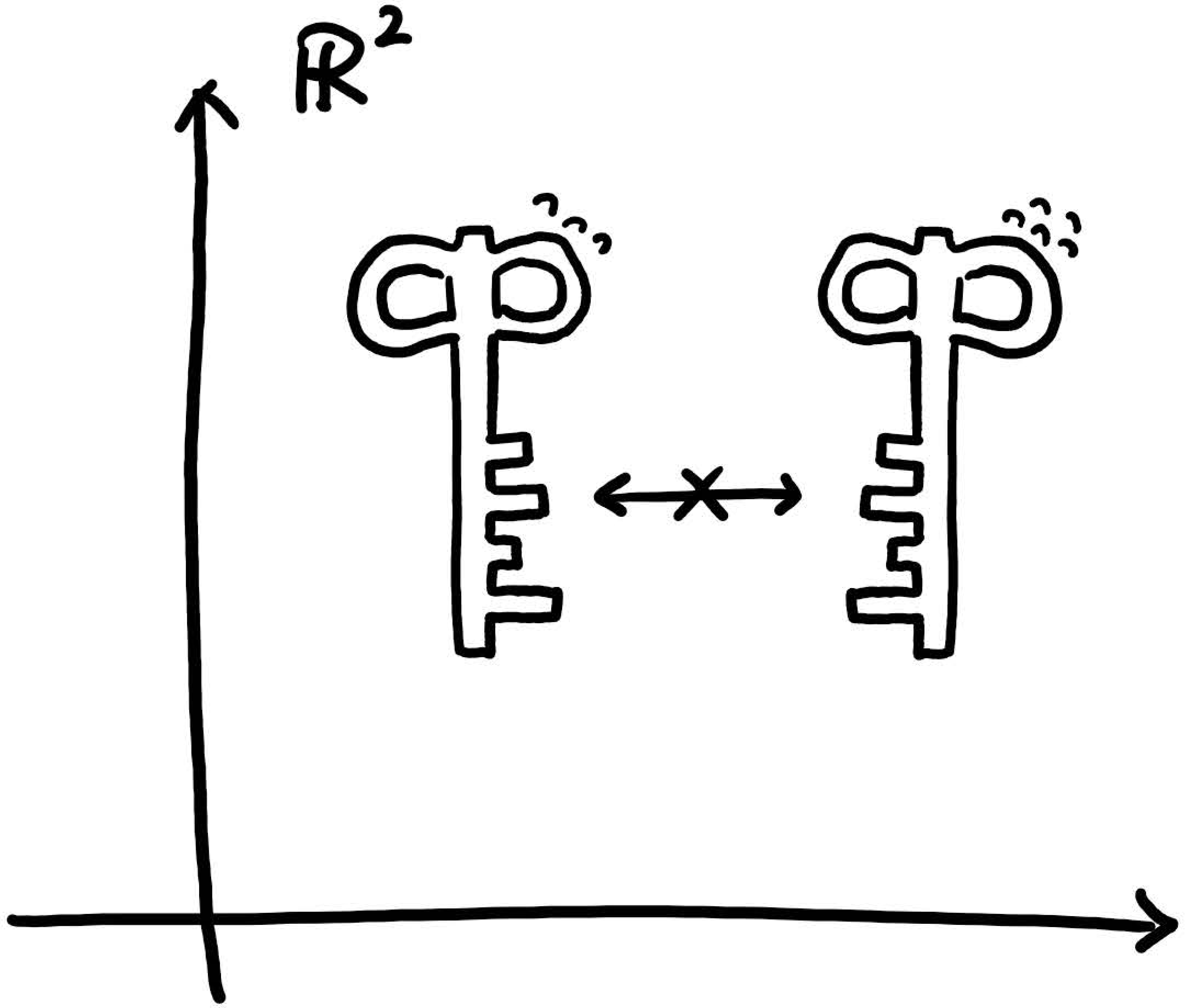


물체의 위치를 옮기는 평행이동과,

중심을 고정하고 빙글빙글 돌리는 회전변환이죠.

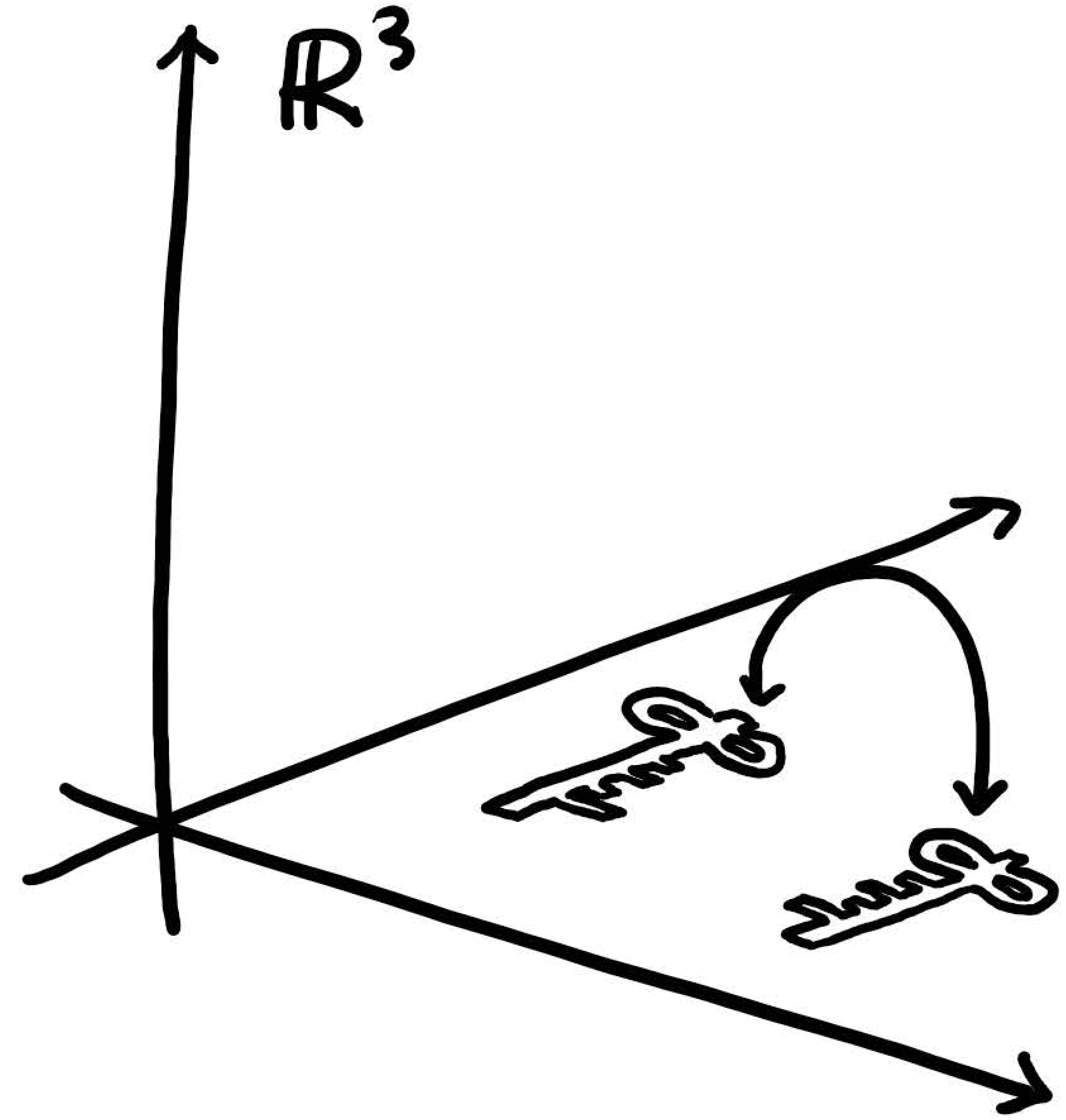
그런데 여기서의 변환이라는 것은 물체가 놓여 있는 "공간"에 의존합니다.

예를 들어, 똑같은 한 쌍의 물체라고 해도...



2차원 공간 안에서는

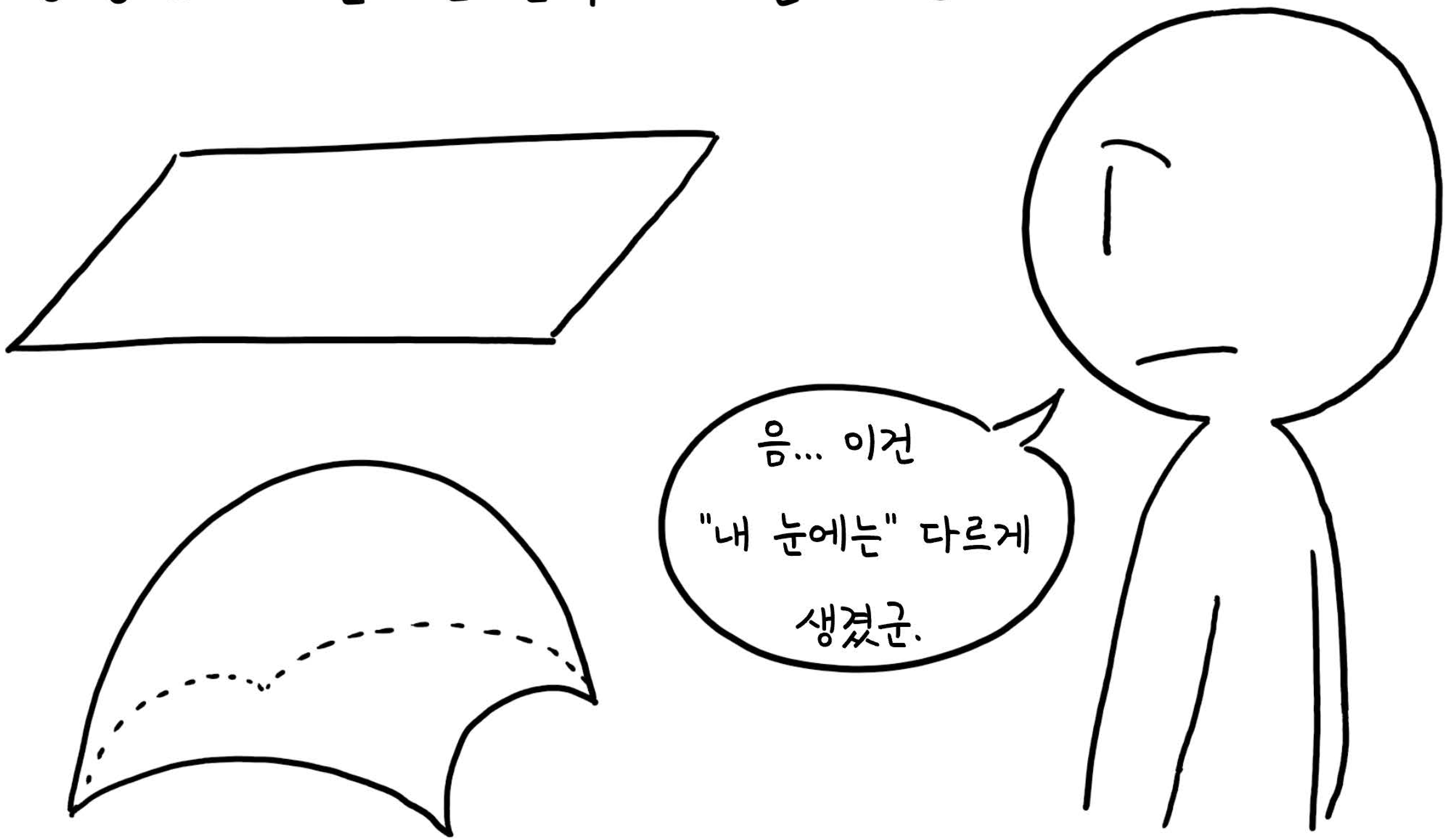
어떻게 해도 포갤 수 없지만,



3차원에서는 순식간에

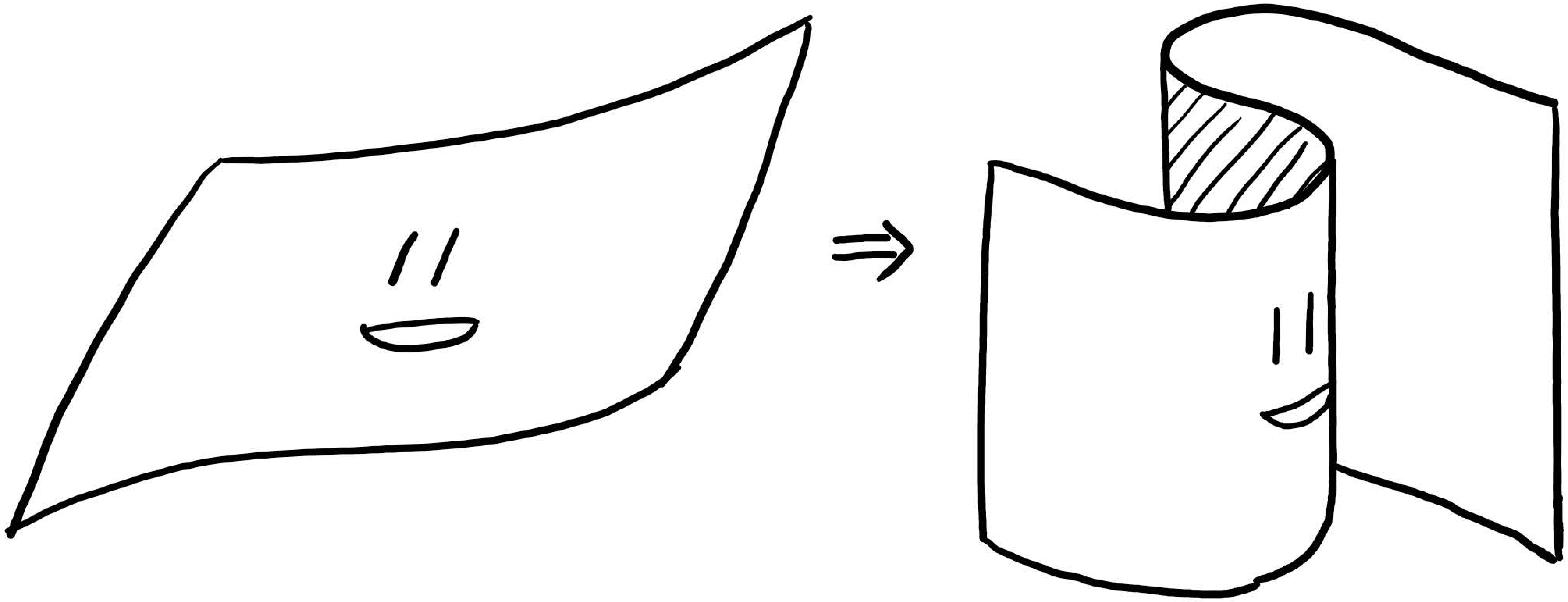
가능해지죠.

여기서 중요한 관찰은, 물체의 합동을 관찰할 때에는 물체 바깥, 즉 배경 공간에 의존하는 관측자가 필요하단 거죠.



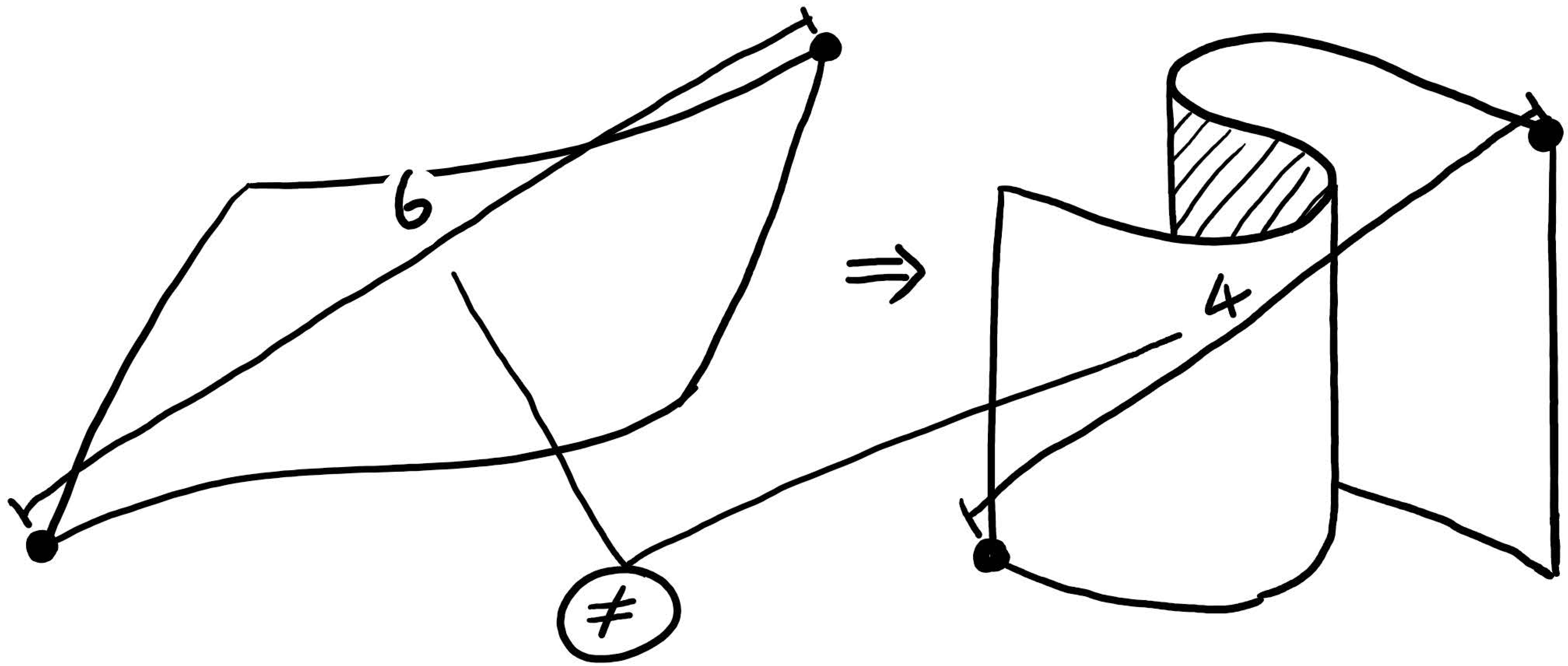
흠, 외부인의 간섭이 필요하다니 뭔가 꺼림칙한걸요.

한발 더 나아가 봅시다. 강체 대신에 종이를 사용한다면 논의가 어떻게 달라질까요?



어, 종이는 이렇게 굽힐 수 있으니까 당연히 자기 모양을 유지하지 못할 것 같은데요?

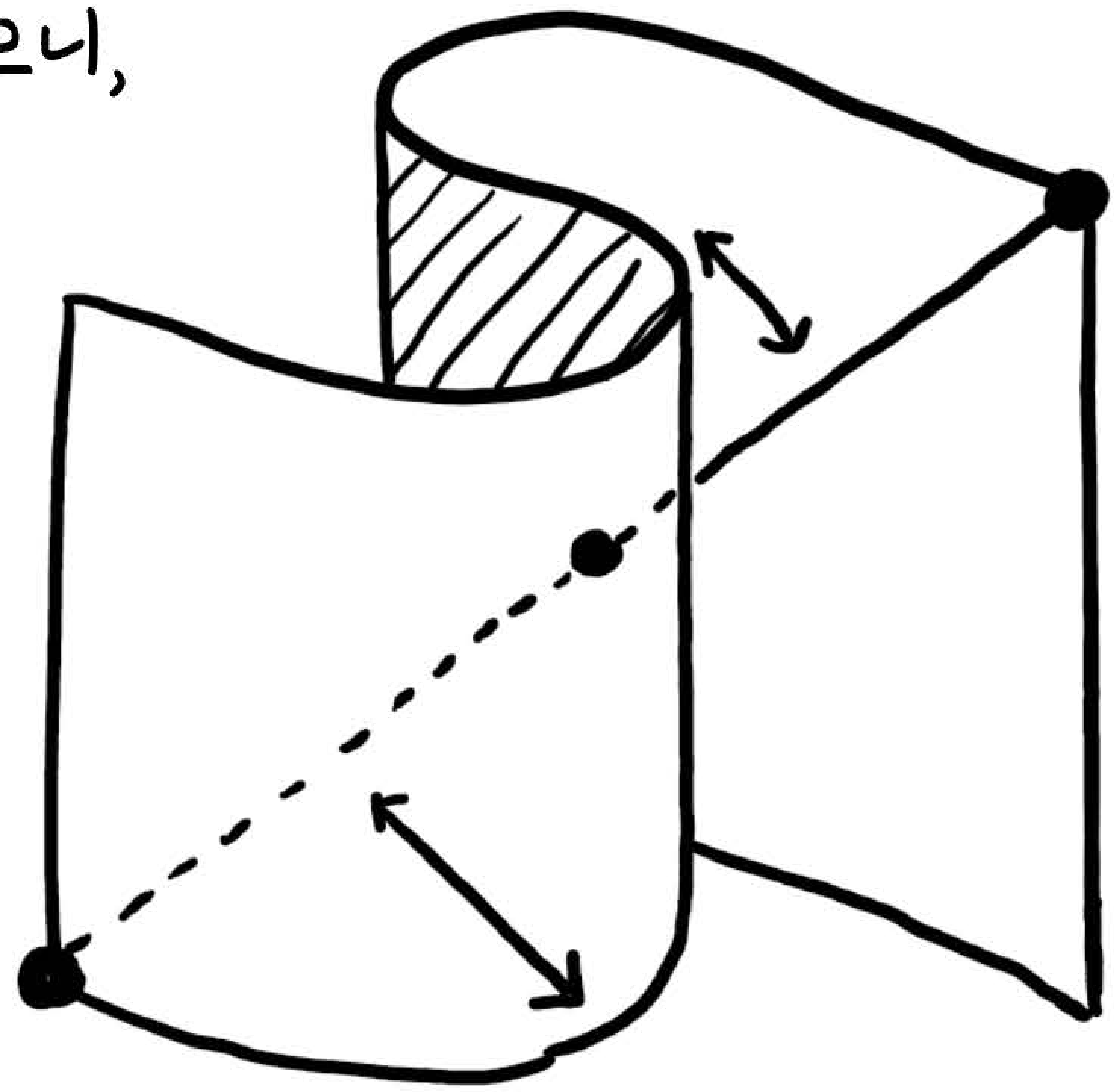
네, 이 두 물체는 분명 합동은 아닙니다. 이걸 논증하는 방법 중 하나는,

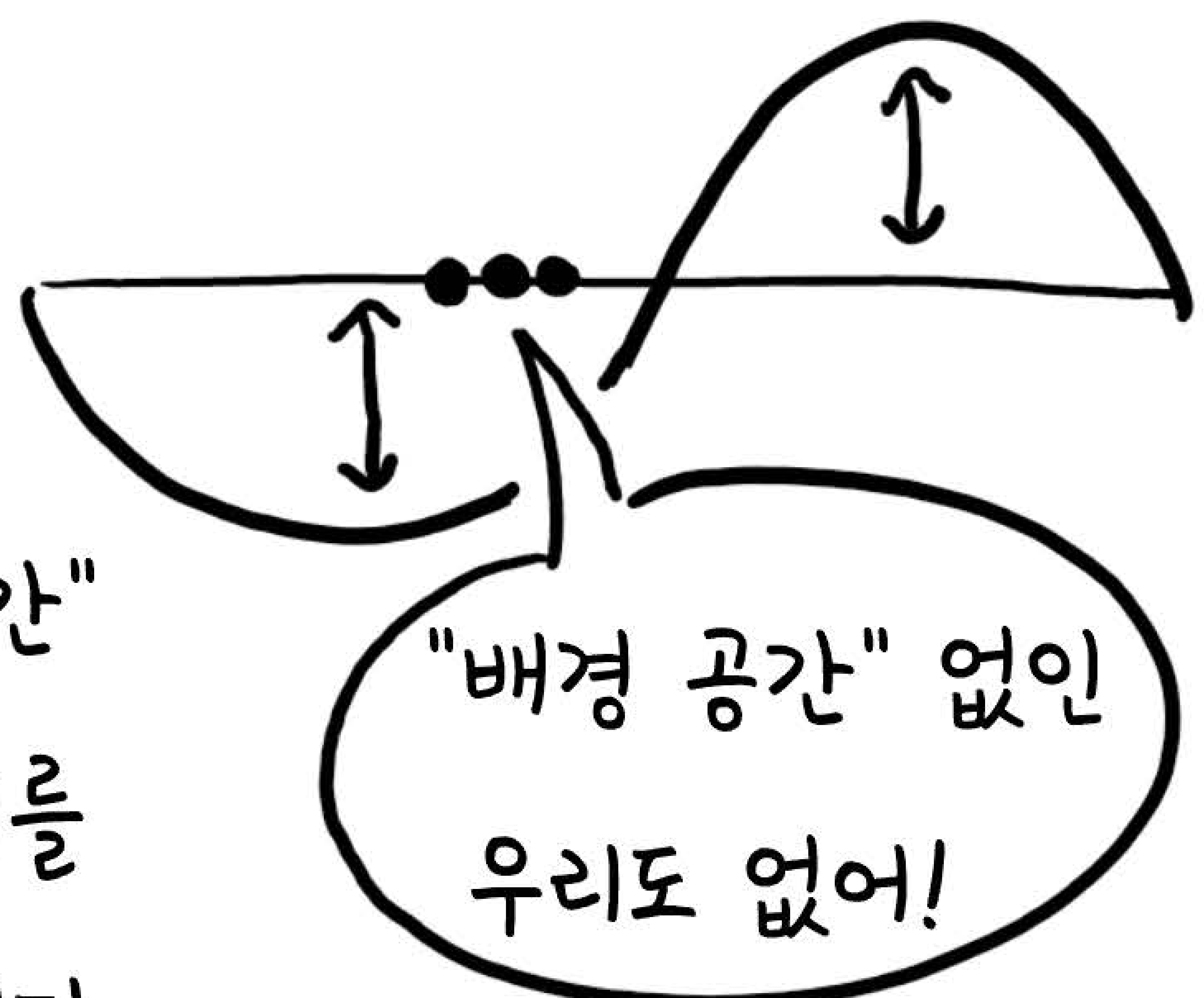


물체 안의 두 점 사이 거리의 최댓값이 다르다는 걸 관찰하는 겁니다.

그런데 이 과정에서도 "물체가 놓여 있는 공간"이 암묵적으로 등장합니다.

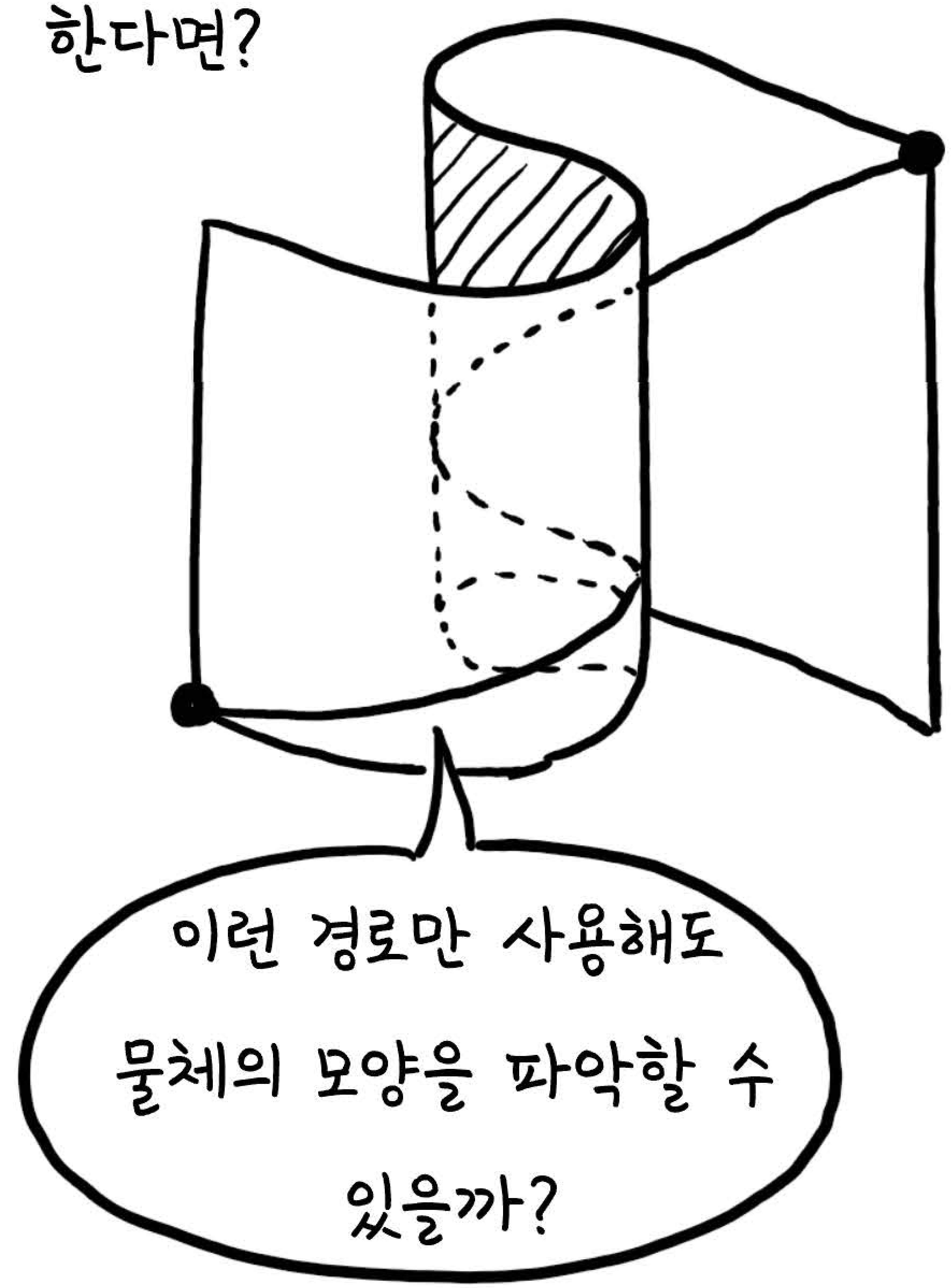
물체가 휘어졌으니, 최대 거리를 가지는 경로가 물체 바깥으로 벗어나고 있거든요.



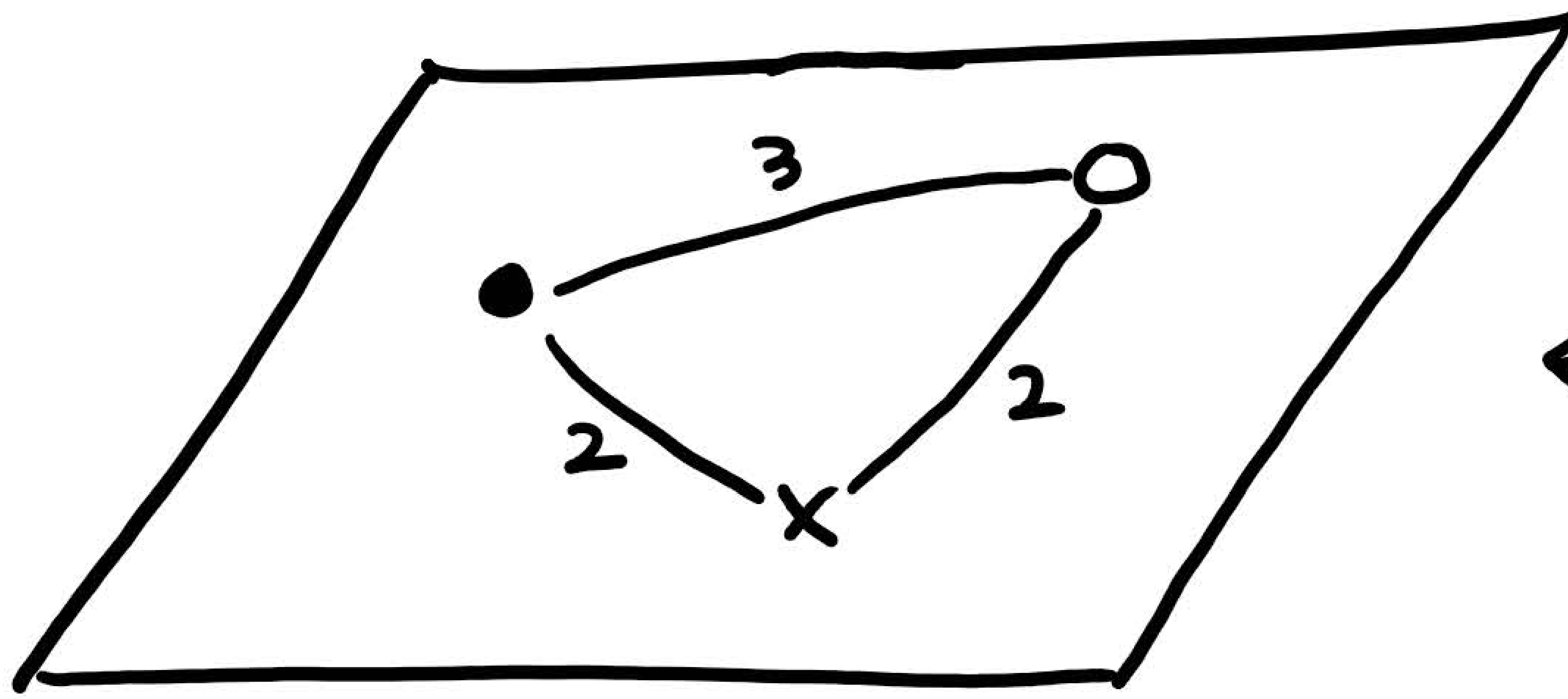


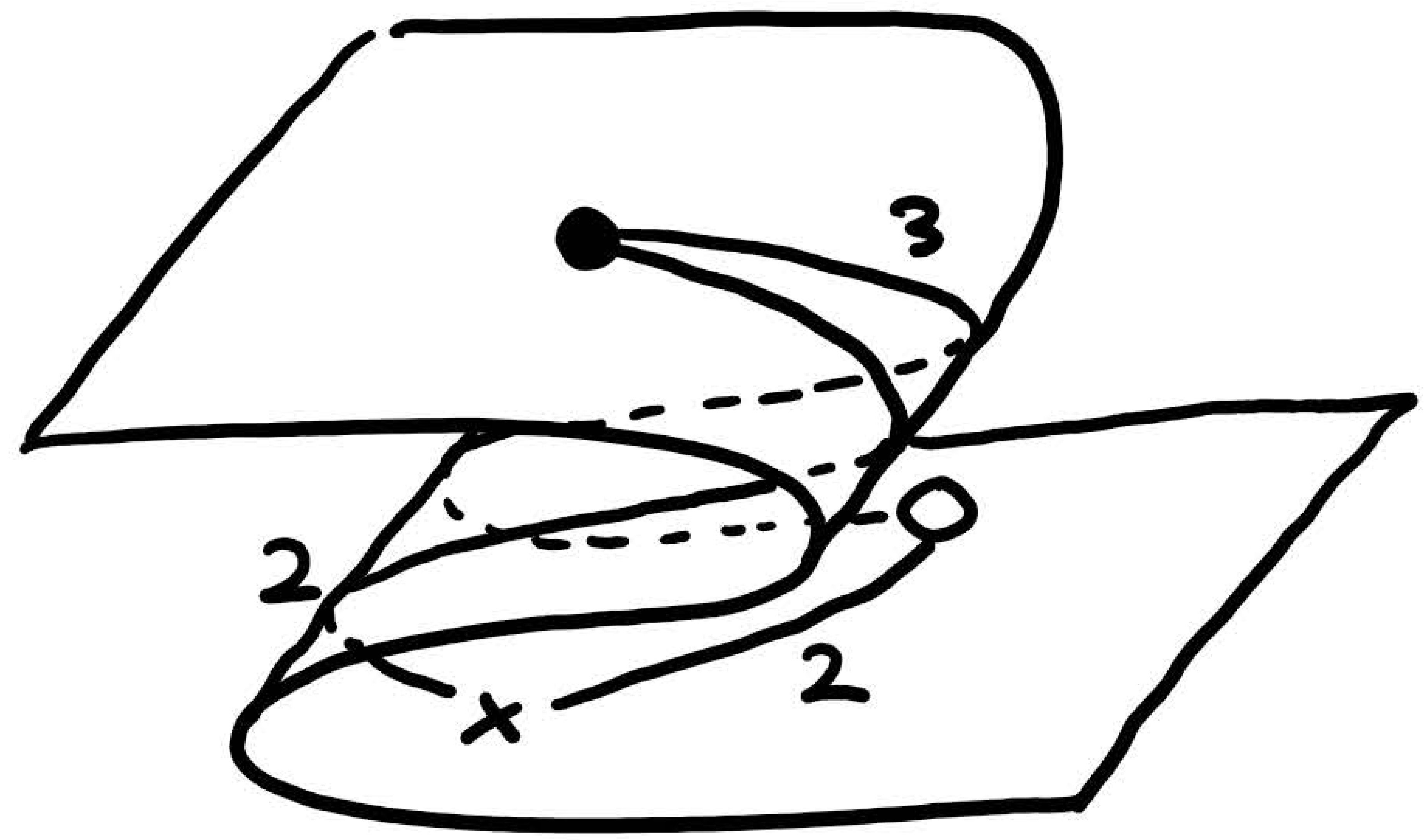
그러니 "배경 공간" 없이는 이런 논의를 이어갈 수 없습니다.

그럼 반대로, "물체 안의 정보"만 사용하기로 한다면?



이거에 대한 답은 간단합니다. 만약 "물체를 따라 그린 선"들의 길이를 보존하면서 굽혔다면,



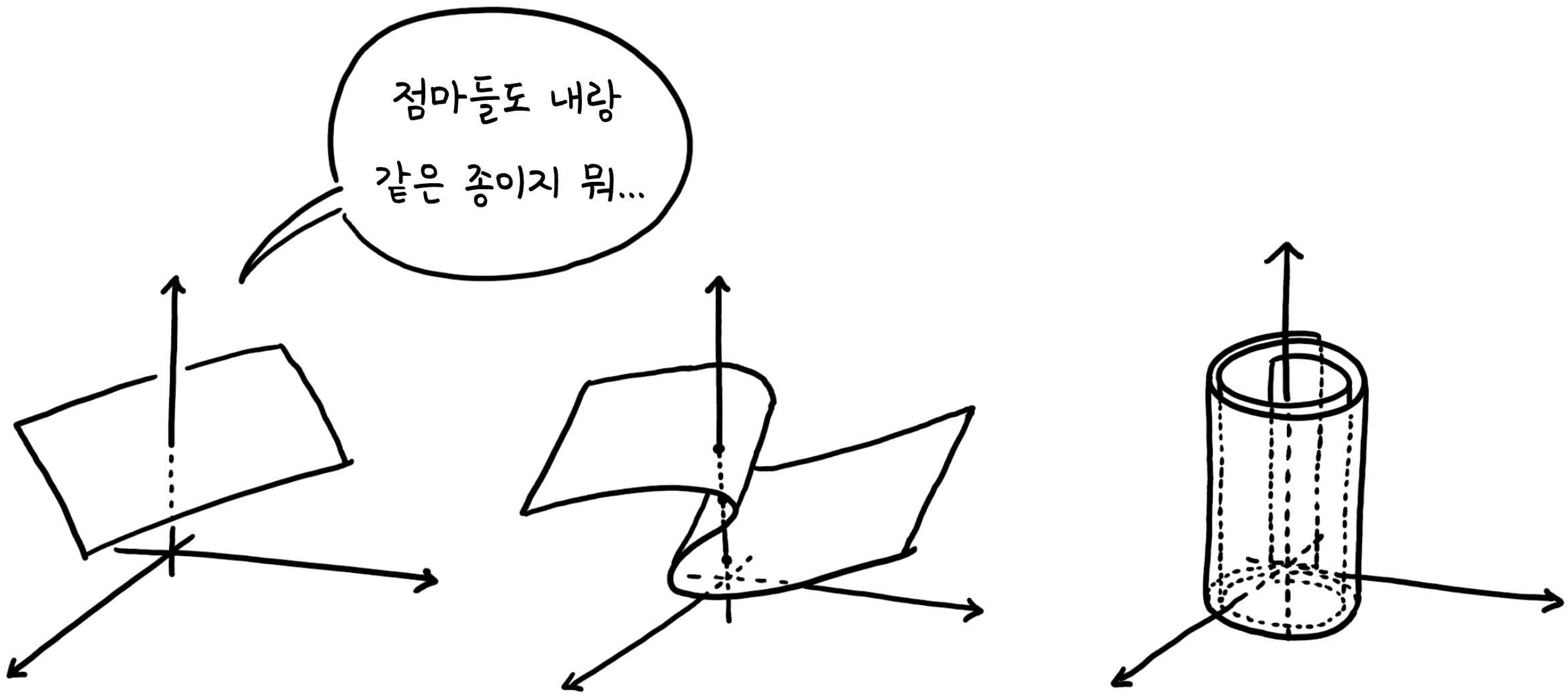


물체 내부에서는 그 물체의 굽음을 파악할 수 없을 겁니다.

오히려, 대응되는 "물체를 따라 그린 선"들의 길이가 전부 일치한다면,

두 물체를 구별할 길이 없어지겠네요.

거 재밌네요. 한번 이걸 "같음"의 기준으로 둬 보죠. 즉 이번에는 종이처럼 휘는 것은 허용하도록 기준을 바꿔서,



배경 공간에 어떻게 진열되어 있든 관계없이 같은 것으로 취급하기로 하죠.

이렇게 기준을 완화하면, 물체의 분류가 조금 달라질까요?

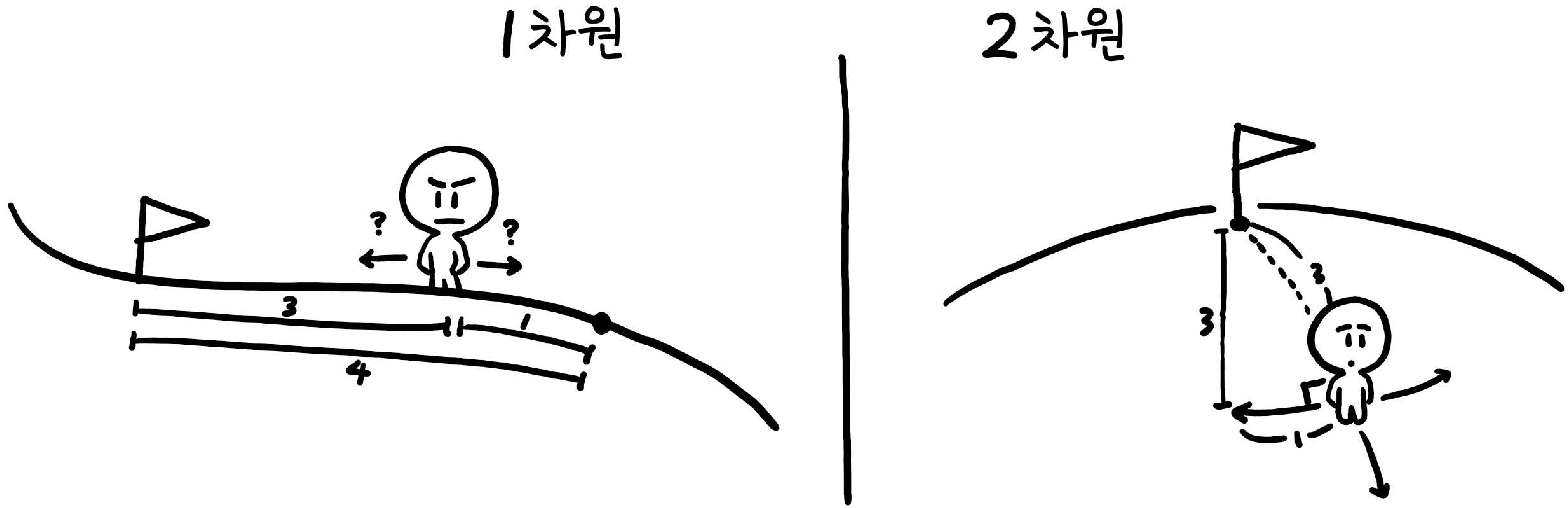
일단 첫 시도는 조금 더 간단한 물체부터 해보죠.

바로 1차원 물체들입니다. 길이는 변하지 않되 자유롭게 굽을 수 있는

실이나 쇠사슬을 떠올려 주세요.

1차원에서의 특징은, 고차원과는 다르게 "방향이 하나"라는 것입니다.

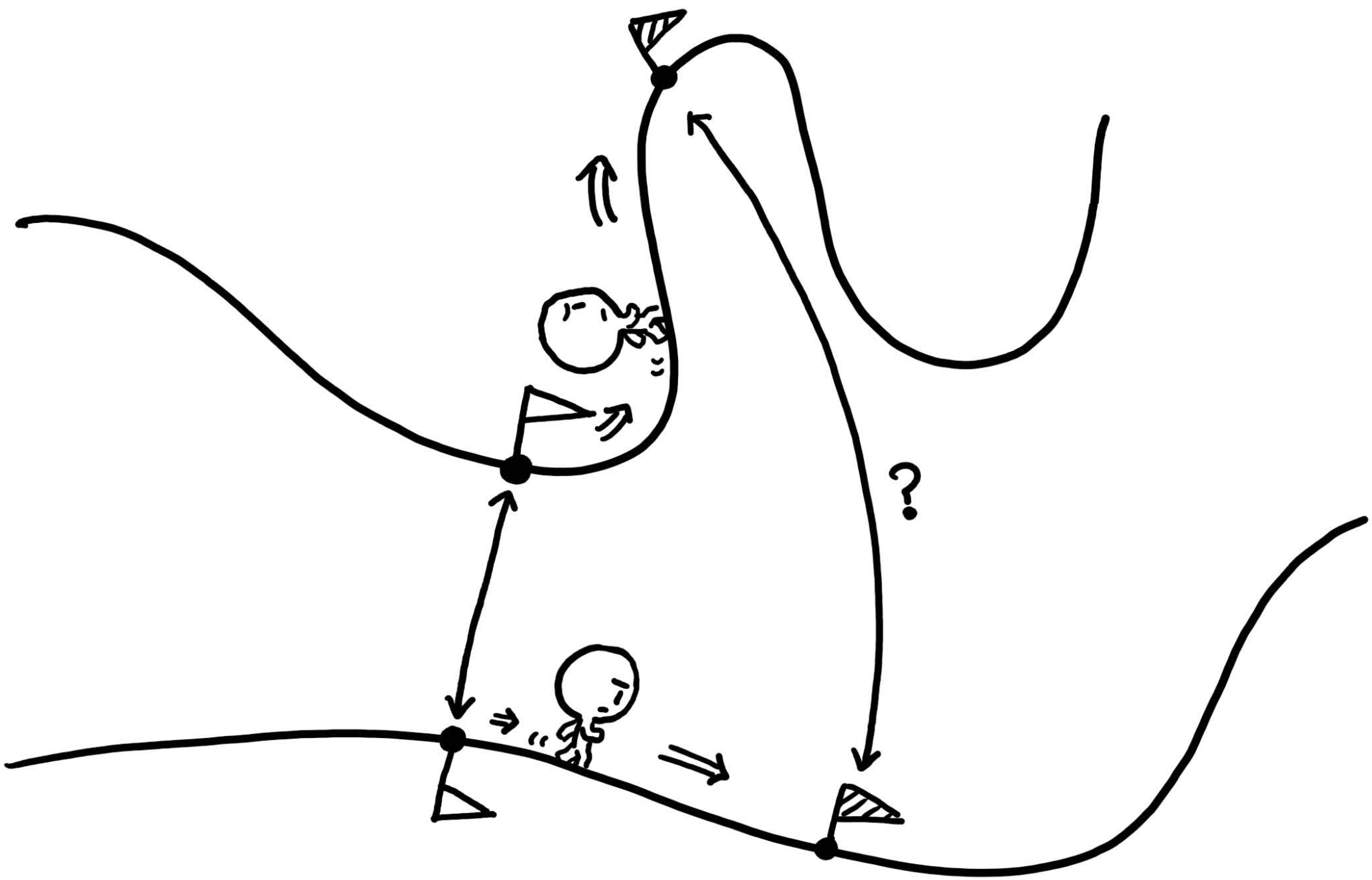
그러니 경로 중간에 택할 수 있는 선택지는 전진/후진 둘밖에 없고,



그렇기에 방향 전환에 따라 다양한 거리 정보를 얻을 수 있는

고차원과 달리, 거리 정보도 매우 제한적입니다.

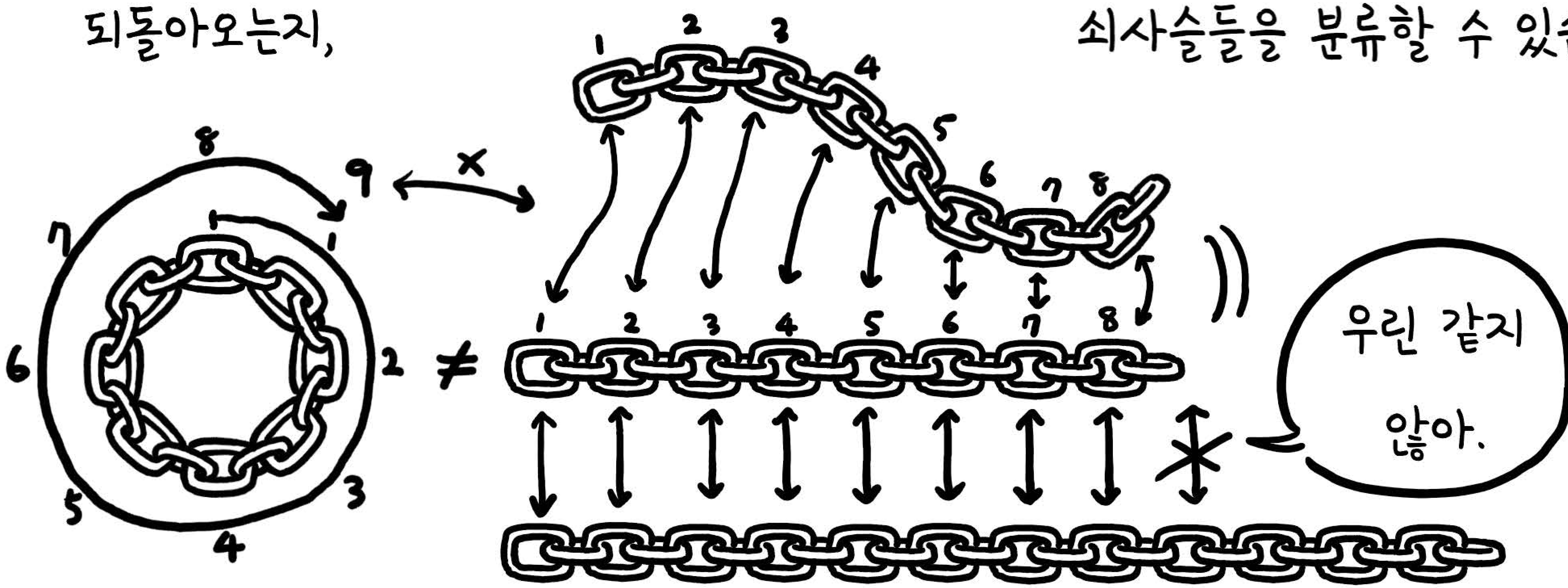
그러니 두 물체를 비교할 때 할 수 있는 작업은 오직 하나뿐입니다.



기준점으로부터 같은 거리에 있는 두 점이 서로 대응하고 있는지 체크하는 거죠.

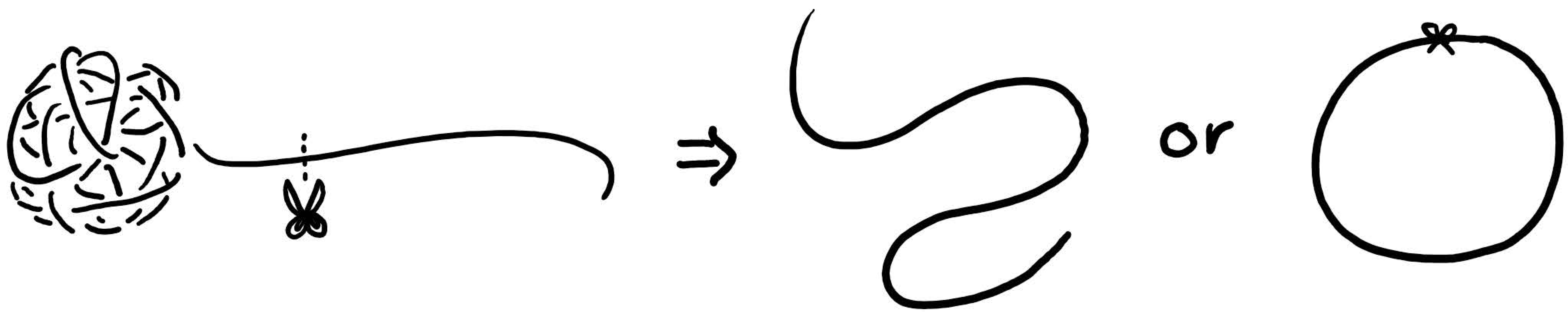
체인 모델에서 살펴 보면, 기준점에서 오른쪽으로 세어 나갔을 때,

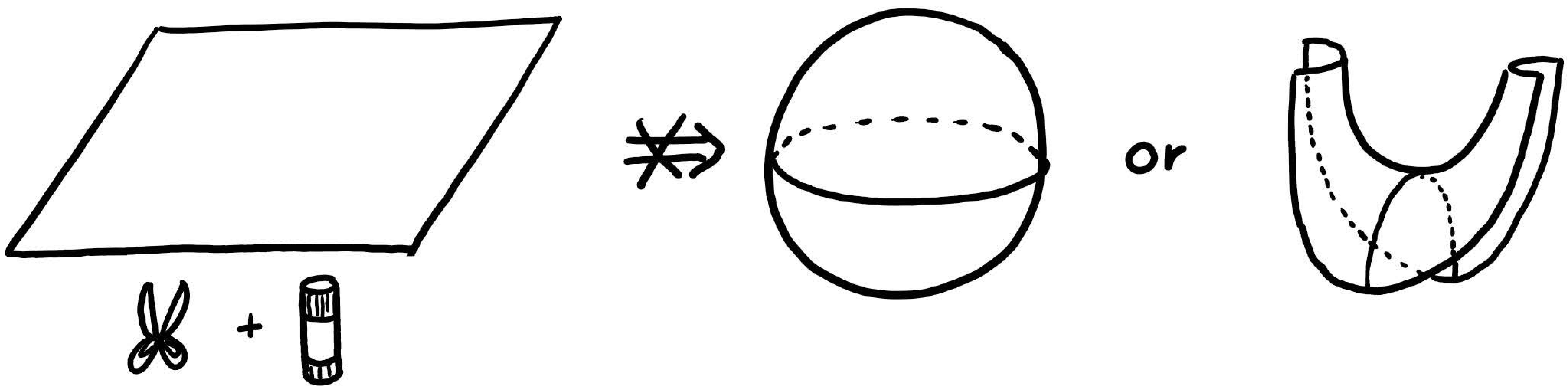
(1) 자기 자신으로 되돌아오는지, (2) 전체 쇠사슬 길이가 얼마인지, 이 두 요소로 모든 쇠사슬들을 분류할 수 있습니다.



그리고 비록 전체 모양은 다르더라도, "로컬한 구성 요소"는 모두 똑같이 생겼죠.

이렇게 1차원에서는 같은 구성 요소 (실 혹은 체인)으로 모든 모양을 간단하게 만들 수 있음에 비해,

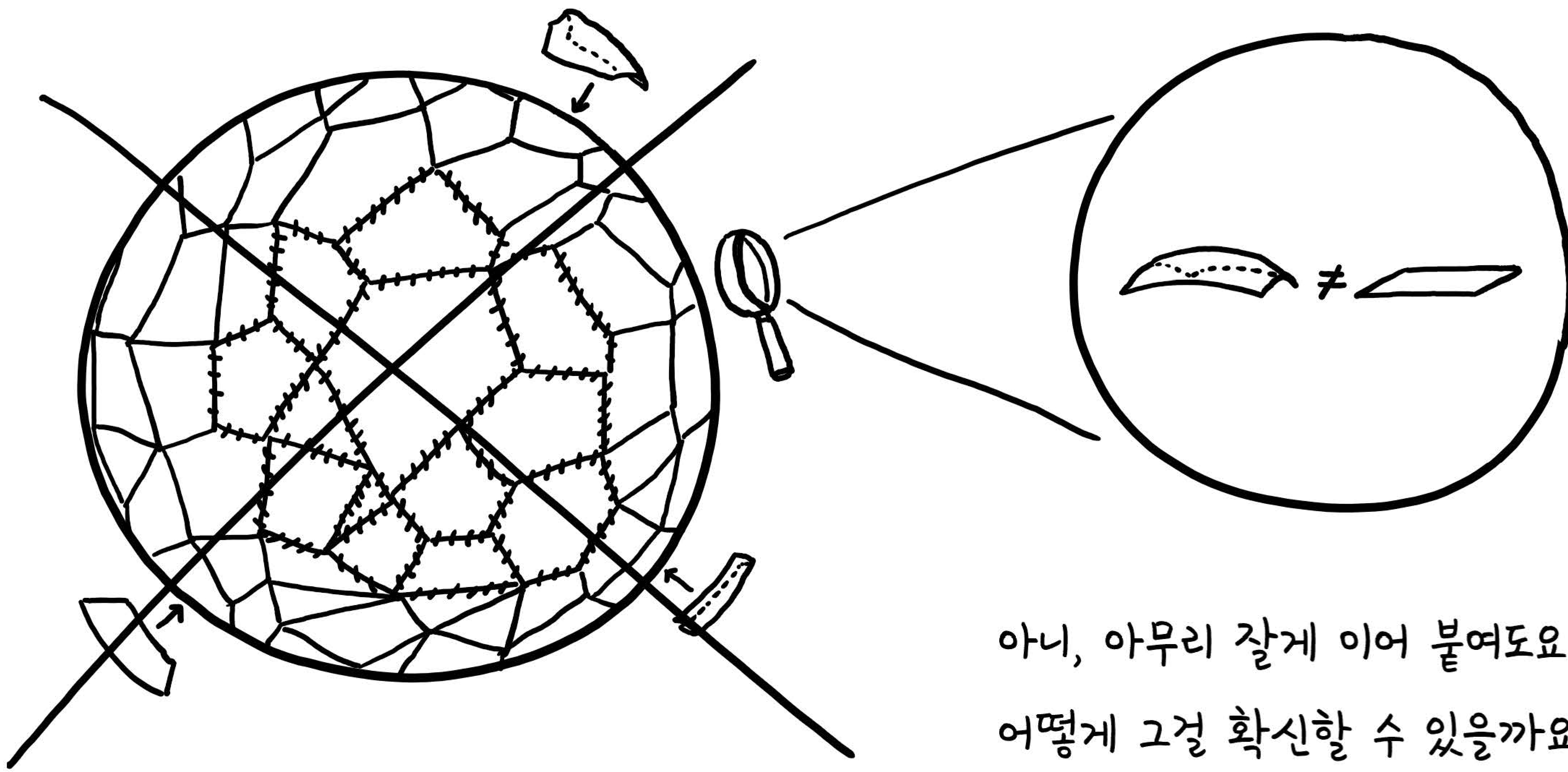




2차원에서는 구성 요소부터 한 가지 이상을 준비해야 합니다.

이걸 다시 풀어 쓰면, 굽힌 평면 조각들을 아무리 이어 붙여도

구는 만들 수 없다는 겁니다.



아니, 아무리 잘게 이어 붙여도요?

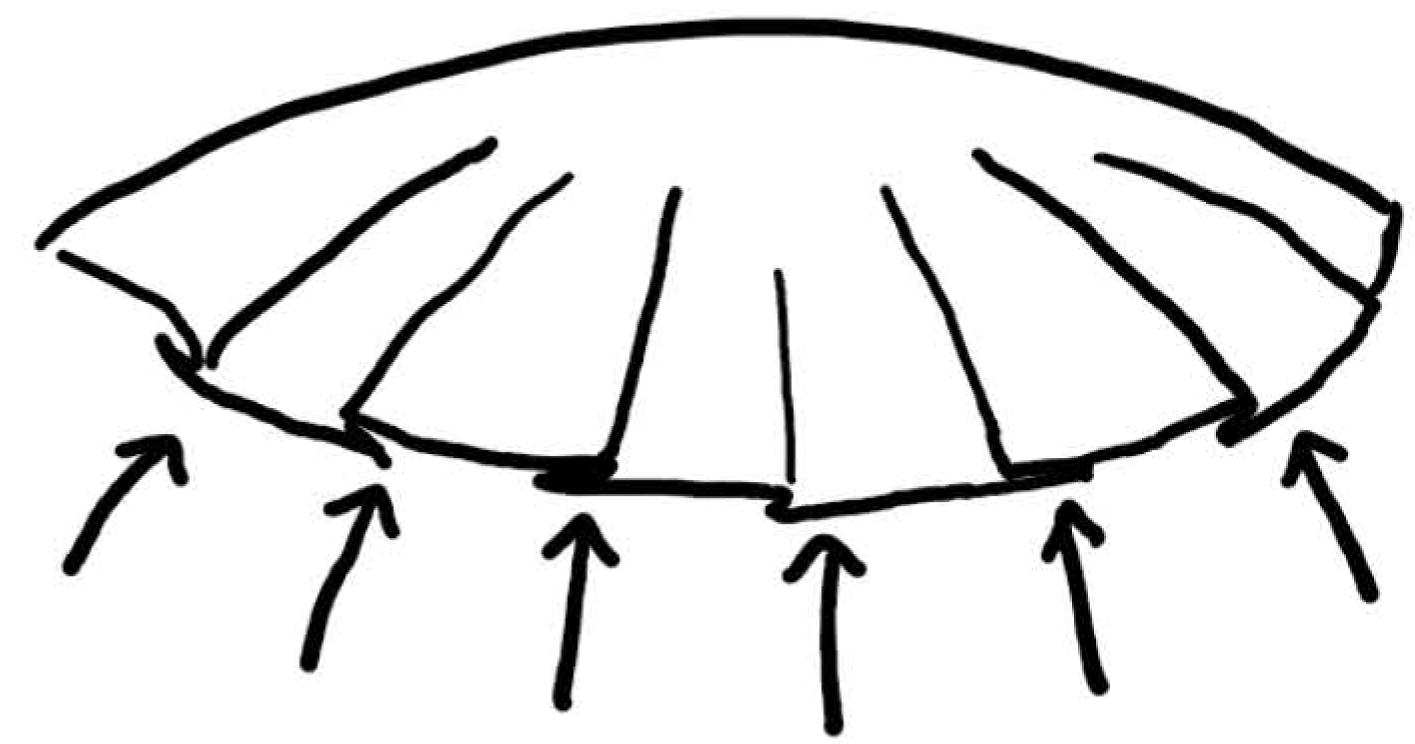
어떻게 그걸 확신할 수 있을까요?

막대사탕이나 알사탕 포장지를 살펴 보면 그 이유를 알 수 있습니다.

이런 포장은 평면 포장지로 구면을

감싸려는 시도임에도,

:

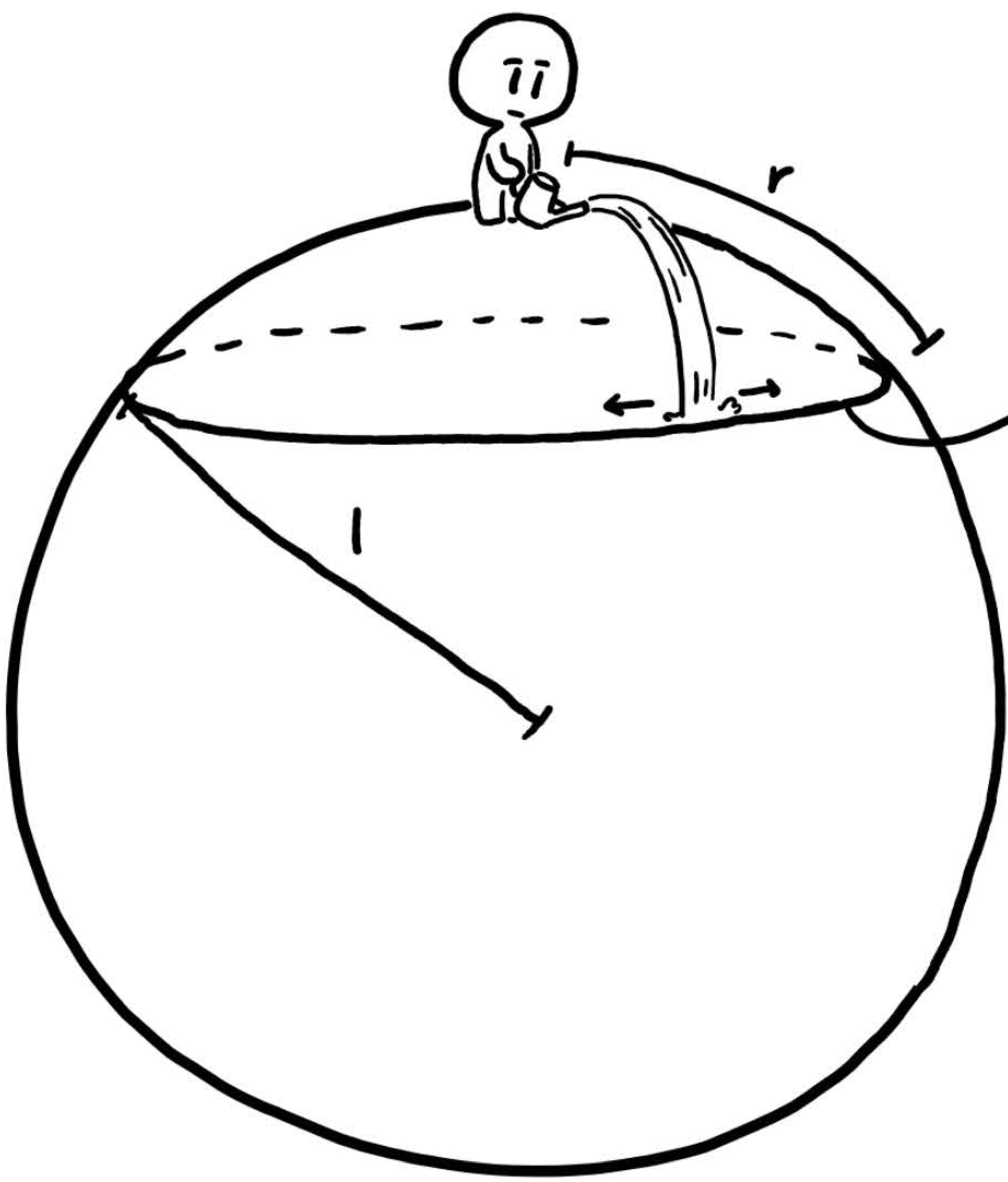


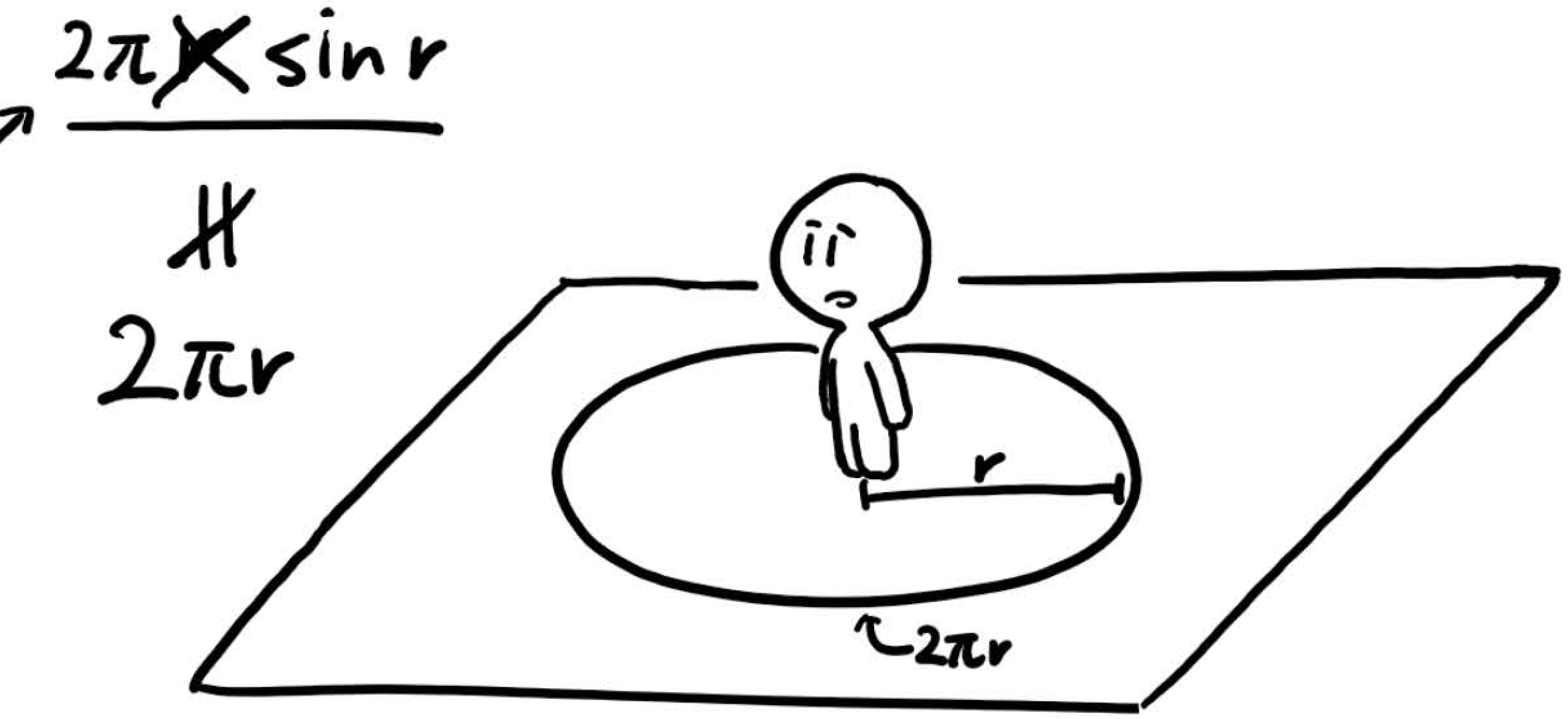
이런 "자글자글한 접힘"이 생겨서

완벽하게 1대1로 덮지는 못합니다.

이 접힘은 "잉여 부분"이 생겼다는 것이죠.

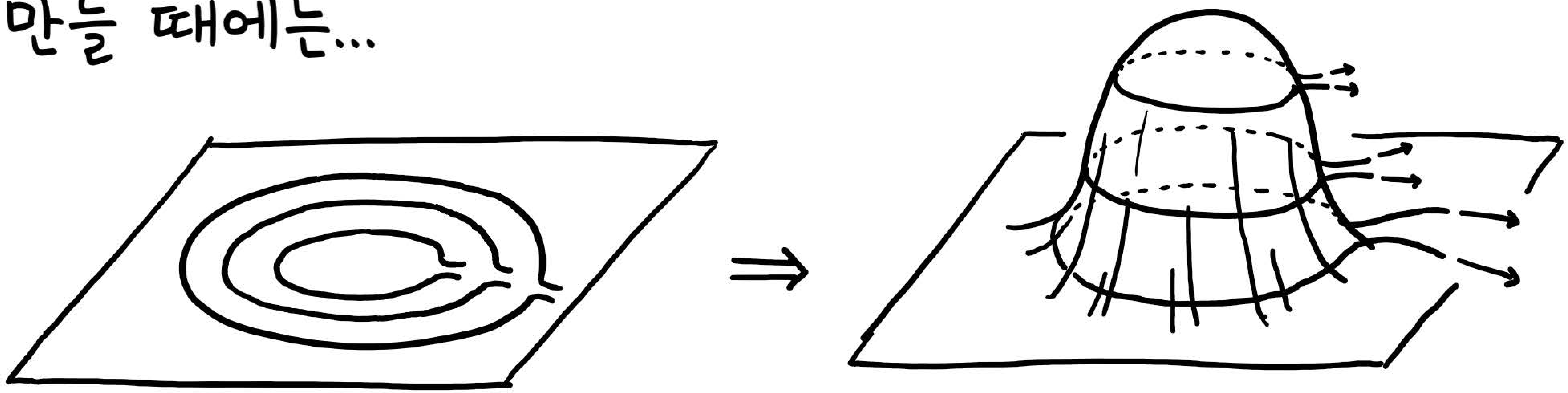
실제로, 구면 위에 그린 원의 둘레는 평면 원의 둘레보다 길이가 더 짧습니다. 반지름 및 원주 모두 "물체 내의 거리" 개념에 해당하기에,

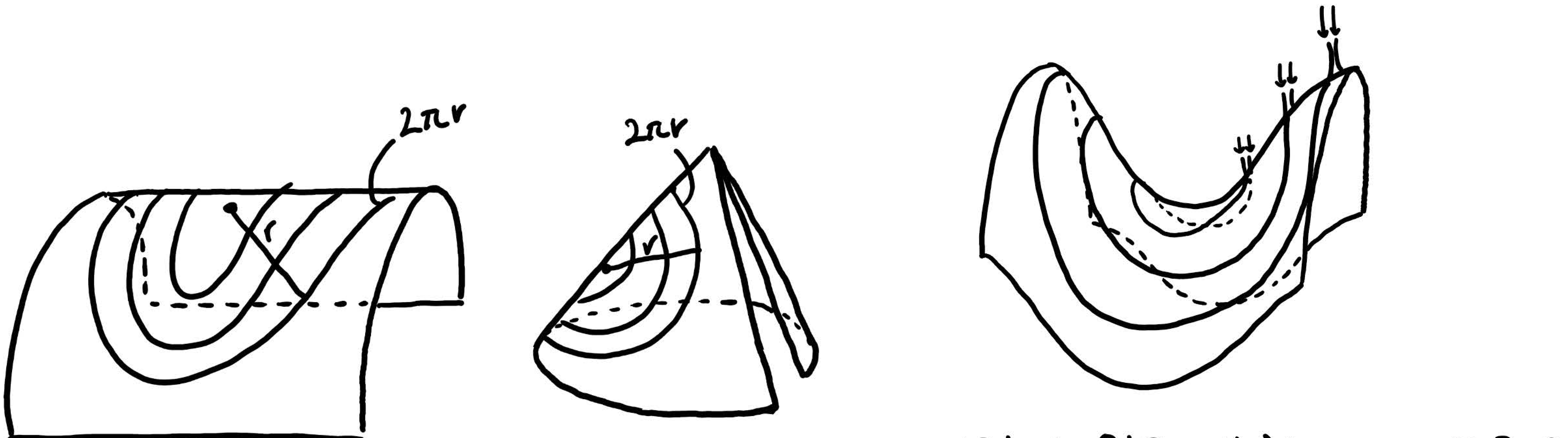




이 차이는 "물체의 진열 상태"와는 무관한 내재적인 차이입니다.

그러니까 흔히 말하는 종이의 굽힘과는 달리 (아래쪽), 구면이나 말안장 모양을 만들 때에는...





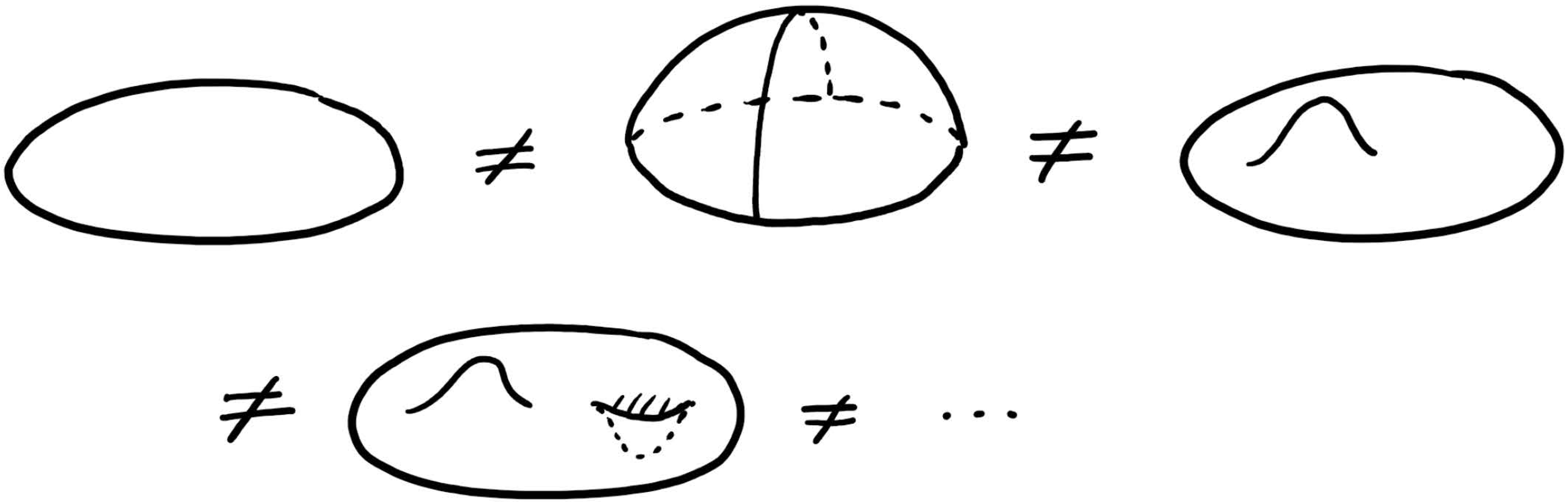
이렇게 원주 방향으로 고무줄을 당겨 주거나 늘려주는 작업이 필요하단 겁니다.

여담이지만, 지구를 평면 지도에 담을 때 거리가 왜곡될 수밖에 없는 이유가 이것입니다.

공간 상에서 평면 지도를 아무리 굽혀도, 두 물체의 "내재적인 굽은 정도" 차이는 극복할 수 없는 거죠.

음 그러면, 원판을 위아래로 손가락으로 쿡쿡 찌르면

"내재적인 굽은 정도"가 다른 물체를 얼마든지 만들 수 있겠군요.

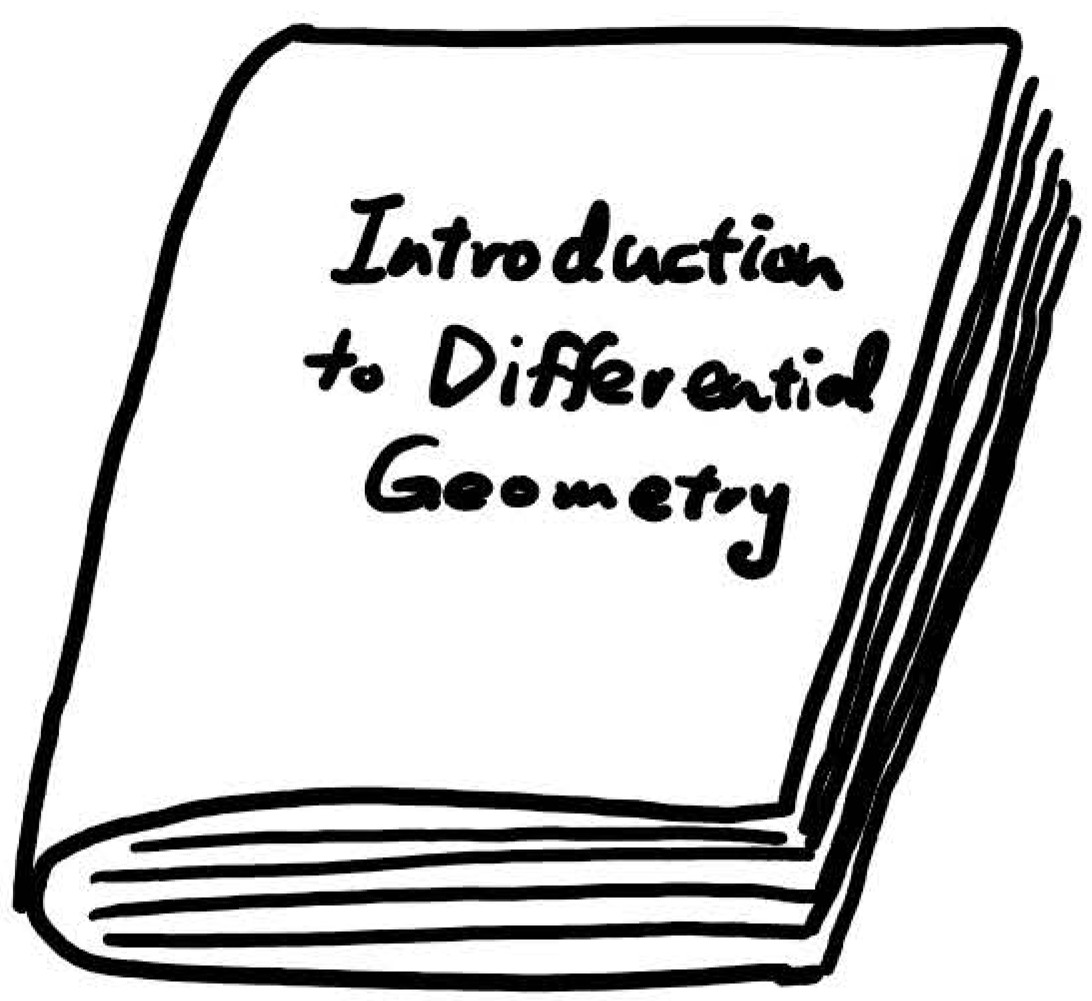


음, 이 모든 녀석들을 다 분류하는 게 가능할까요?

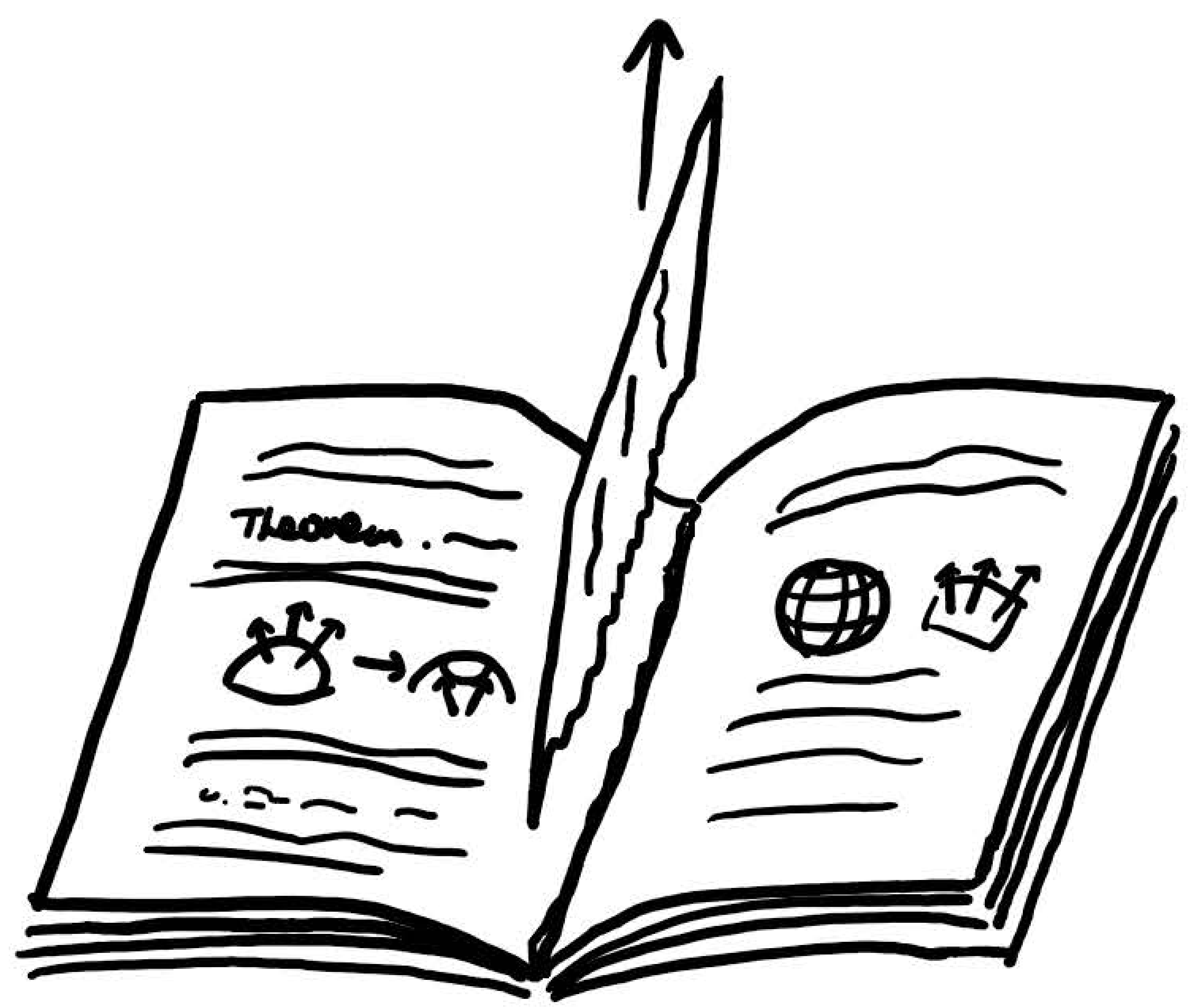
너무 자유도가 높아 버거울 것 같은 예감이네요.

그러니 방금보다 한 단계 더 완화된 기준을 생각해 봅시다.

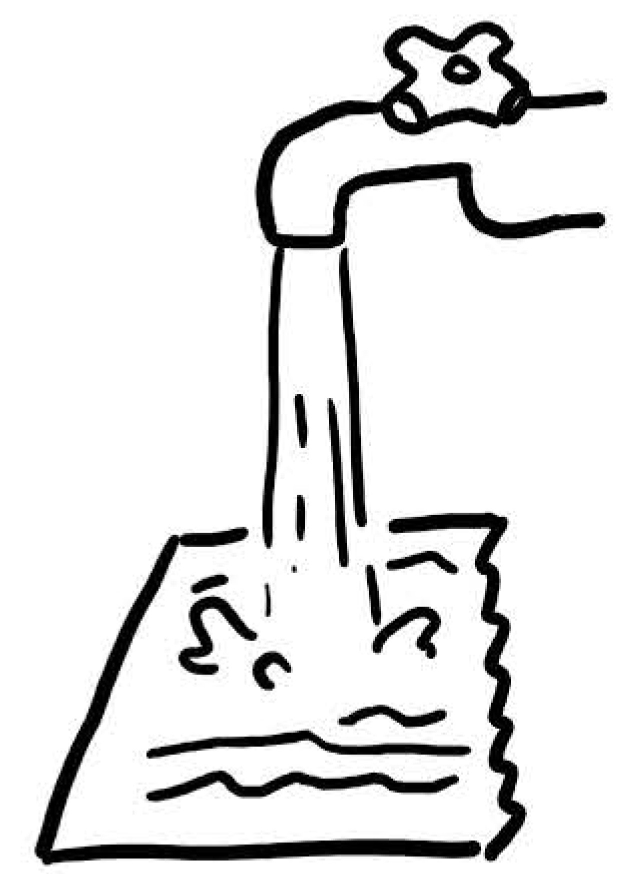
아래와 같은 사고 실험을 상상해 보세요.



머릿속에 안 들어오는
가장 어려운 책을 고른 뒤,



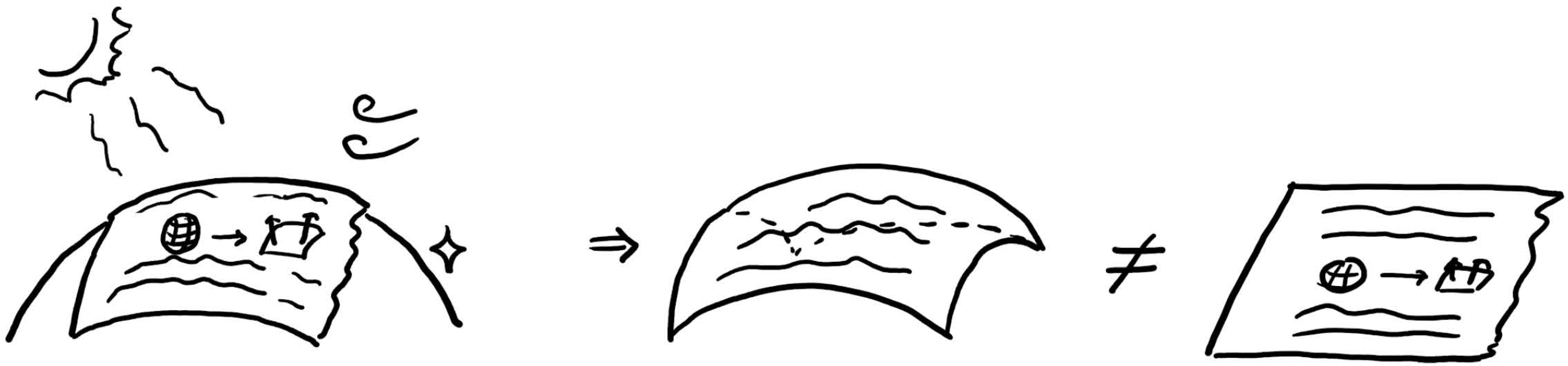
제일 골칫덩이였던
페이지를 찢어냅니다.



그러고 수돗물로 잘 씻어 줍니다.
종이니까 금방 너덜너덜해지겠죠?

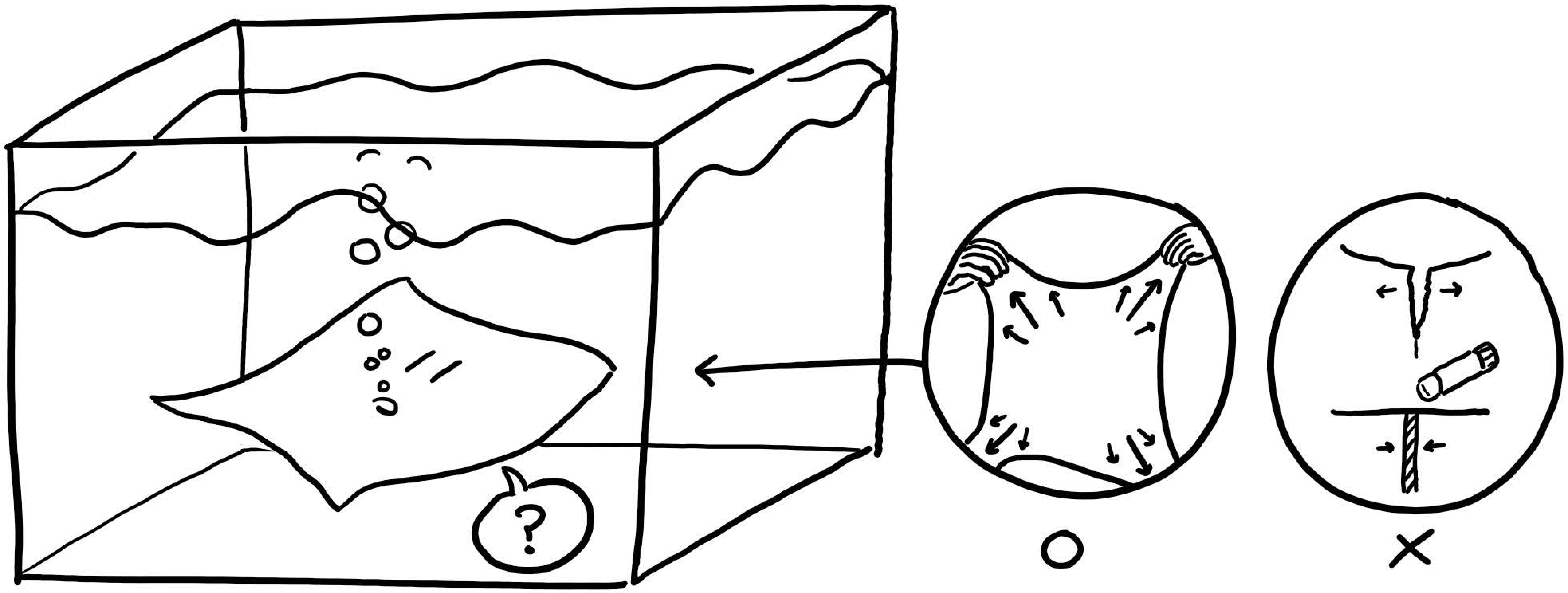
이제 그 우글우글한 종이를 볕에 잘 말려줘야 합니다.

이때, 원하는 모양의 틀 위에서 말려야 좋겠죠.



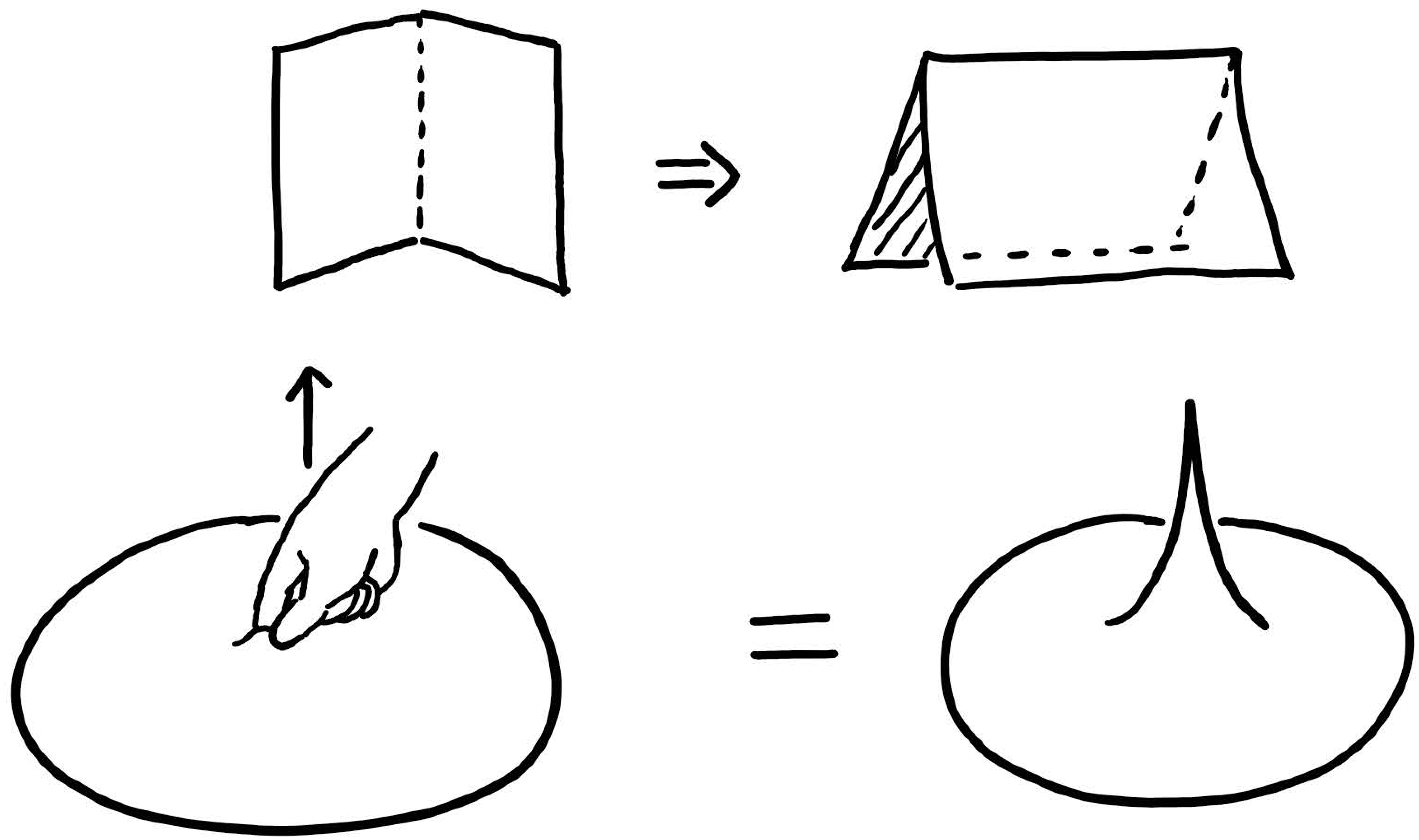
그러면, 원래 종이와는 굽은 정도가 다른 모양을 만들 수 있을 겁니다. 물에 적시는 반칙을 하긴 했지만 (그래서 길이도 수축/팽창했을 수 있지만) 아무튼 종이로 만들었잖아요?

아, 이거 다양한 모양을 만들 수 있으니 좋네요. 이렇게 편법 취급하지 말고, 아예 대놓고 종이를 물에 담가서 조작하는 건 어떨까요?



(물에 불은 종이는 불쌍하지만) 이제 길이를 늘리거나 수축시키는 것도 자유롭게 할 수 있어요. 함부로 찢거나 이어붙이지만 않으면 말이에요.

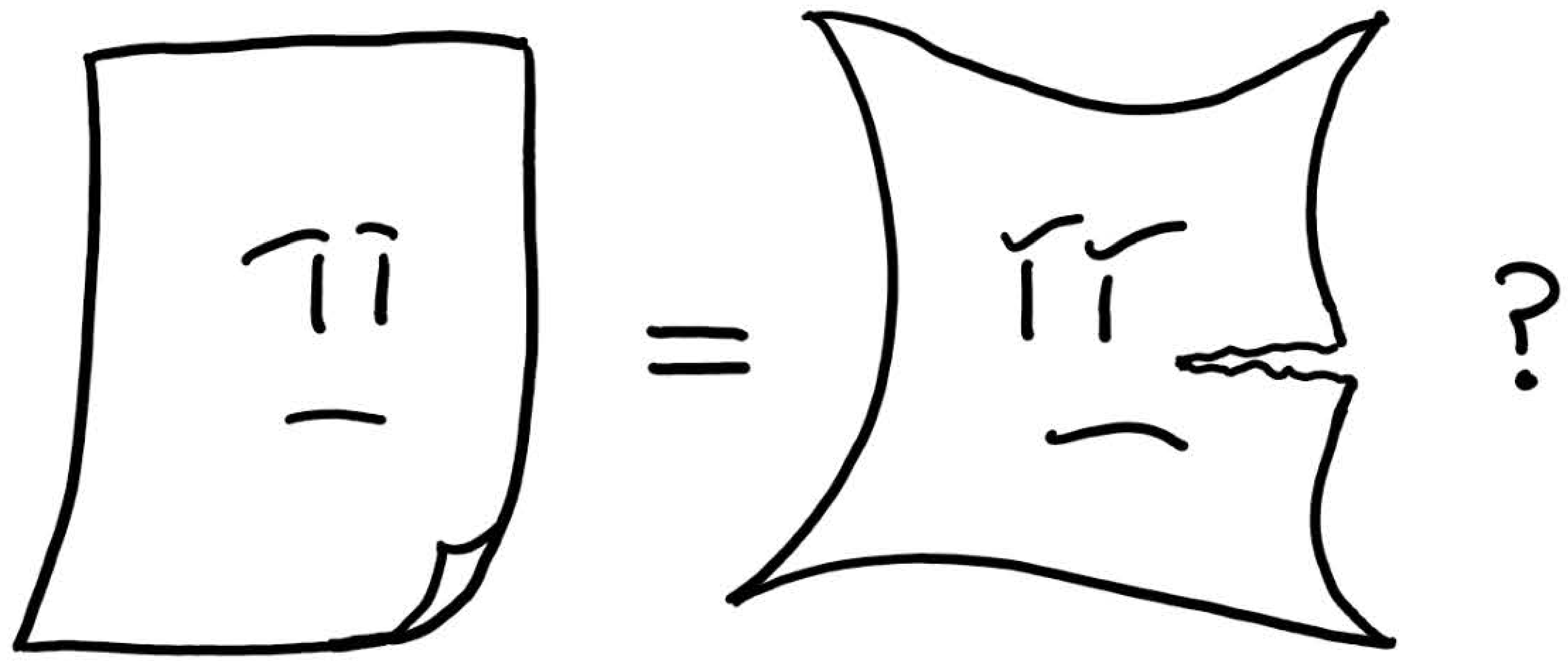
더 나아가, 선을 따라 종이를 접어 특정한 각도를 만들거나,



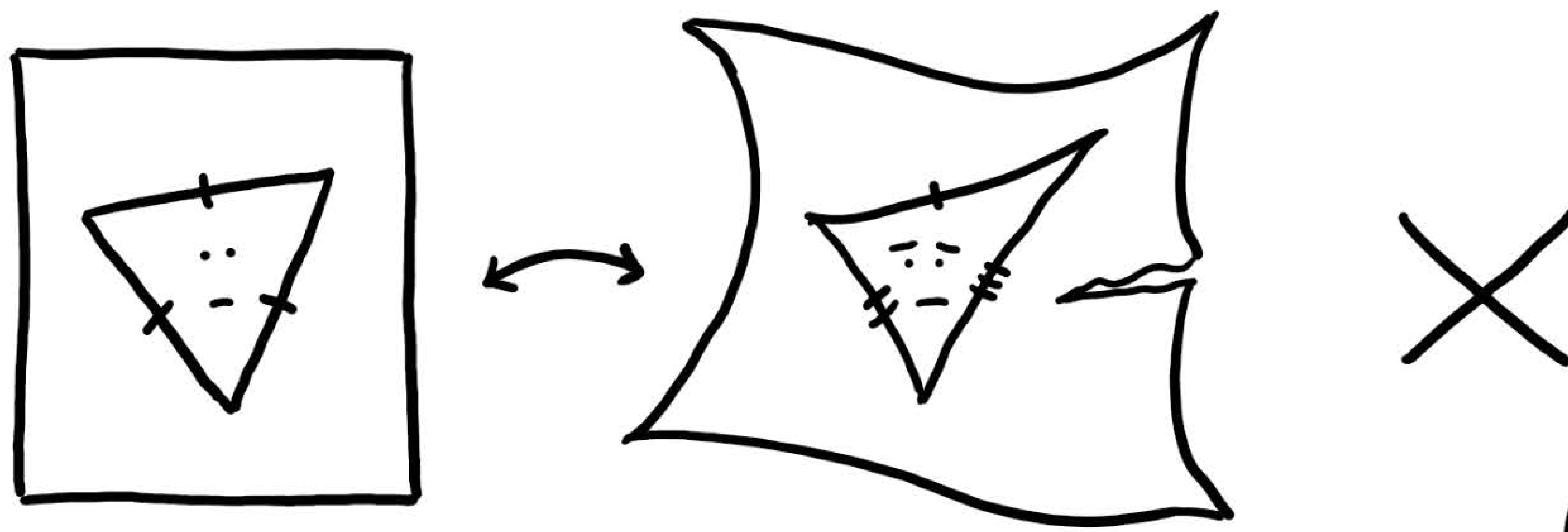
한 부위를 꼬집어 내어 뾰족하게 만든다고 해도 크게 상관 없어요.

어차피 (물에 불은) 종이는 종이니까요...?

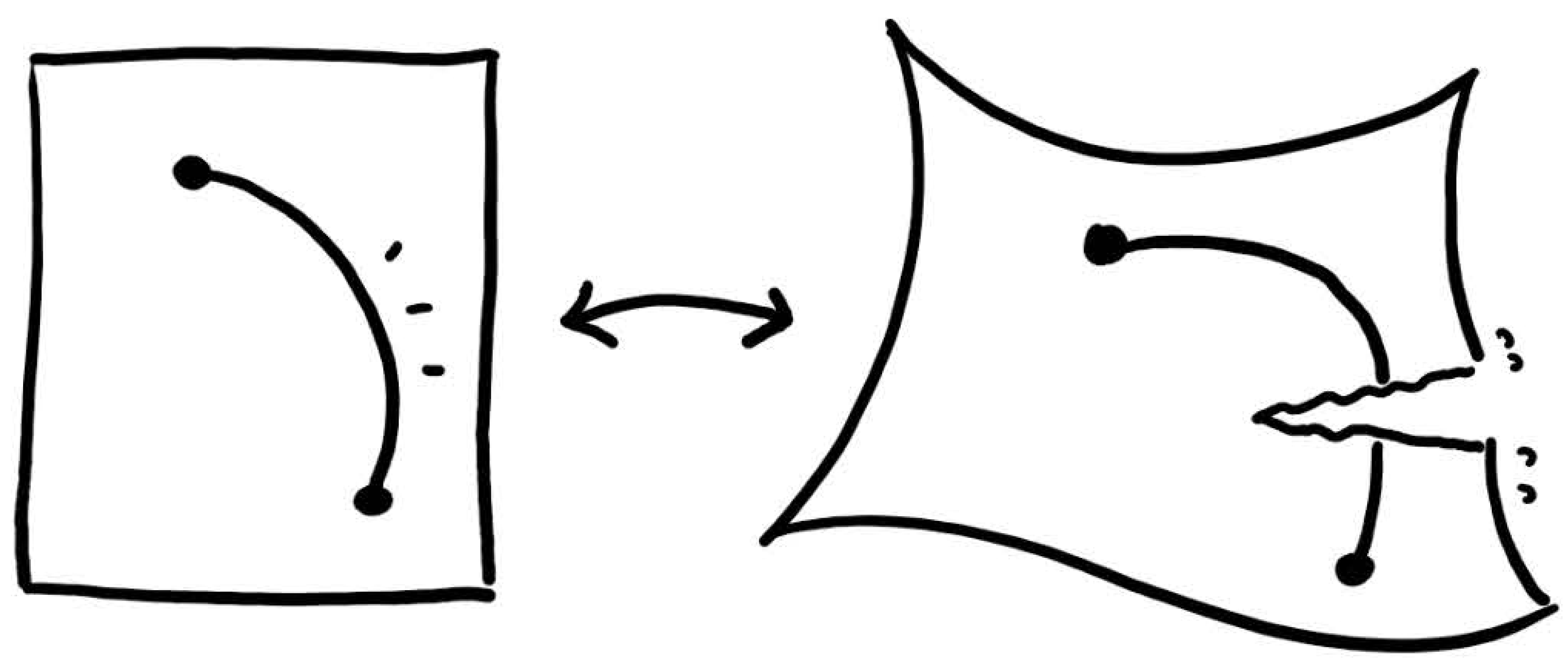
이렇게나 자유로운 변형이 가능한 상황에서 두 물체를 비교한다면,



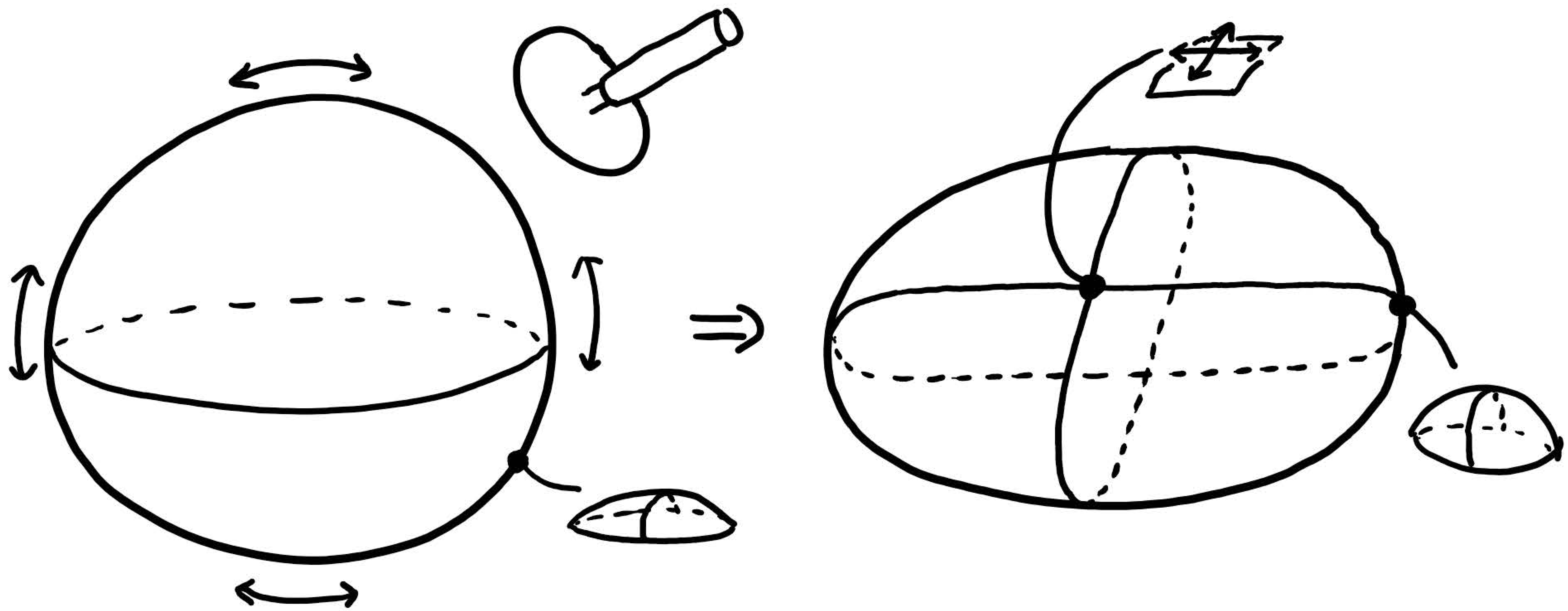
길이가 유지되는지 살펴 보는 것은 더 이상 의미가 없을 것 같아요.



원래 연결된 부분이 찢어지진 않았는지(혹은 그 반대)를 살펴 보는 게 전부겠죠.

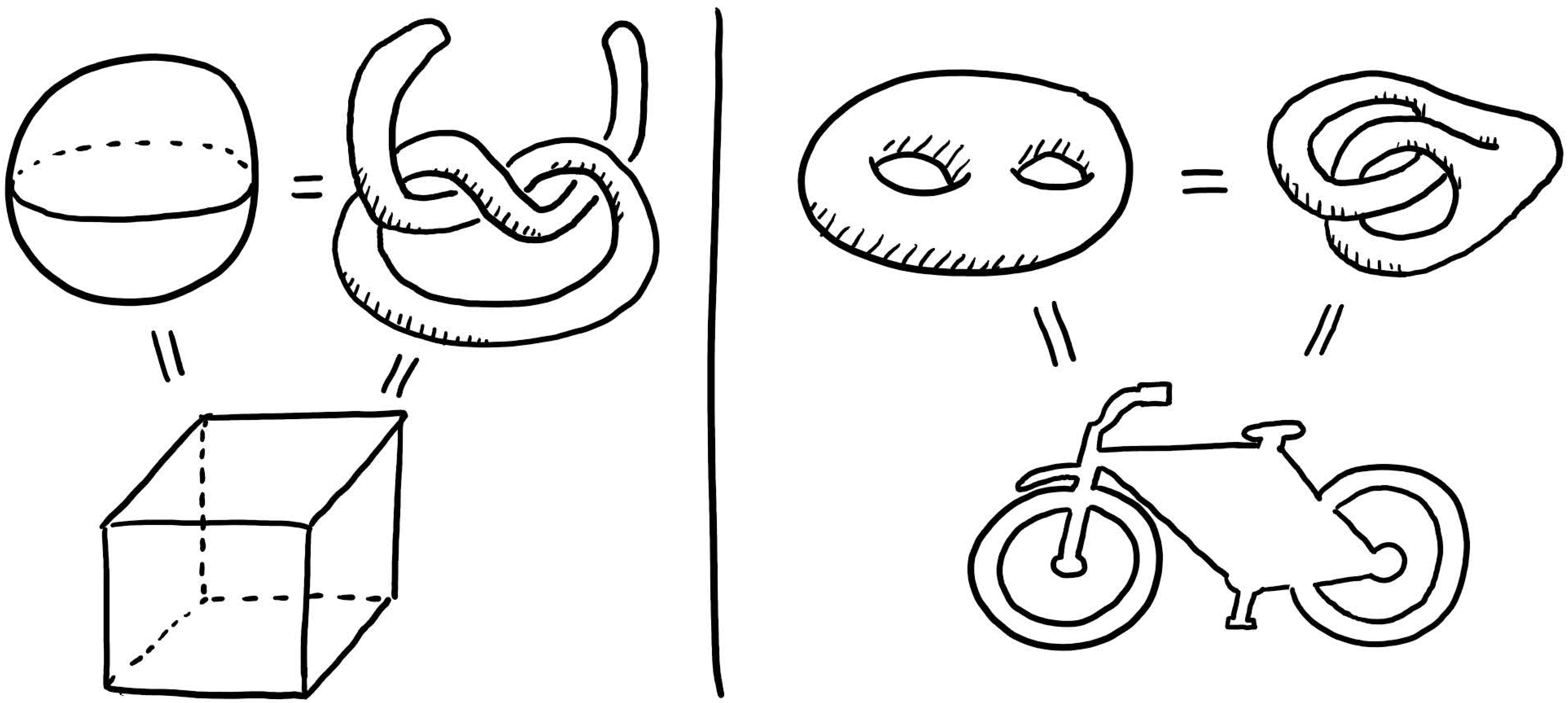


예를 들어, 모든 부분이 고르게 굽어 있던 동그란 구도 누르개로 누르면,



어떤 부분은 평평하고, 어떤 부분은 더 심하게 굽은 찌그러진 모양이 되겠지만 이런 것도 개의치 않겠다는 거예요.

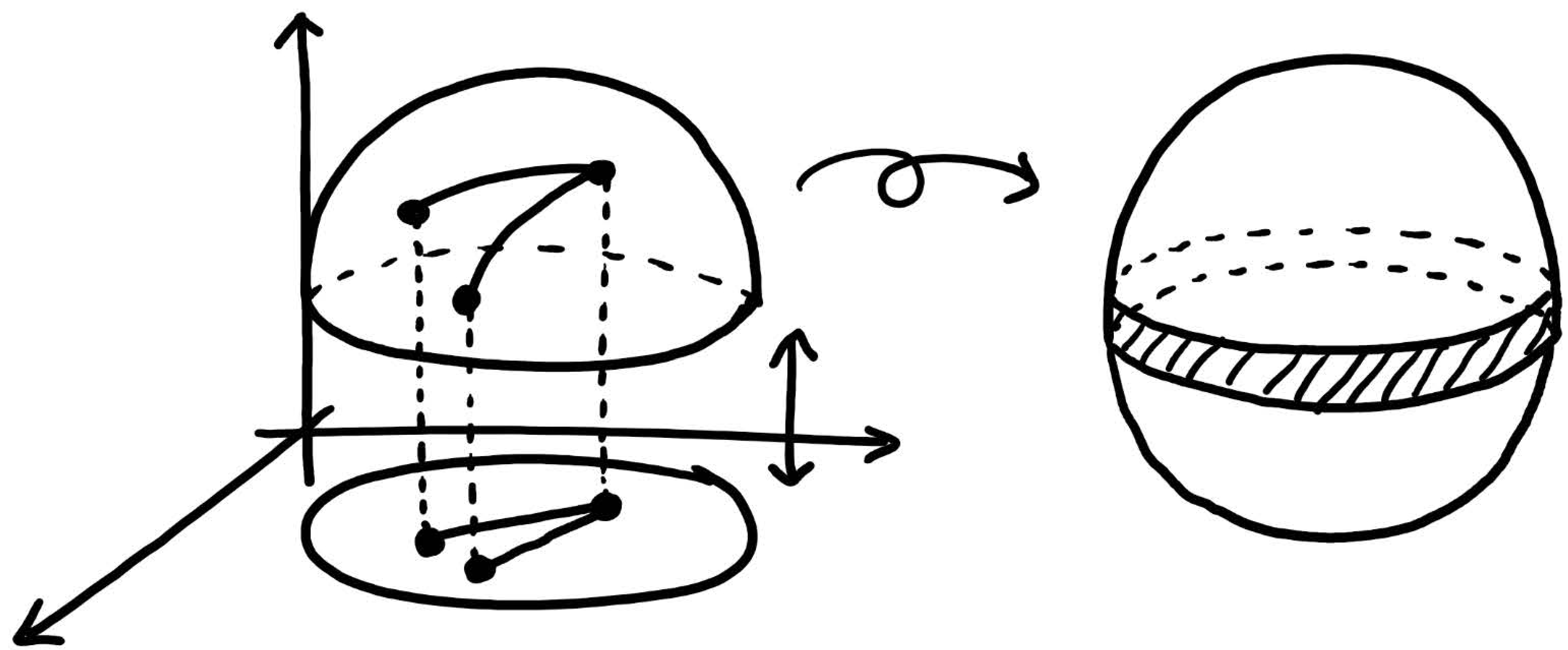
이런 변형까지 허용해서 비교하는 게 바로 위상동형사상이구요,



흔히 "도넛과 커피잔이 같다"라고 얘기하는 건 이 기준에서

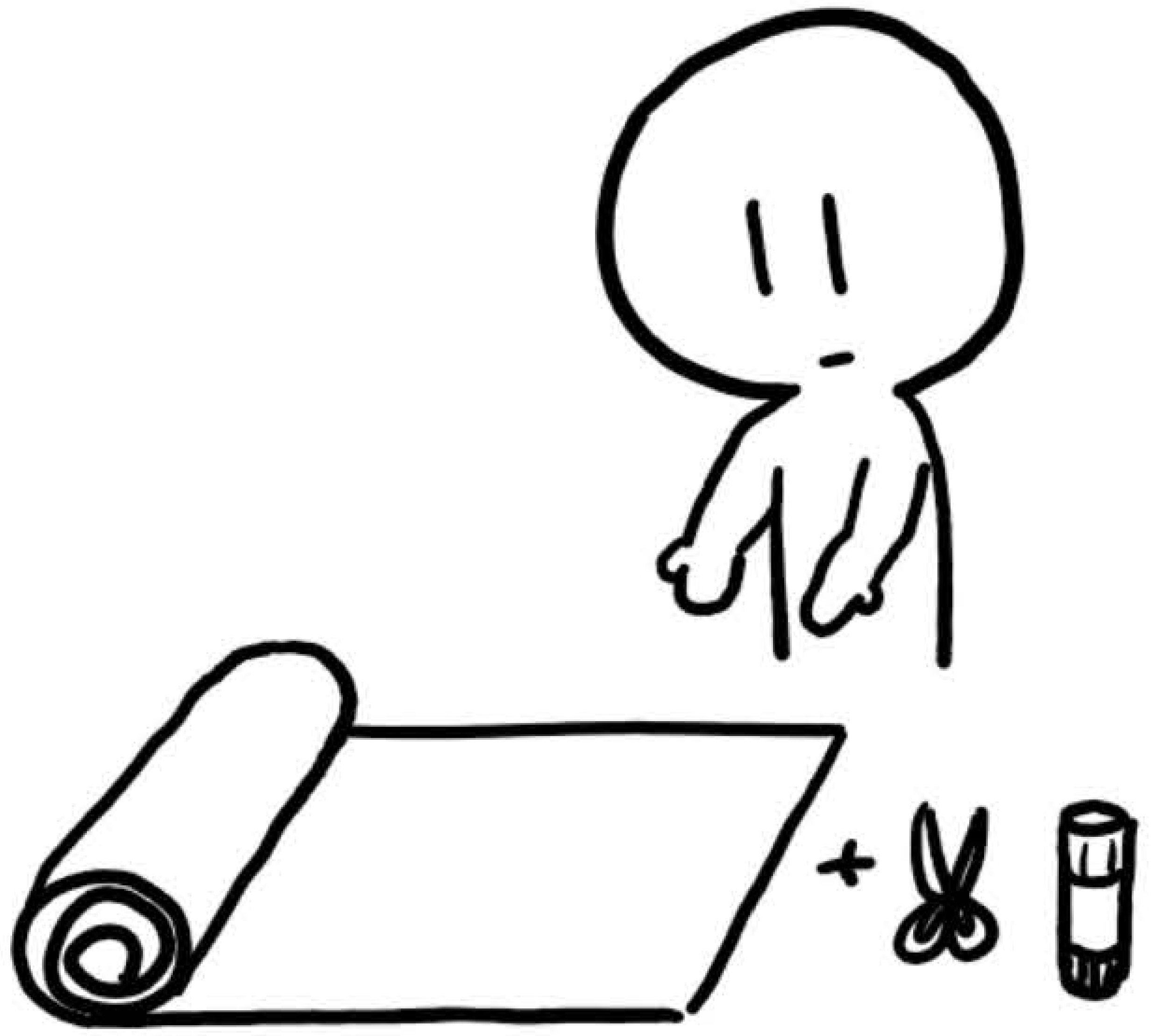
얘기하는 것입니다.

한 가지만 더 살펴 보겠습니다. 아까 얘기한 "찢어짐 없는 변형"의 예시로는, 아래 그림과 같이 반구와 원판 사이의 변환이 있습니다.

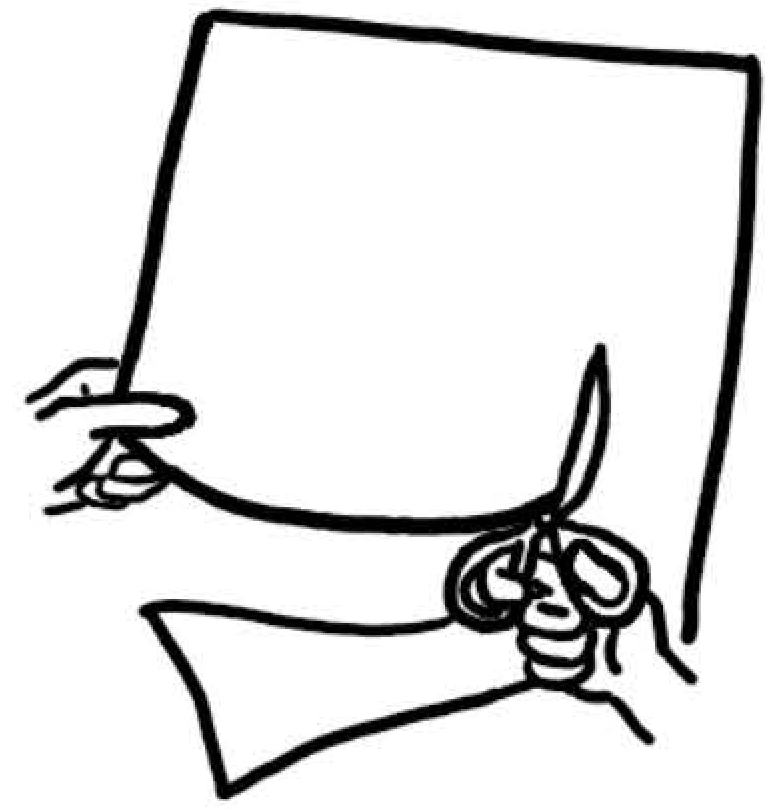


그 반구=원판을 두 개 이어붙이면 구면을 만들 수 있죠! (아까는 절대 안 될 것처럼 얘기하더니만... 그건 기준이 바뀌어서 그런 겁니다)

이건 정말 중요합니다. 앞으로 "2차원 물체"는 무조건 이렇게 만들 거거든요.



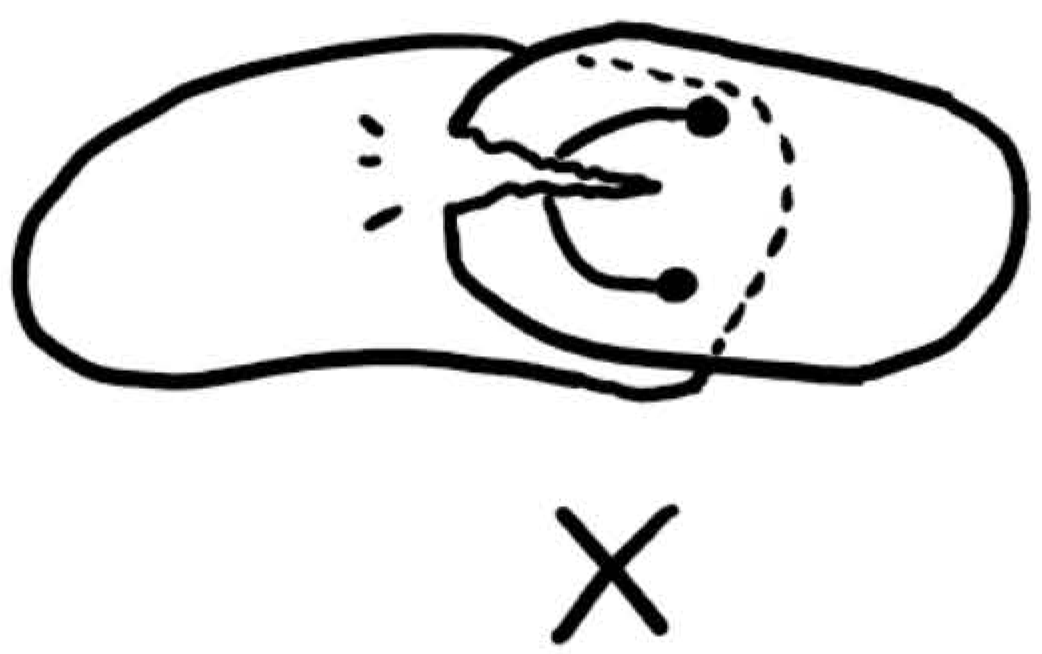
(물 먹인) 종이를 준비합니다.

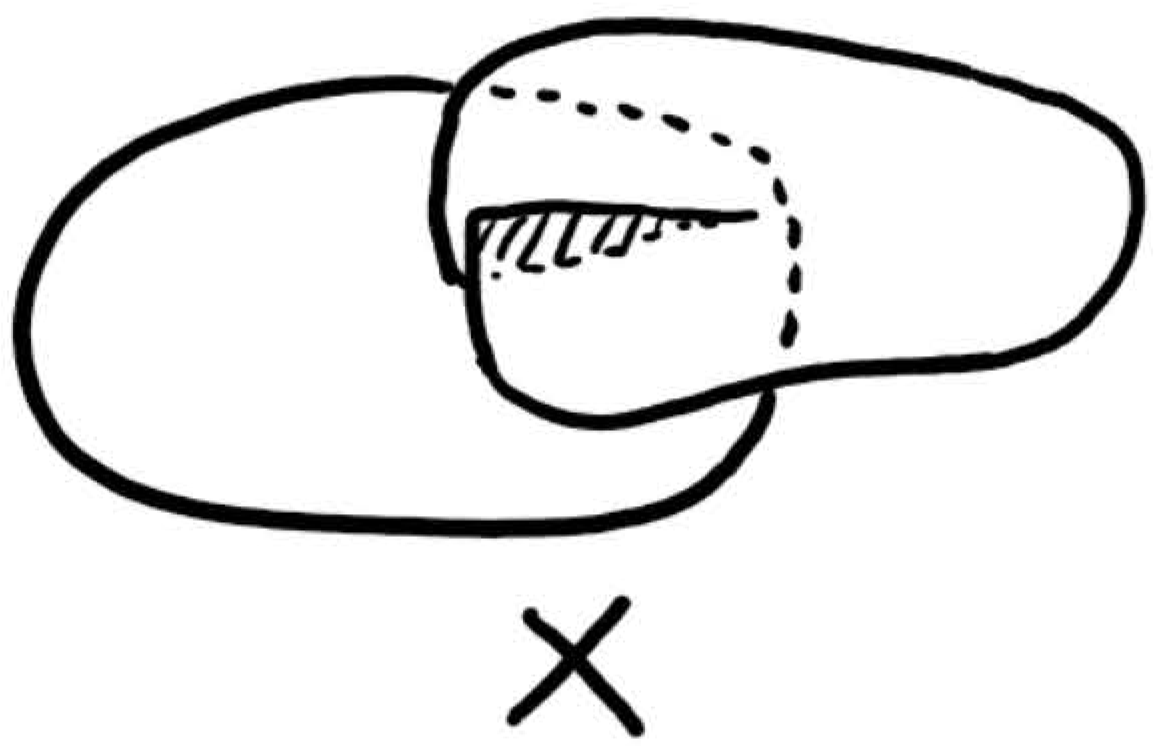


조각조각 자릅니다.

방금까지의 규칙대로

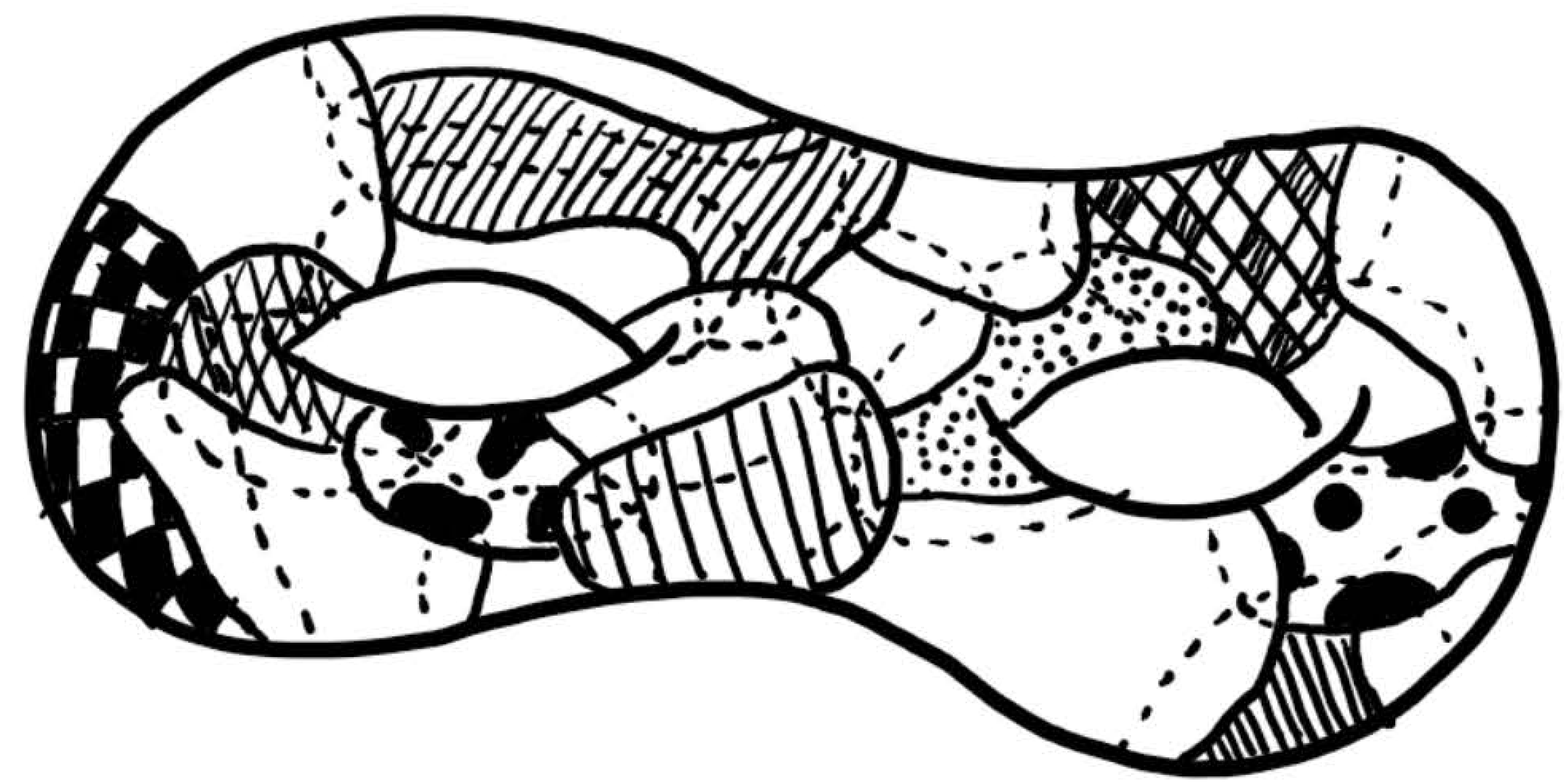
이어붙입니다. 그러니까,





찢어져도 안 되고, 겹치면 안 될 부분이 겹쳐도 안 됩니다.

그것만 지키면 늘리건 줄이건 상관없습니다.



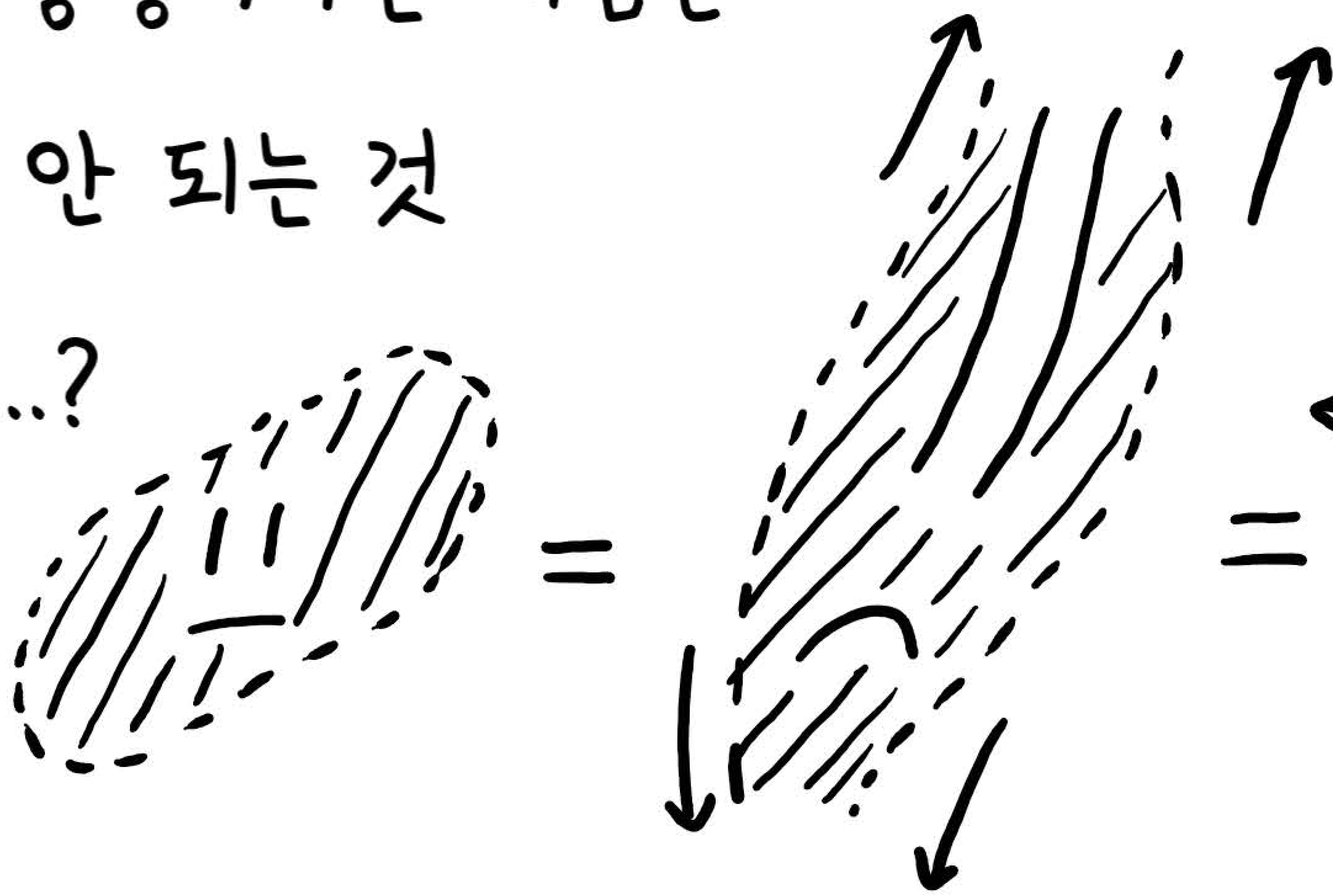
이렇게 이어 붙인 녀석을

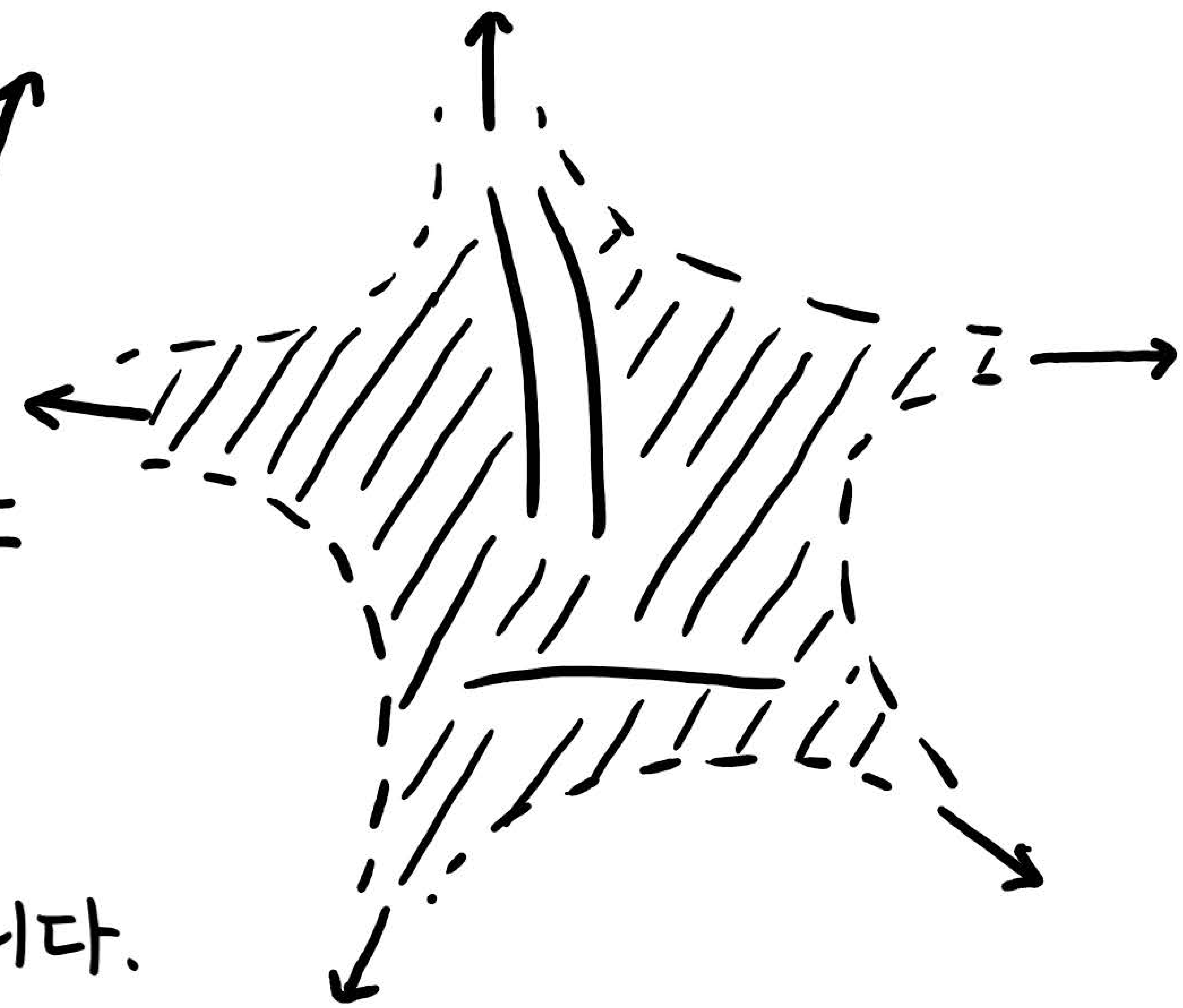
"곡면"이라고 부를 겁니다.

그런데, 위상동형이라는 개념은

너무 통제가 안 되는 것

같지 않나요...?





그렇게 대책이 없지는 않습니다.

어떤 값이 위상동형사상에 의한

불변량인지는 다음 시간에 같이

살펴보겠습니다.

<참고문헌>

Primary Source

- K. F. Gauss, Disquisitiones generals circa superficies curvas. Commentationes Societaties Regiae Scientiarum Gottingensis Recentoires, Commentationes Classis Mathematicae, Tom. VI. Gottingae, 1828, 99-146. (consulted the translated version by J. C. Morehead, A. M. Hiltebeitel: General Investigations of Curved Surfacees of 1827 and 1825, 2015, Leopold Classic Library.)
- G. F. B. Riemann, Grundlagen fúr eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. 1851, Werke, 2nd ed, 3-48.
- A. F. Möbius, Theorie der elementaren Verwandtschaft. Originally submitted to the Verhandlunger der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenshaften, math.-phys. Klasse, 1863. Version in Werke 2: 433-471.
- H. Poincaré, Analysis situs. 1985, J. École Poly, Vol. 2, Issue 1, 1-123.

Secondary Source

- E. Scholz, The Concept of Manifold, 1850-1950. (Chapter 2 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).
- K. S. Sarkaria, Poincaré's Papers on Topology, 1993.
- K. S. Sarkaria, The Topological Work of Henri Poincaré. (Chapter 6 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).
- J. Stillwell, Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements. 2010, AMS.
- J. Munkres, Topology (2nd ed). 2000, Pearson.
- M. A. Armstrong, Basic Topology. 1983, Springer.
- D. W. Kahn, Topology: An Introduction to the Point-Set and Algebraic Area. 1995, Dover Publications.
- M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces. 2016, Dover Publications.
- L. V. Ahlfors, L. Sario, Riemann Surfaces. 1960, Princeton University Press.