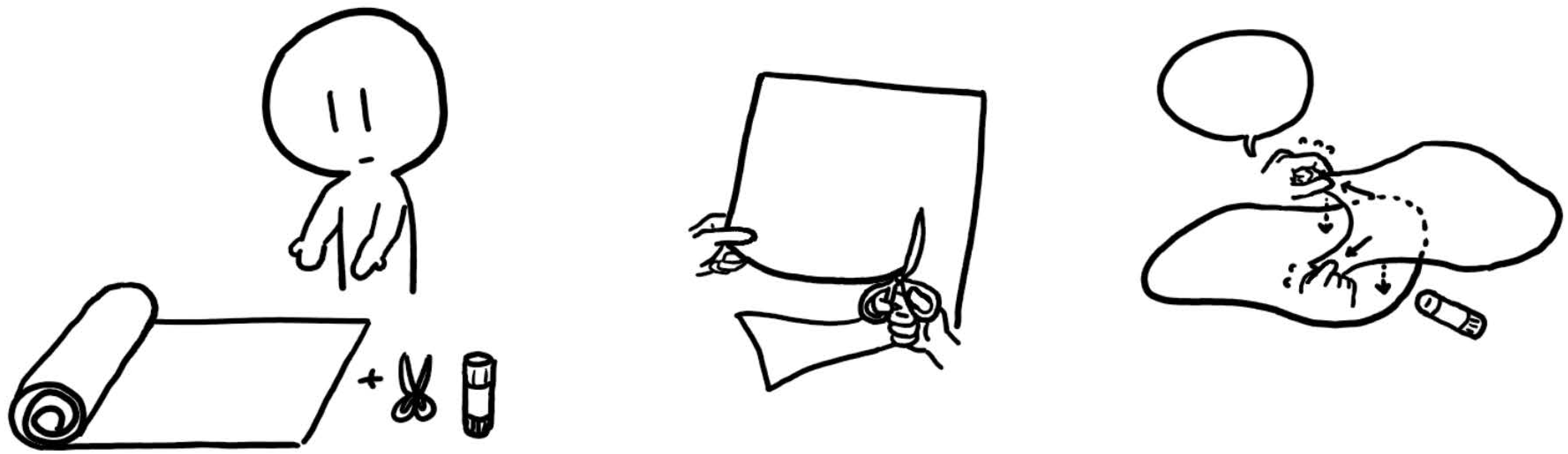
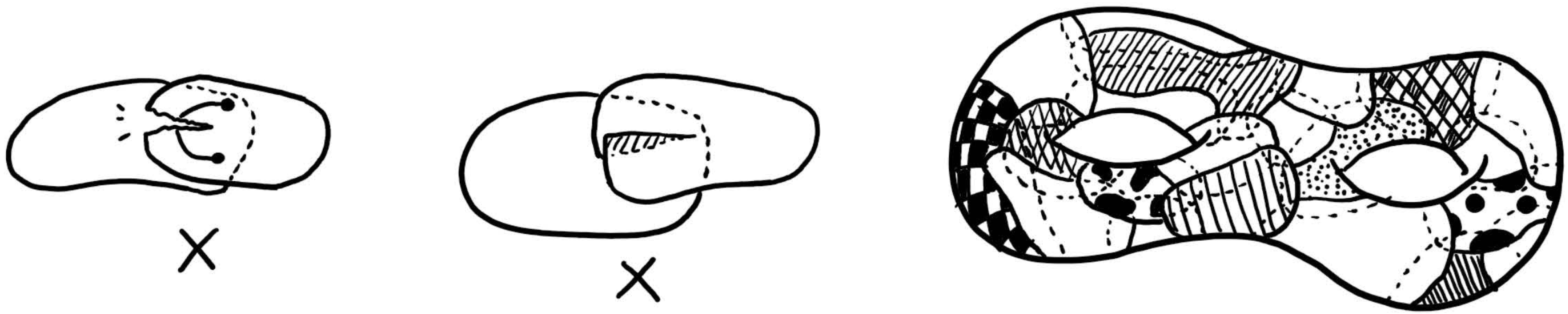
이것은 위상수학인가 아니면 기하학인가

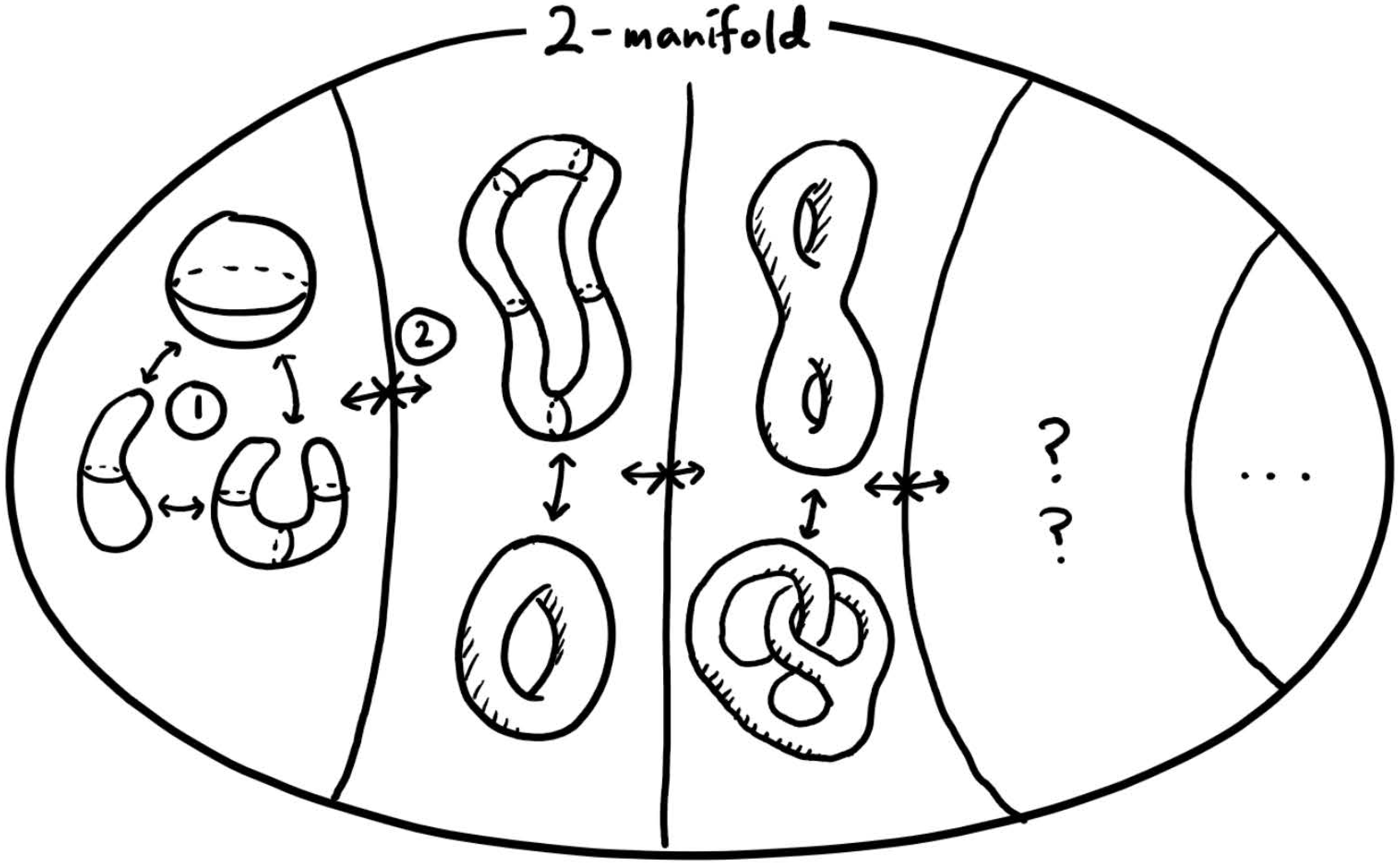
제2화: 자르고 붙이고 생각하고

지난 시간에 "2차원 무언가"를 만드는 방법을 얘기했죠.





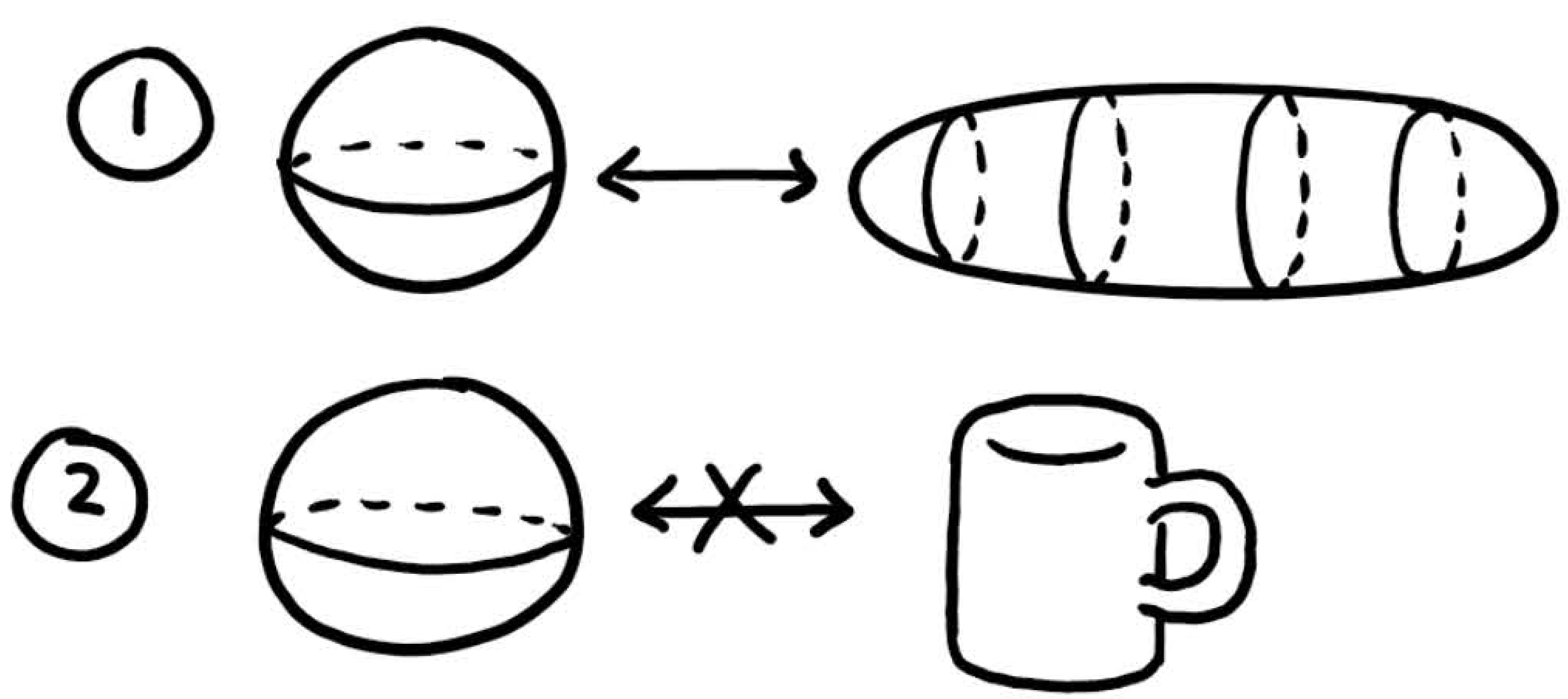
이번에는 그렇게 만들 수 있는 곡면에는 어떤 것들이 있는지 분류해 볼 거예요.



여기서 말하는 분류는

"물먹은 종이"

관점에서의 분류인데요,



어떤 것끼리는 서로 같고,

어떤 것끼리는 같게 볼 수

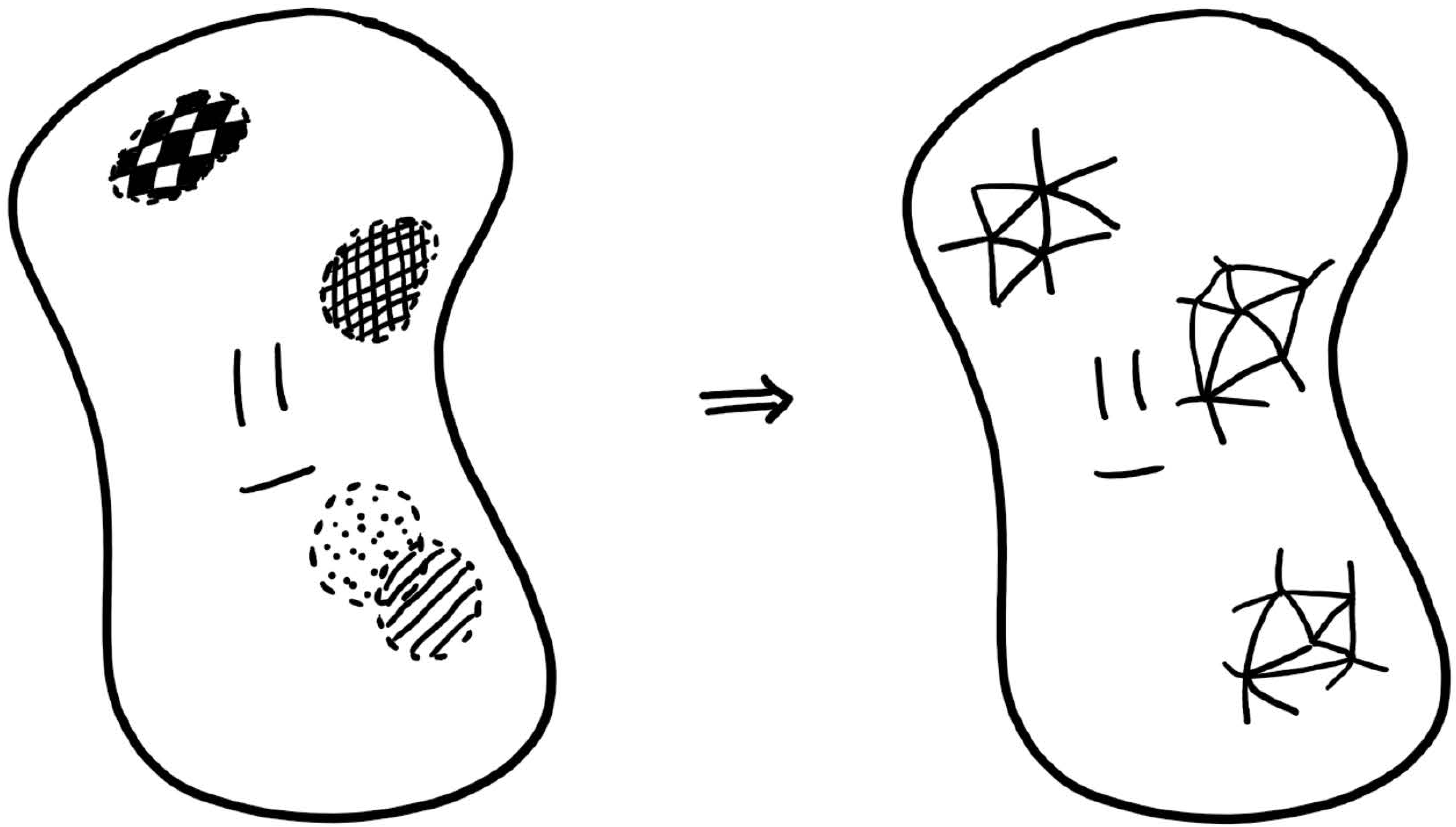
없는지를 얘기한다는 거죠.

일단 논의하기 편하도록, 컴팩트한 곡면만을 생각하기로 하겠습니다.

곡면이 컴팩트하단 건,

오른쪽과 같이, 빠져나갈 방법이 없도록 공간이 다 차 있는 상황이에요.

그럼 컴팩트함을 염두에 두고, 곡면을 어떻게 분석할지 생각해 봅시다.



첫 번째 단계는, 패치로 이루어진 곡면을 삼각형들로 쪼개는 일입니다.

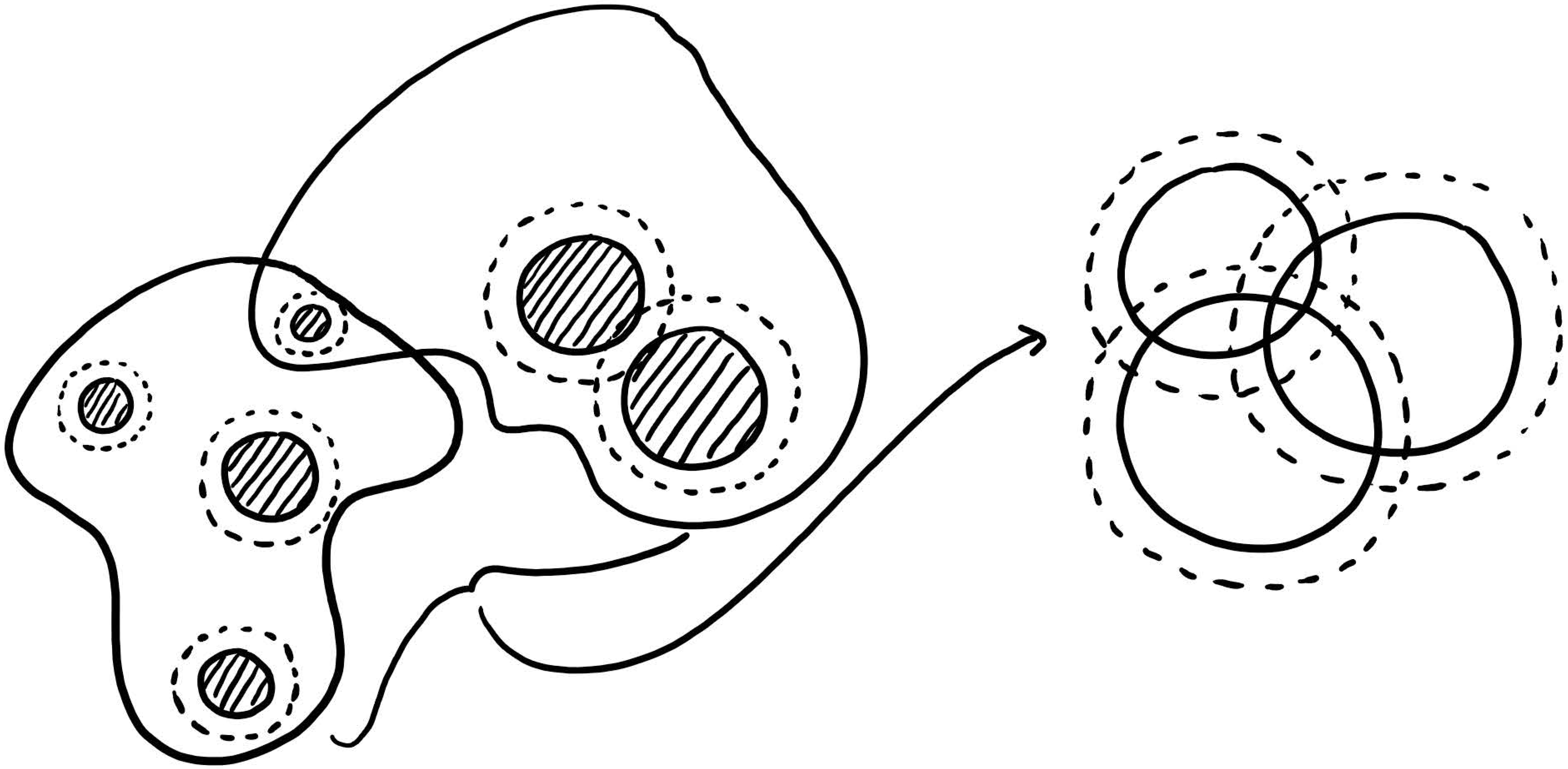
그러려면 패치들이 서로 예쁘기 붙어있는 게 좋은데,

꼭 그런 경우만 있는 건 아니죠.

패치 개수가 무한하거나, 혹은 유한하더라도 서로 복잡하게 교차하면

다루기 쉽지 않을 거예요.

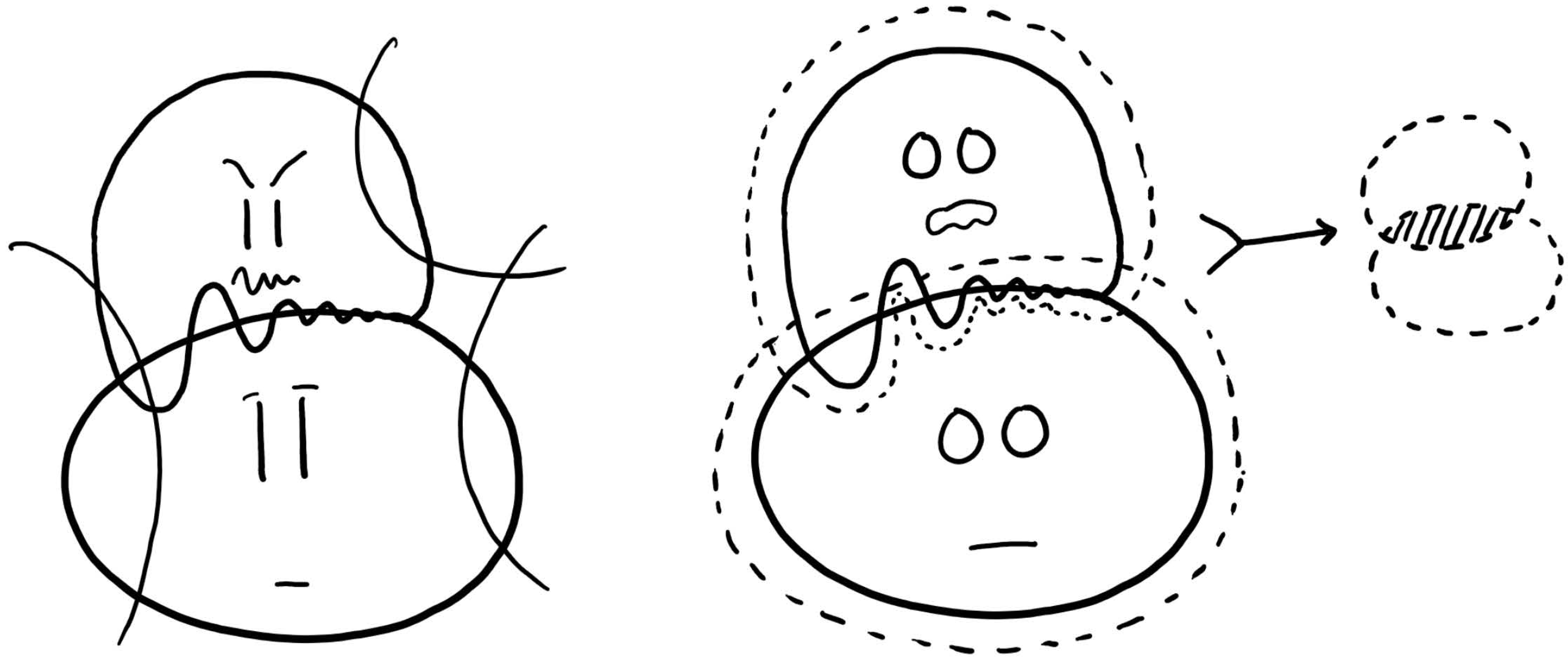
이런 일들을 방지하기 위해, 조금 특별한 패치들을 새로 잡을 거예요.



위와 같이 "여유 공간"이 있는 패치 유한 개만으로 곡면을 덮어버리는 거죠.

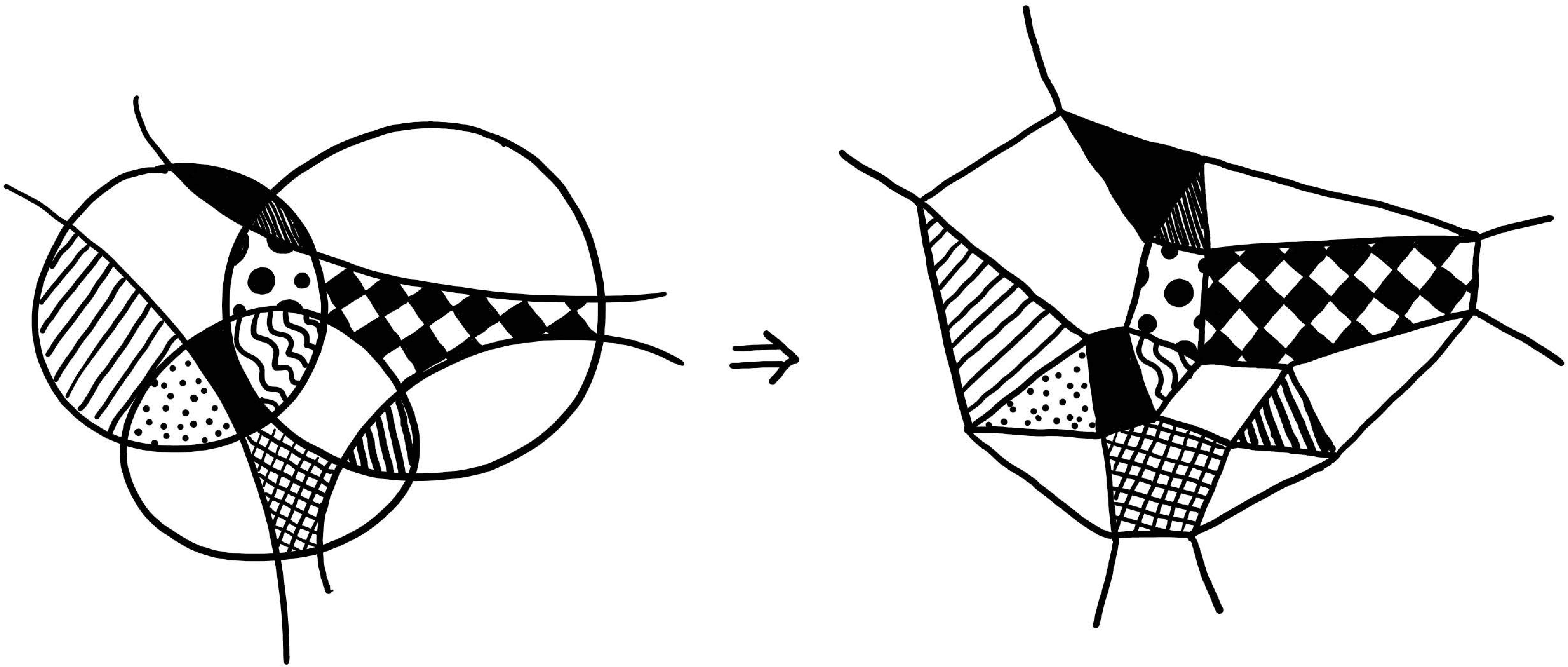
곡면이 컴팩트하면 이런 일이 가능합니다.

그러면 만약 두 패치가 복잡하게 교차하고 있어도,



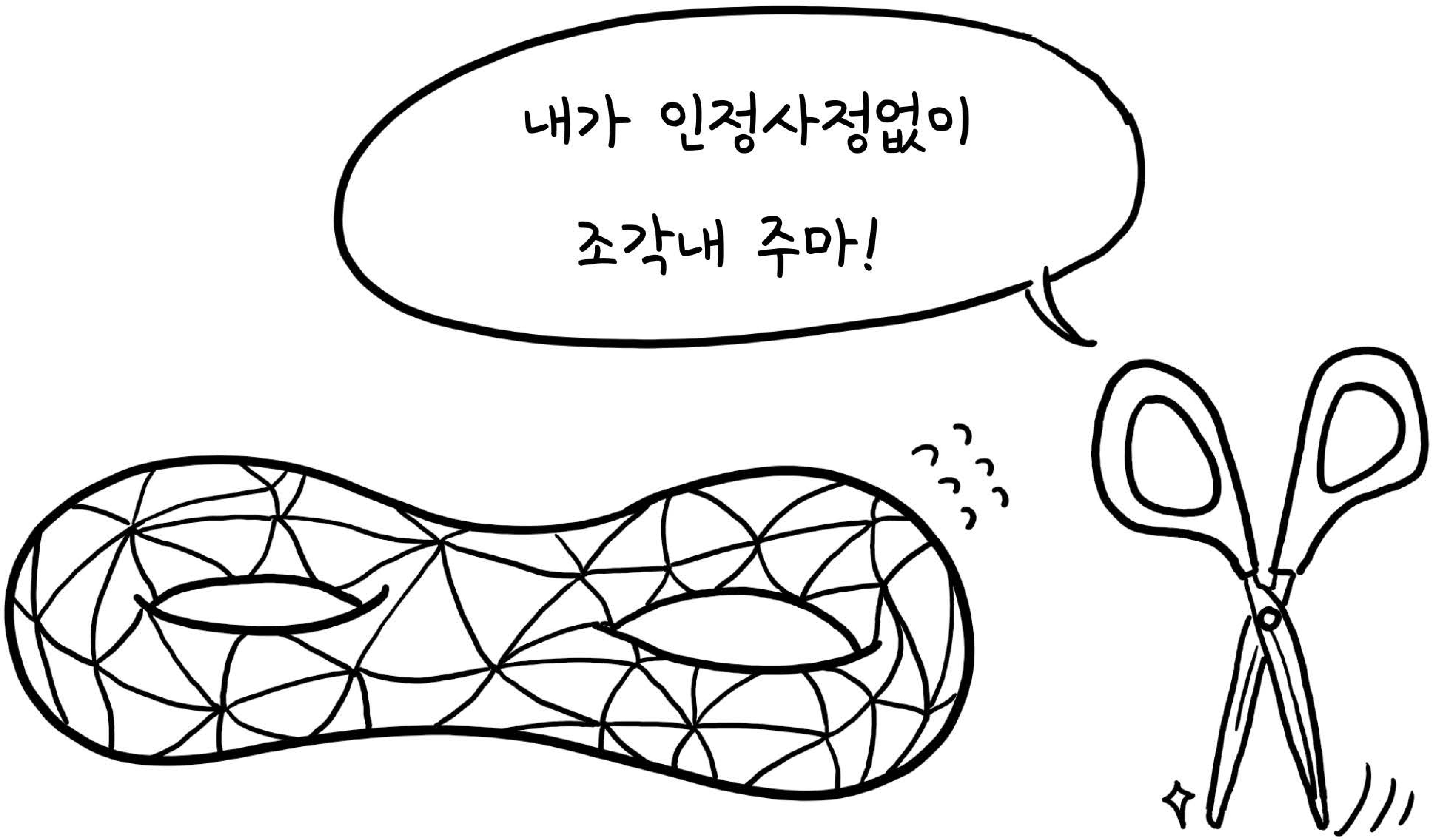
여유 공간을 활용하면 예쁘게 교차하는 패턴으로 바꿀 수 있어요.

그러면 패치들의 경계선이 곡면을 다각형으로 쪼개는 효과를 가지겠죠.



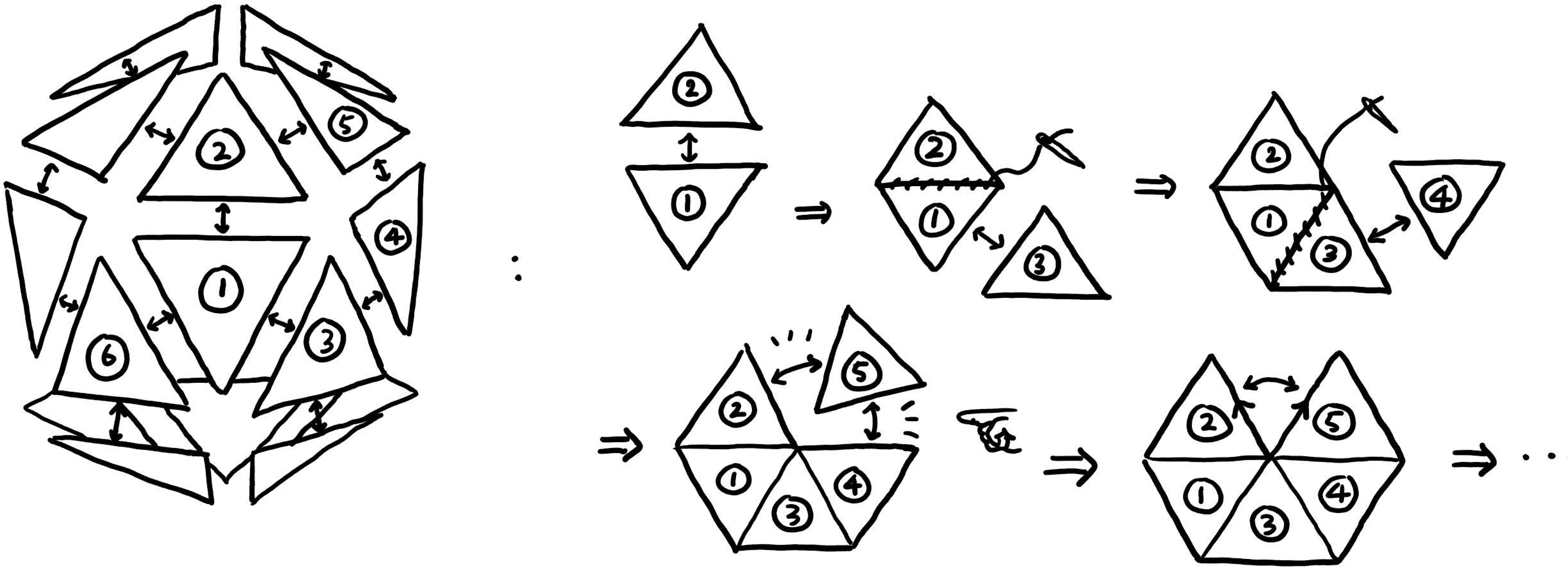
이걸 한번 더 쪼개면 삼각형으로 쪼갠 패턴도 찾을 수 있을 거구요.

좋아요. 그럼 곡면 = 삼각형들을 이어 붙인 거라고 하고, 그 다음엔 어떡하죠?



... 네, 이제 "자르고 이어 붙일" 공작 시간입니다.

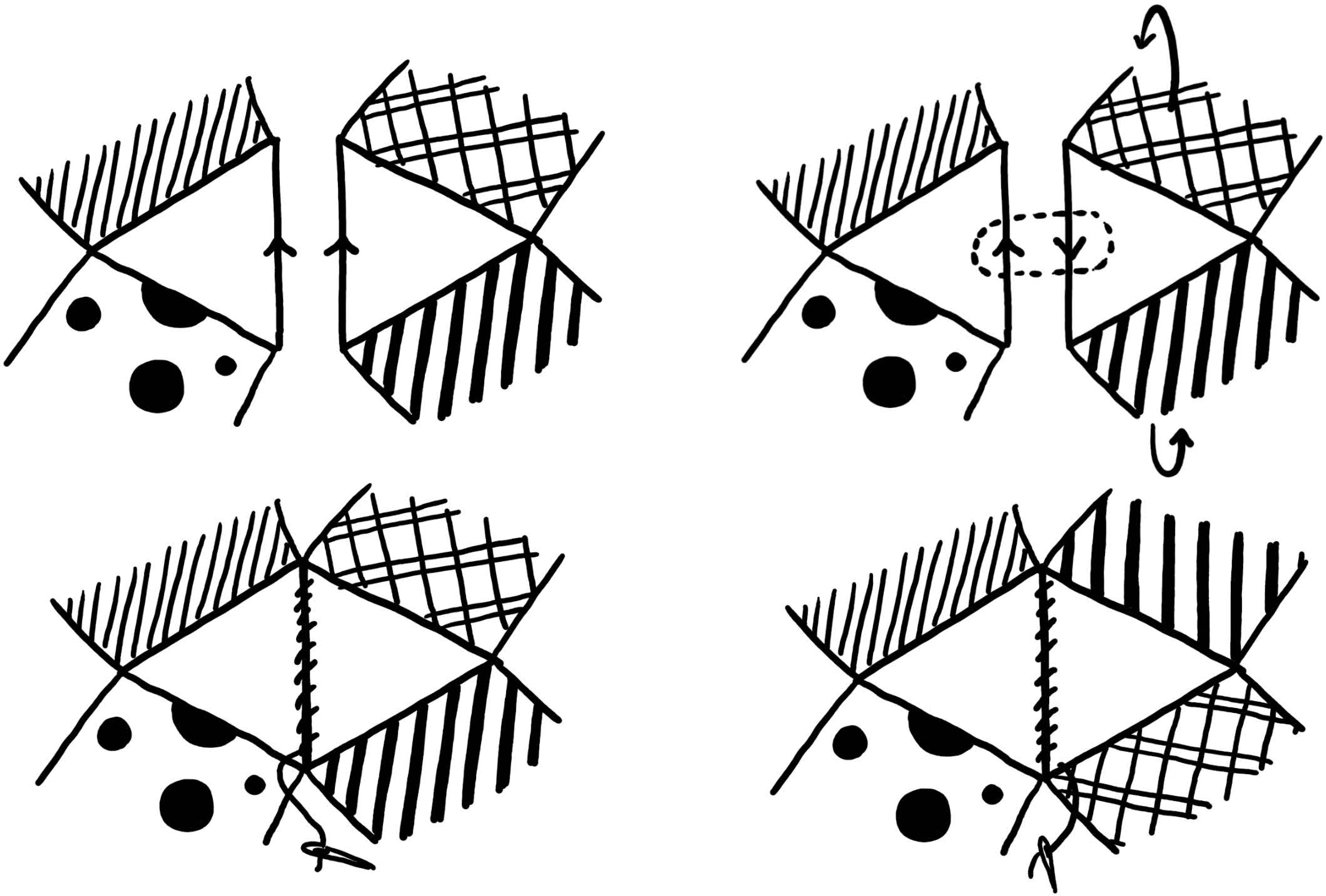
예로 정십이면체 곡면을 생각해 봅시다. 일단 삼각형들을 다 잘라 내고,



다시 이어 붙이되, "한 번에 한 타일, 한 변씩만" 이어 붙이기로 약속해요.

남은 변들끼리는 이렇게 붙여야 한다고 표시만 해주고요.

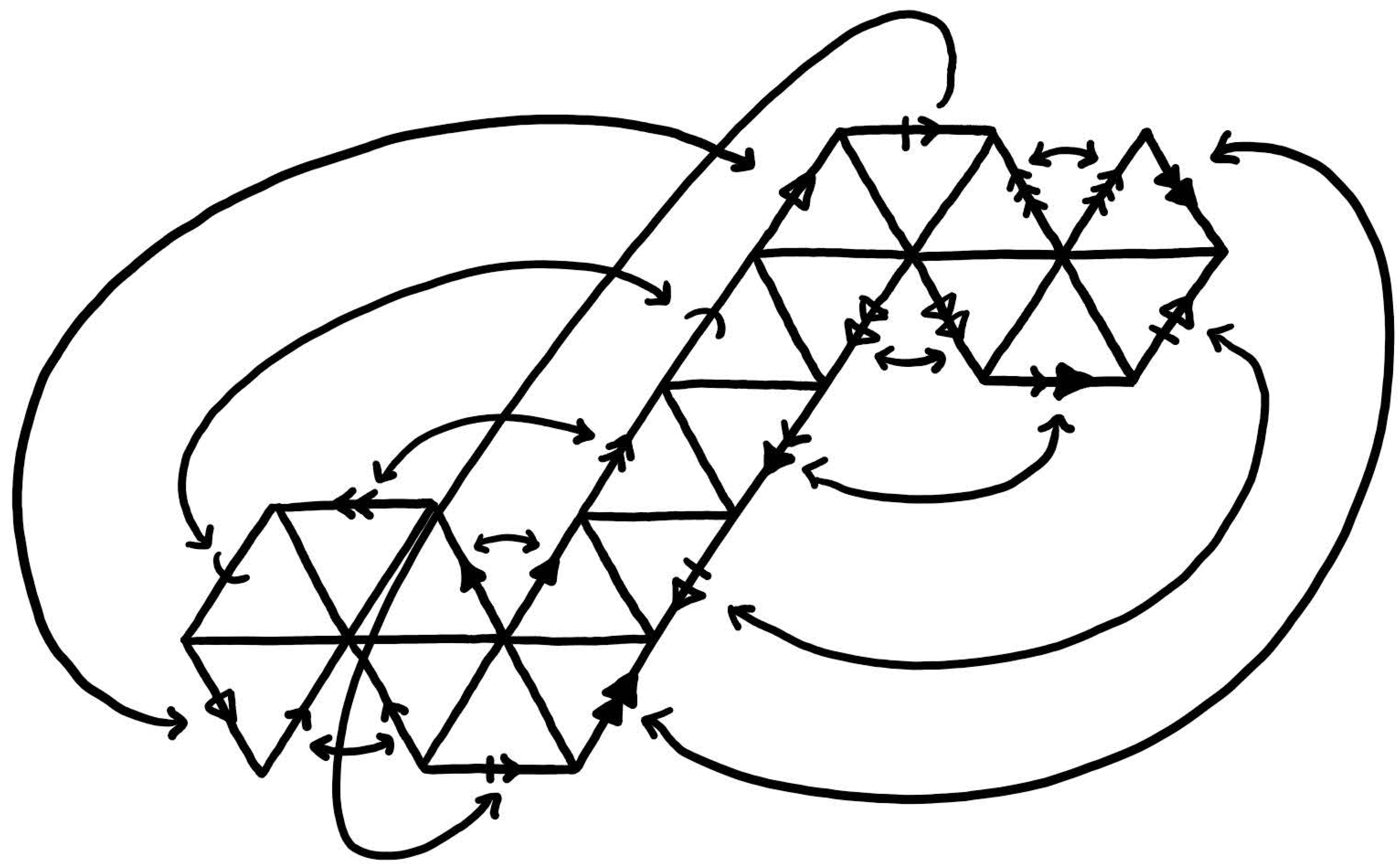
여기서 주의할 점! 모서리를 이어 붙일 때 선택지가 두 개 있으니,



화살표를 그려 넣어 방향을 표시해 주겠습니다.

이런 규칙을 따라 끝까지 진행하면,

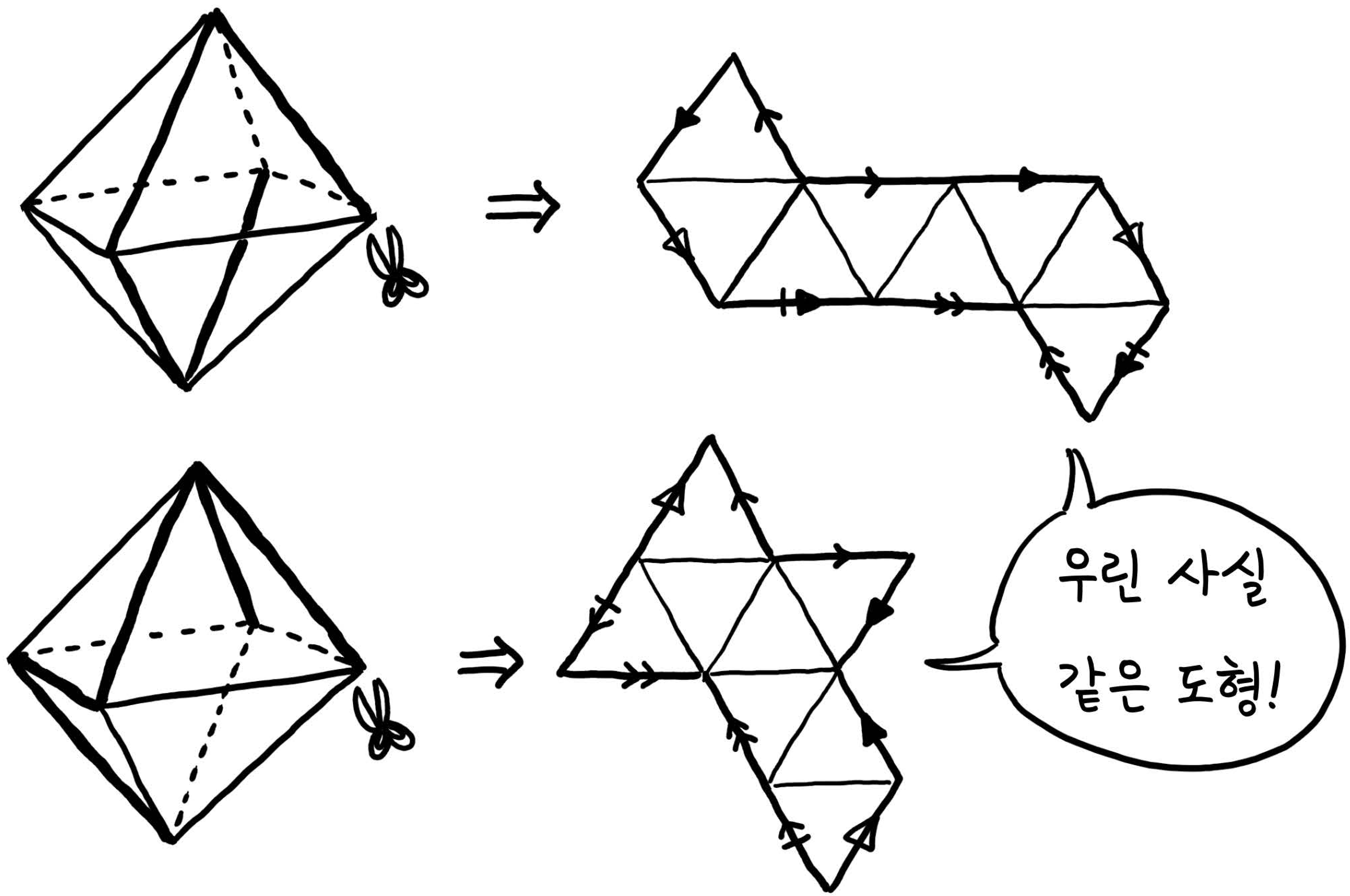
⇒ ⋯ ⇒



이렇게 "다각형 + 변을 이어 붙이는 패턴"이 나타납니다.

흔히들 전개도라고 부르는 그것 말이에요!

그런데, 같은 곡면에 대해서도 전개도는 여러 개일 수 있겠죠.

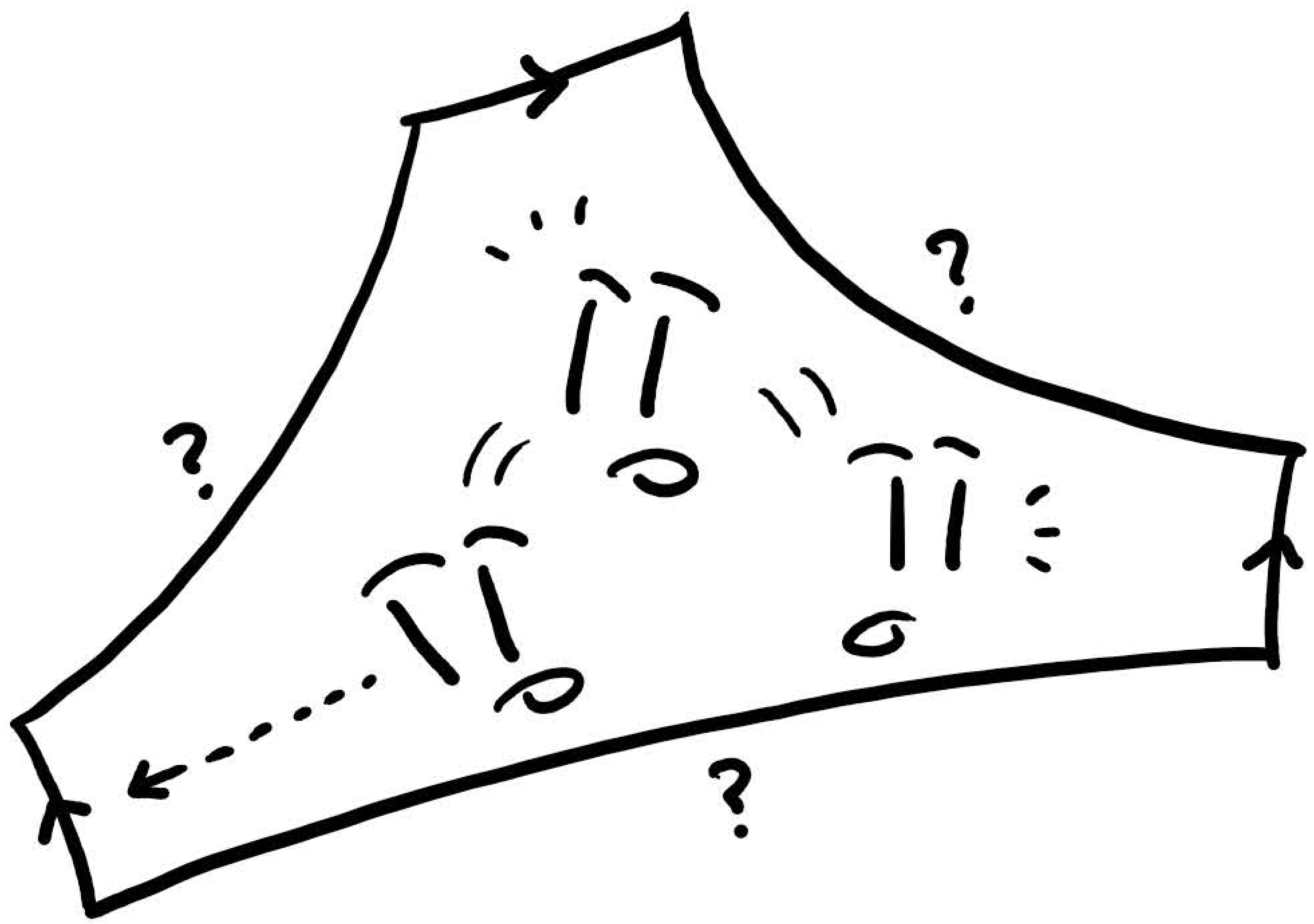


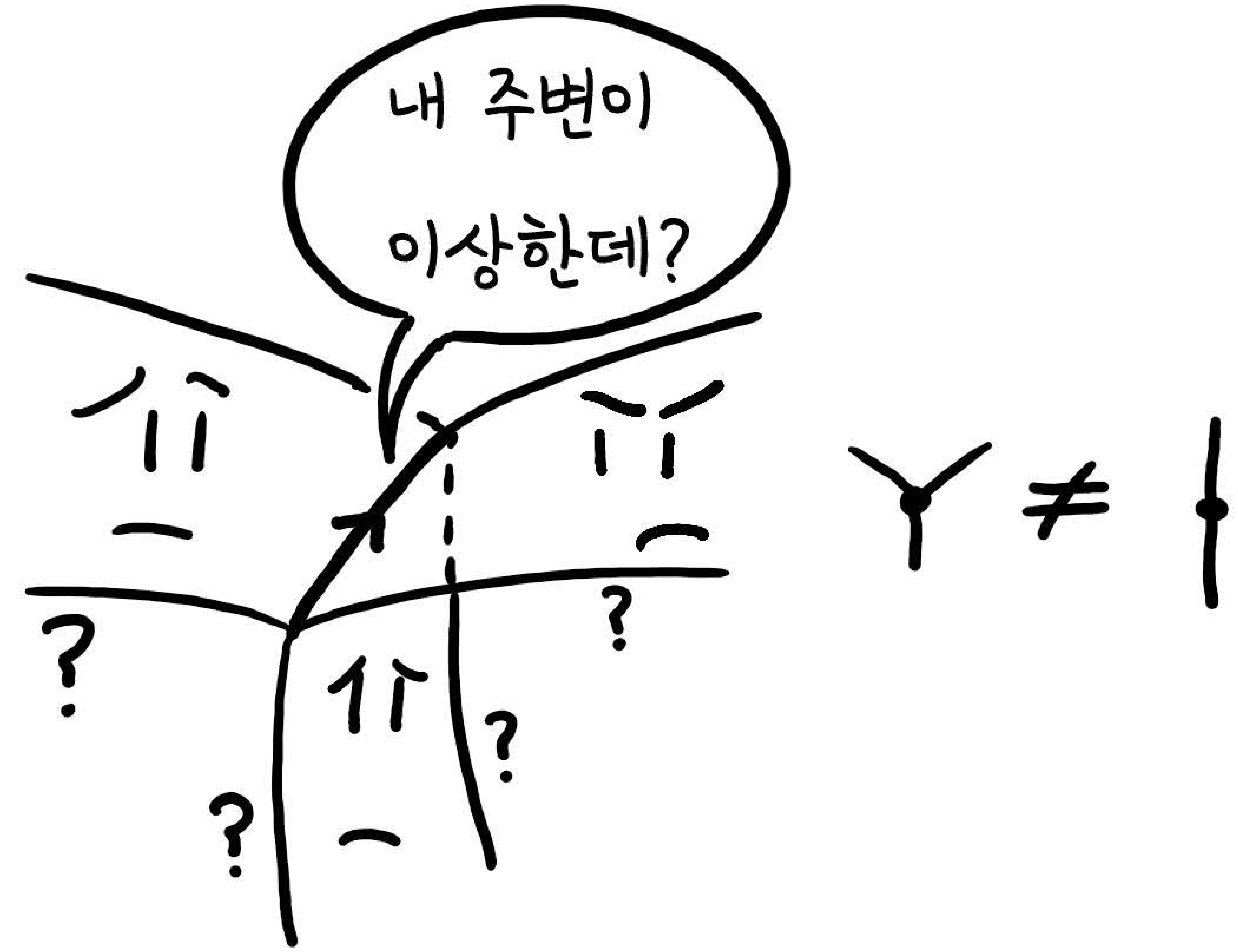
그래서, 어떤 전개도끼리 같은 도형을 나타내는지 알아보고자 해요.

일단, 어떤 다각형이 전개도 역할을 할 수 있는지부터 따져 봅시다.

① 만약 세 개 이상의 모서리에

같은 표시가 되어 있다면...

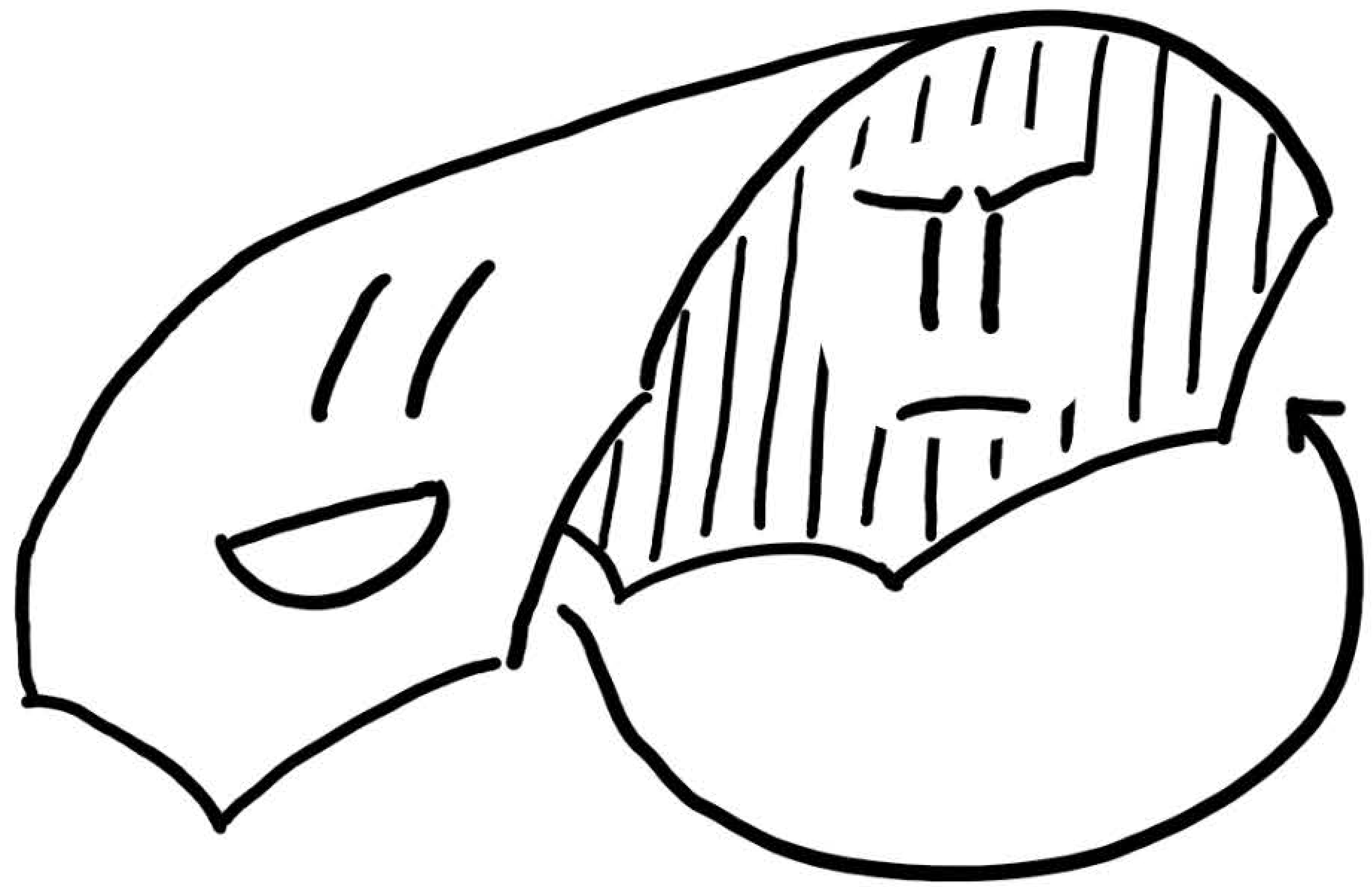




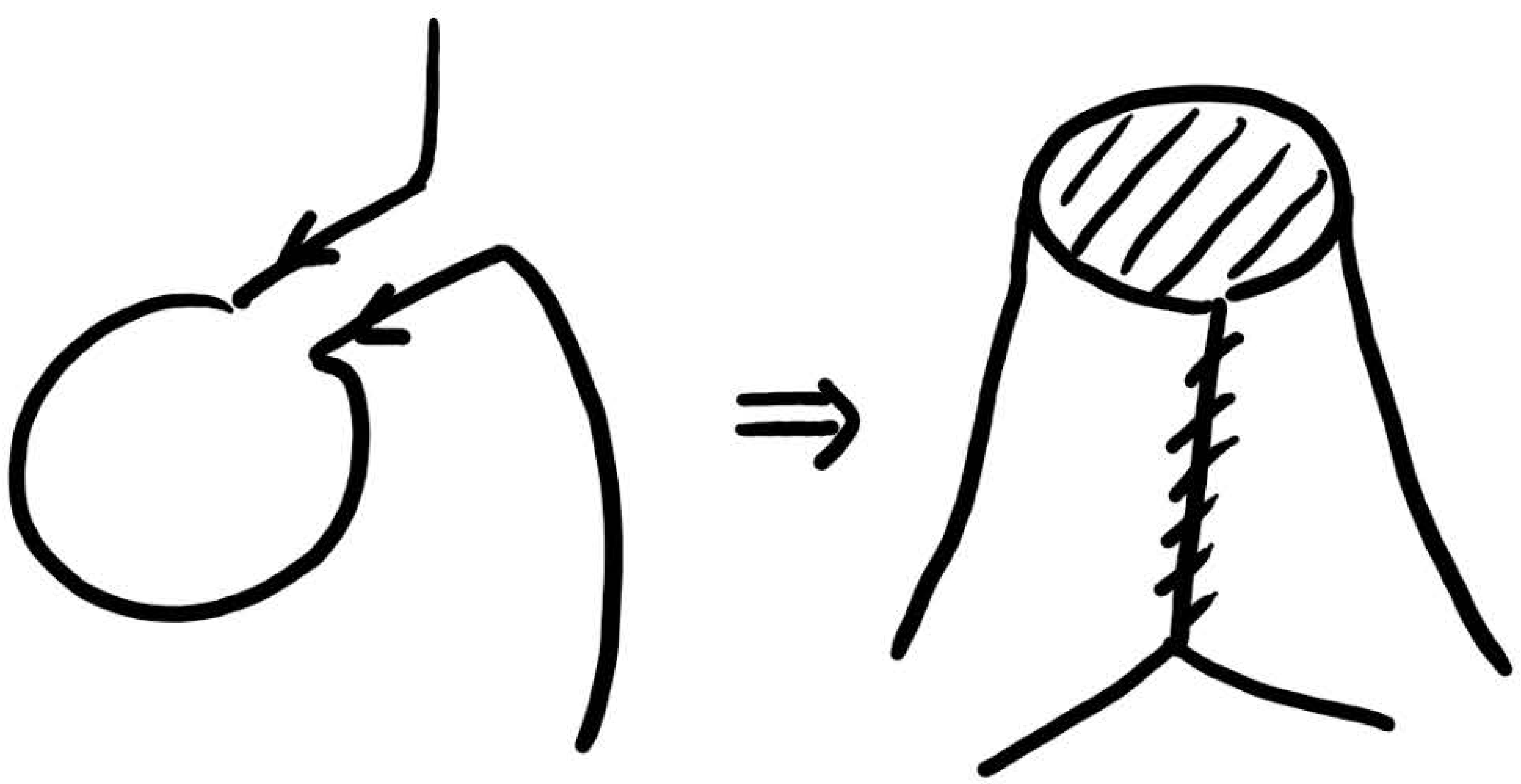
이어 붙였을 때 "로컬하게 2차원 모양"이라는 조건에 위배되겠죠.

그러니 한 표시는 꼭 두 모서리에만 되어 있어야 합니다.

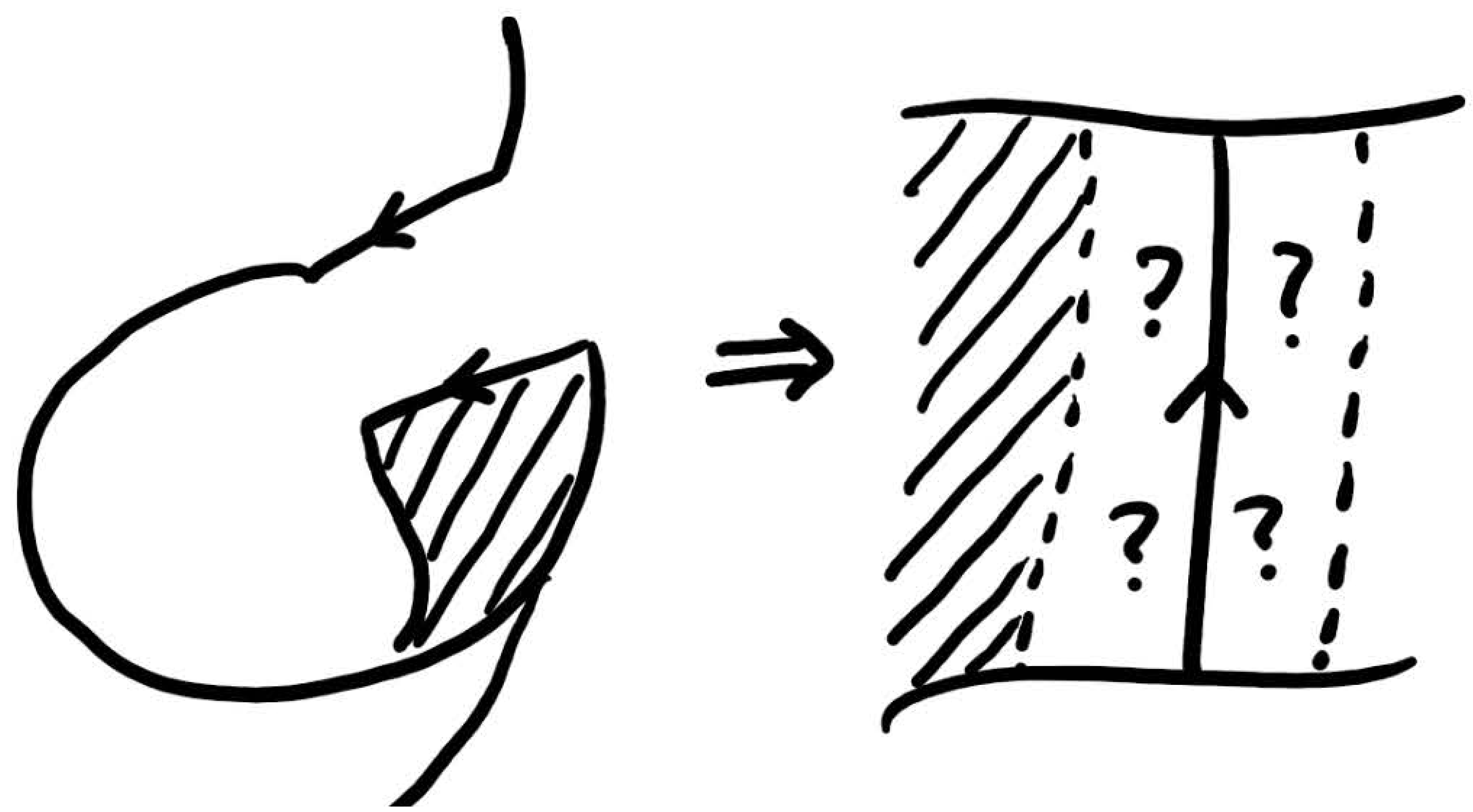
두번째 관찰은 다음과 같아요. 다각형에는 앞면/뒷면이 있을 거잖아요?



①



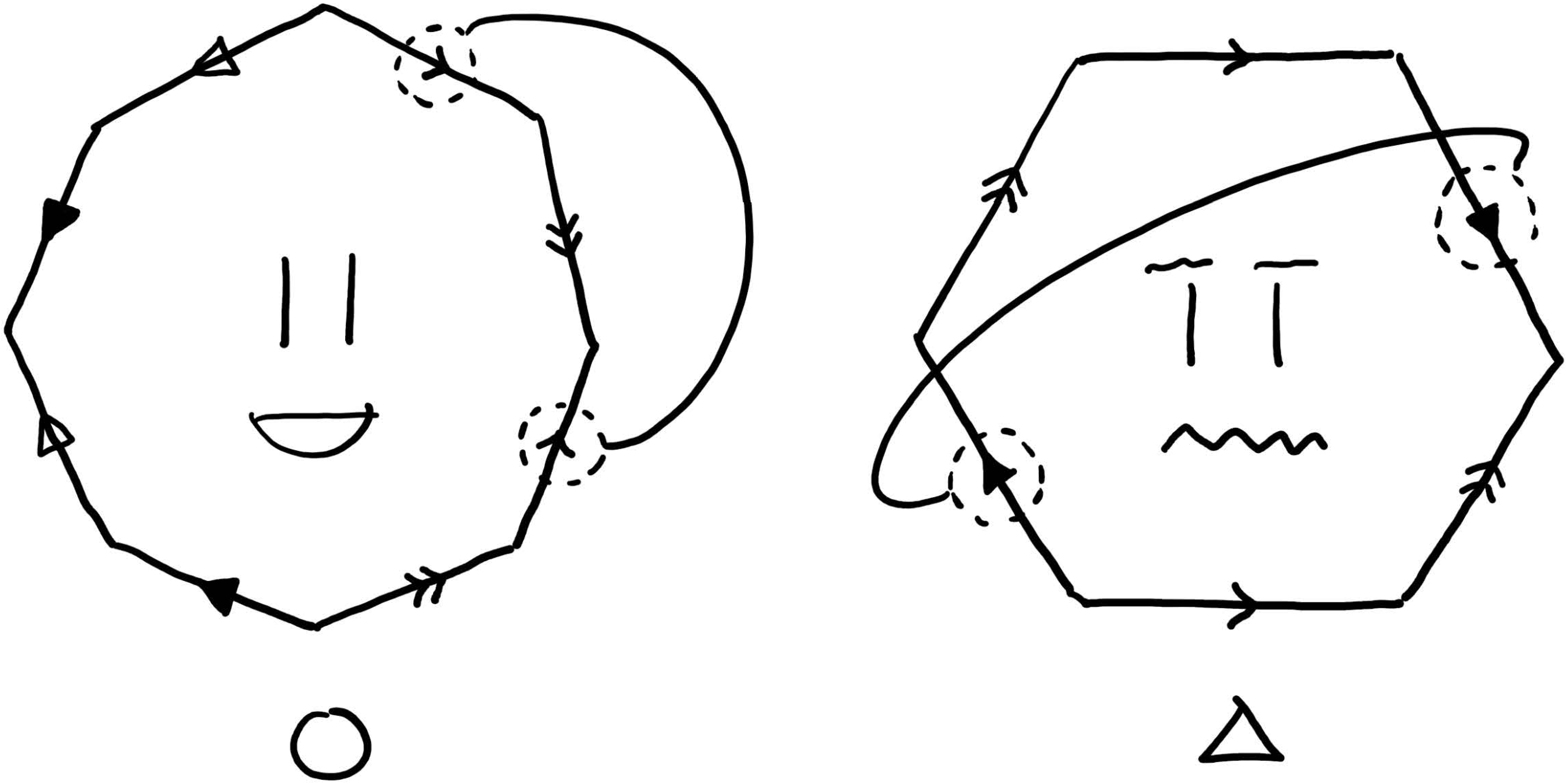
②



이렇게만 붙여지면 앞/뒷면에 혼동이 없겠지만,

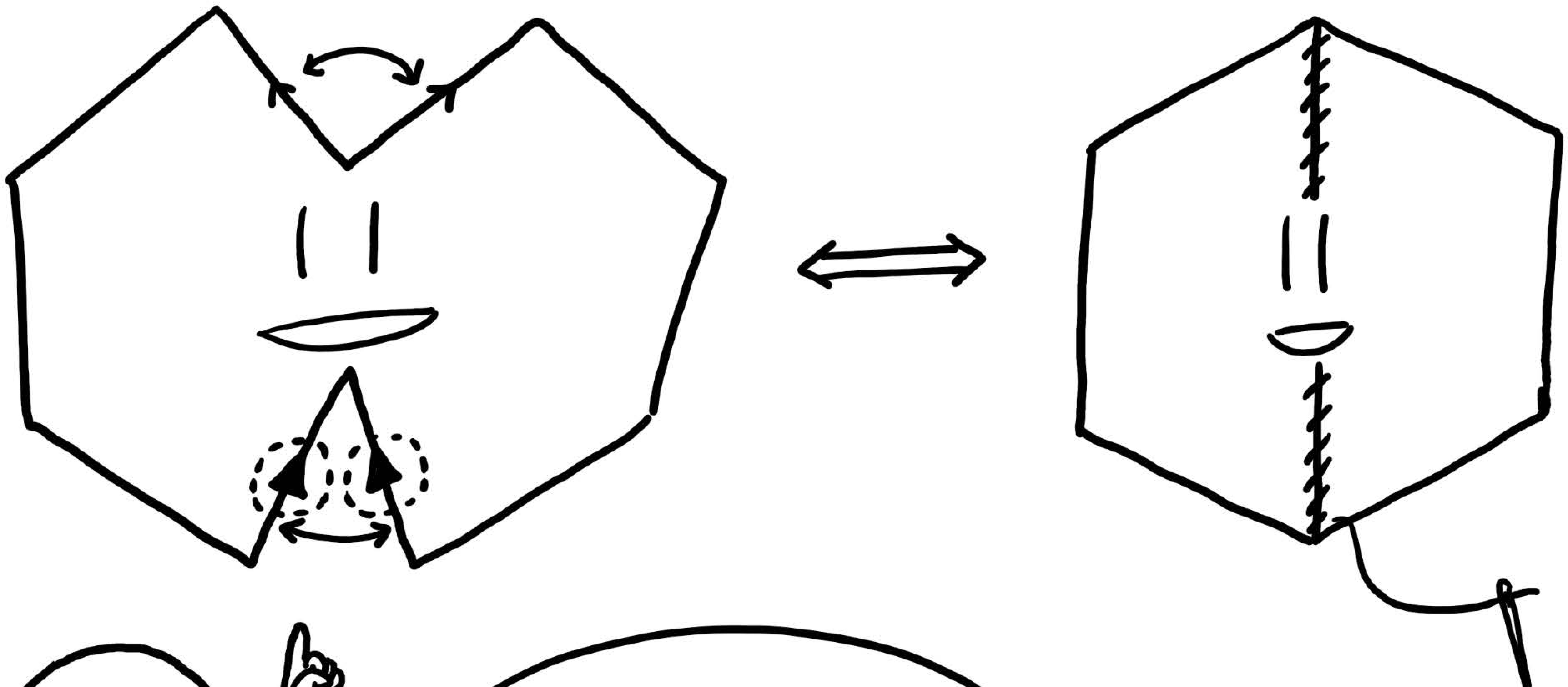
이런 패턴이 나타나면 앞/뒷면을 구분할 수 없겠죠.

이 두 관찰을 요약하자면, 아래와 같은 모양들이 고려 대상인데



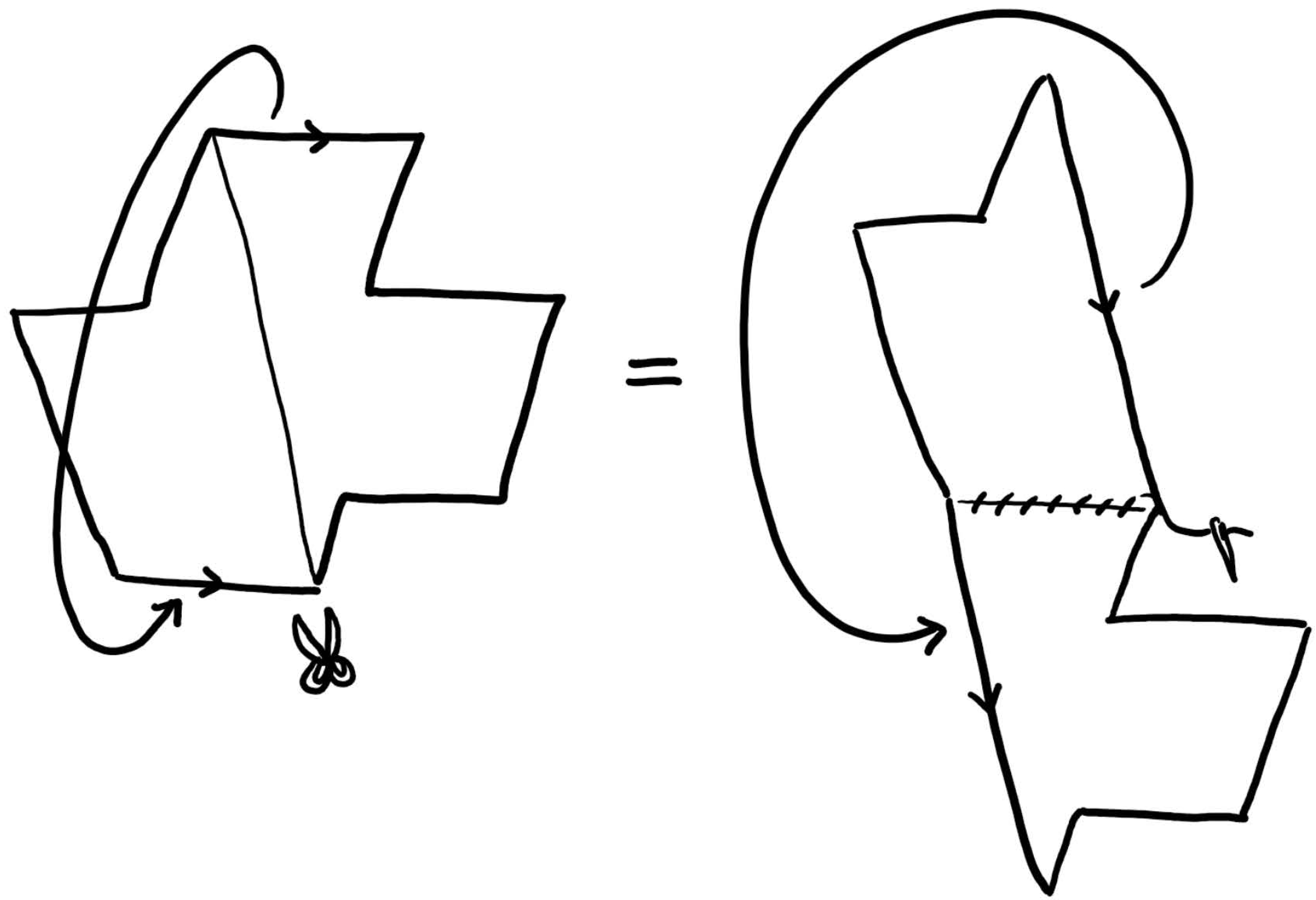
왼쪽 것은 앞/뒷면 구분이 되는 녀석이고 오른쪽 것은 안 되는 녀석이겠죠.

이제 허용되는 모양들을 더 단순한 모양들로 바꾸는 규칙을 살펴볼게요.



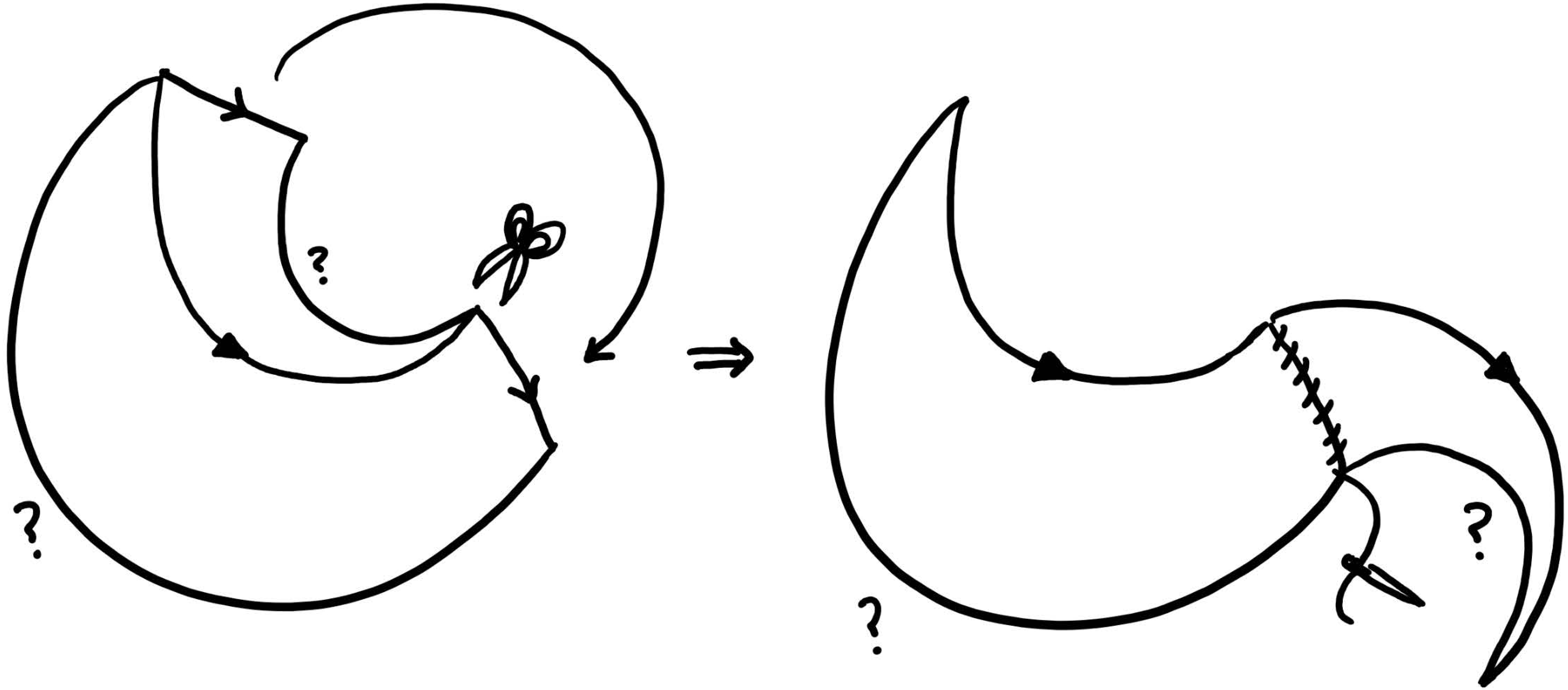
즉, 반대 방향의 같은 표시가 인접한 모서리에 나타나면 그 즉시 없애버릴 수 있어요.

그리고 아래와 같이 모서리를 이어 붙이거나 잘라내는 것도 가능해요.



이어 붙이는 패턴만 놓치지 않으면 계속 전개도 역할을 할 테니까요.

한번 연습삼아 아래와 같은 조작을 생각해 봅시다.

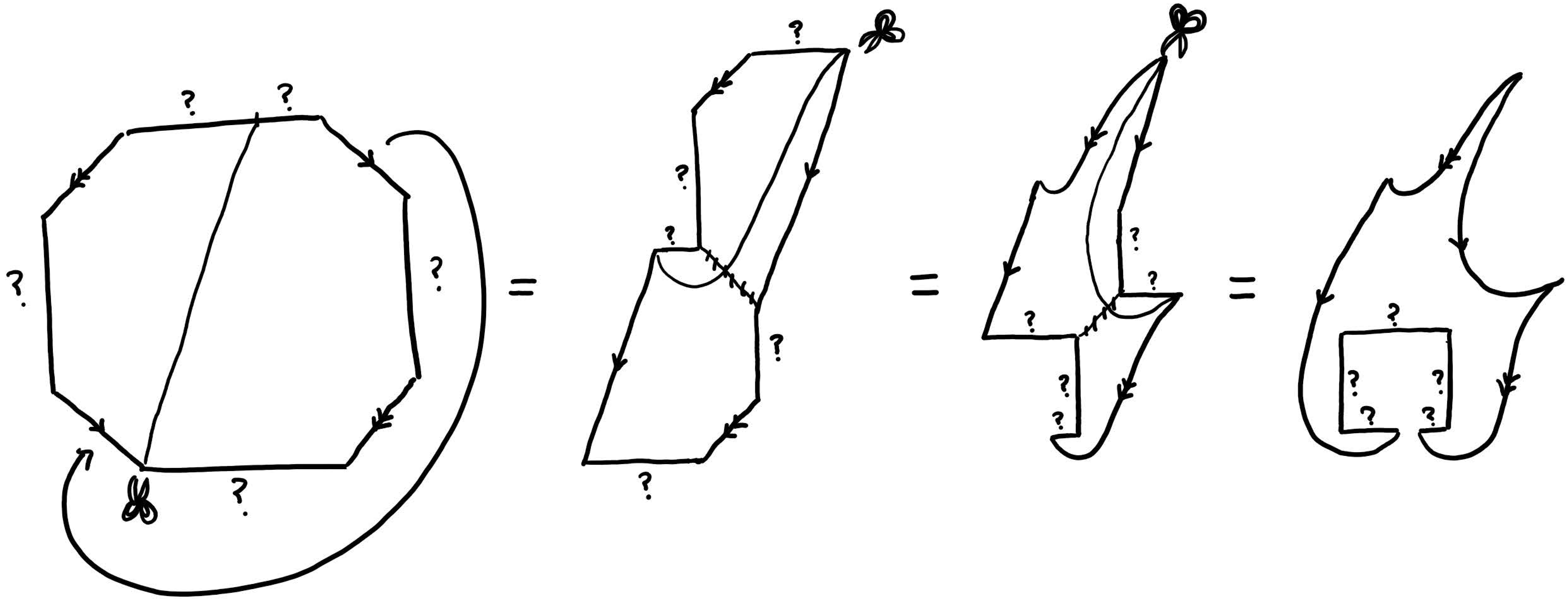


이렇게 하면, 떨어져 있고 같은 방향인 화살표는

붙어 있고 같은 방향인 화살표로 치환할 수 있겠죠.

아하, 그러면 같은 방향인 화살표들은 전부 쌍으로 묶어둘 수 있겠군요.

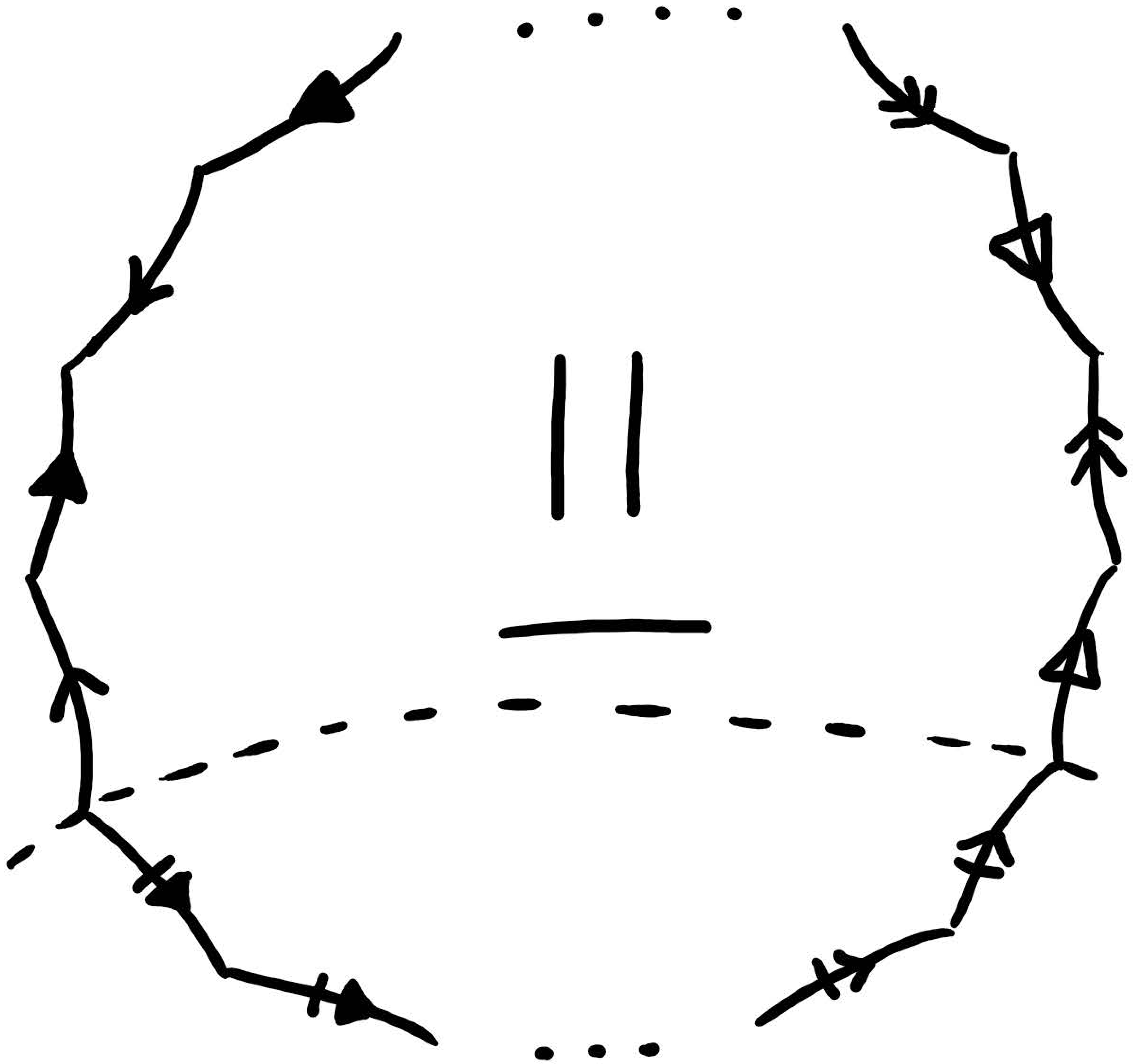
같은 방향이 아닌 화살표들은...



이렇게, 두 쌍이 서로 번갈아 나오게 묶어둘 수 있습니다.

이런 작업을 계속 반복하면,

아래와 같은 형태로 무조건 바꿀 수 있겠군요.



위쪽에는 서로

반대 방향인

화살표 두 쌍이

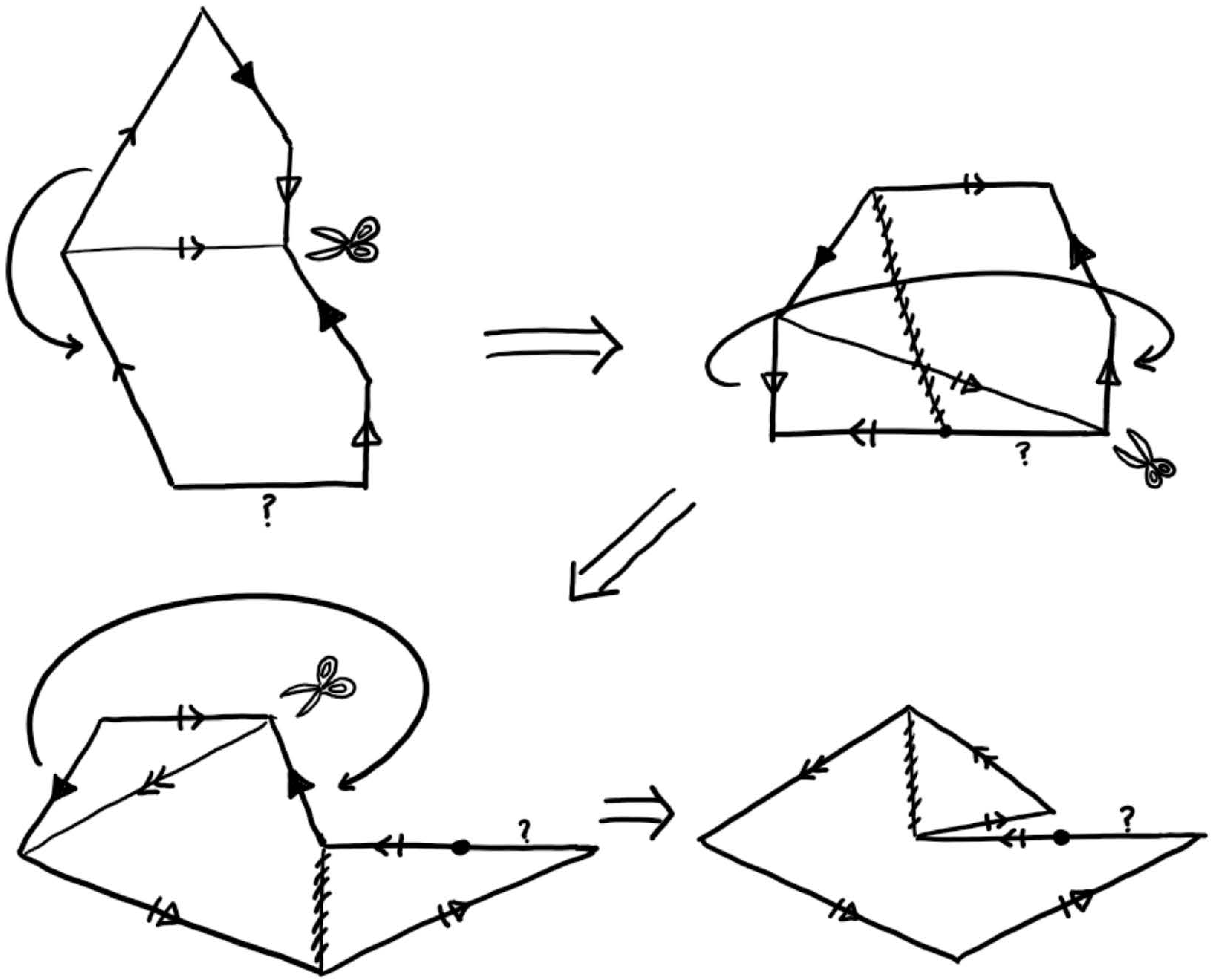
번갈아 나오고,

아래쪽에는 같은 방향인

화살표가 연달아 나오는

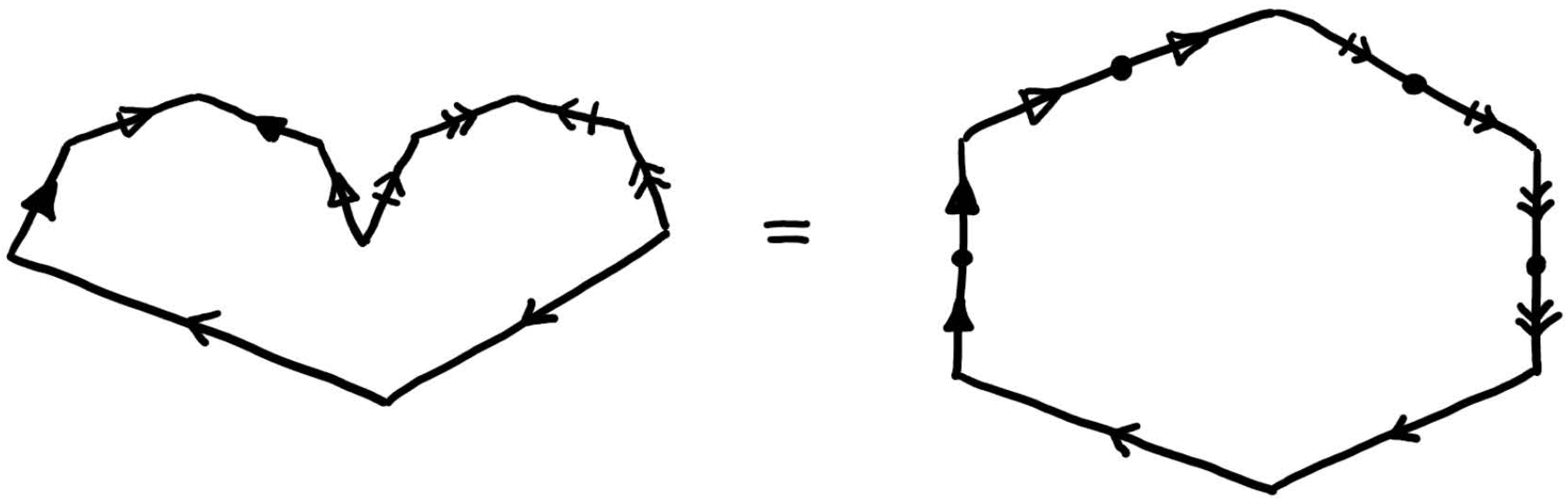
형태 말이에요.

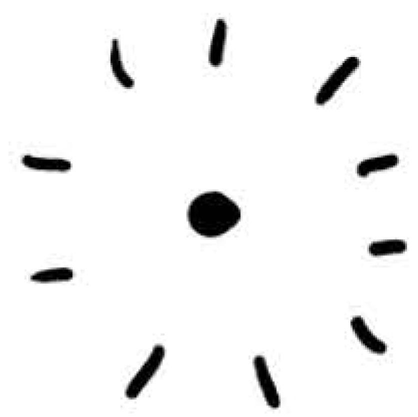
그런데 사실 아래쪽 모서리 쌍이 하나라도 있으면...

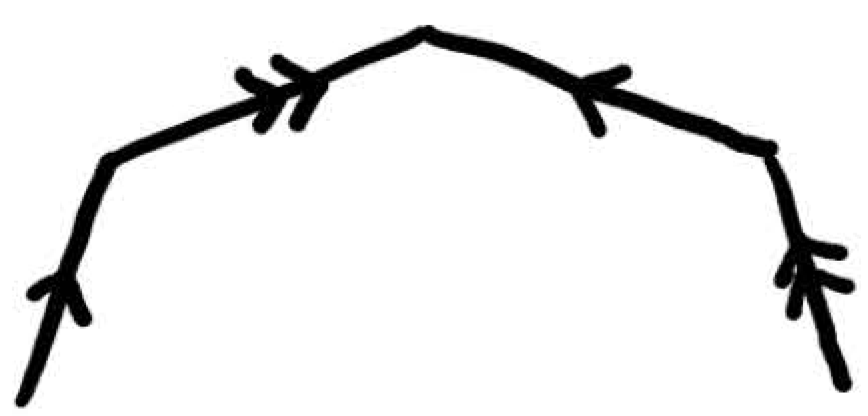


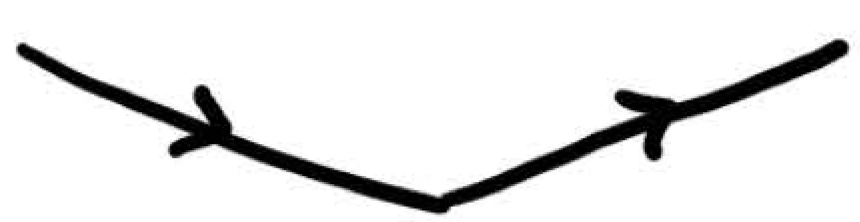
이렇게, 위쪽 쌍들에도 전염시킬 수가 있습니다.

위쪽/아래쪽이 둘 다 차 있는 경우는 제외할 수 있고,



① 

②  × n

③  × n

모서리가

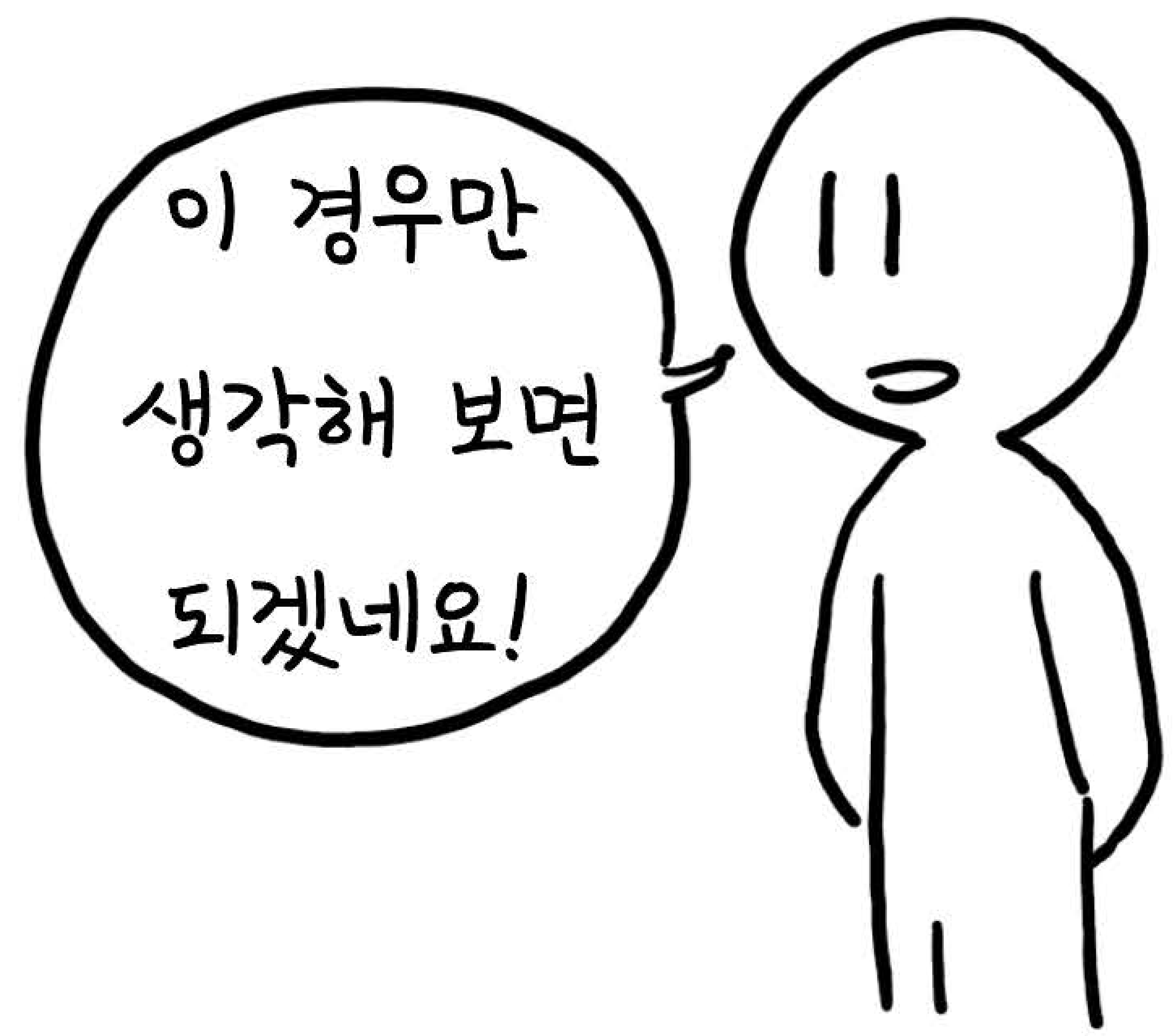
아예 없거나,

이런 위쪽 패턴만

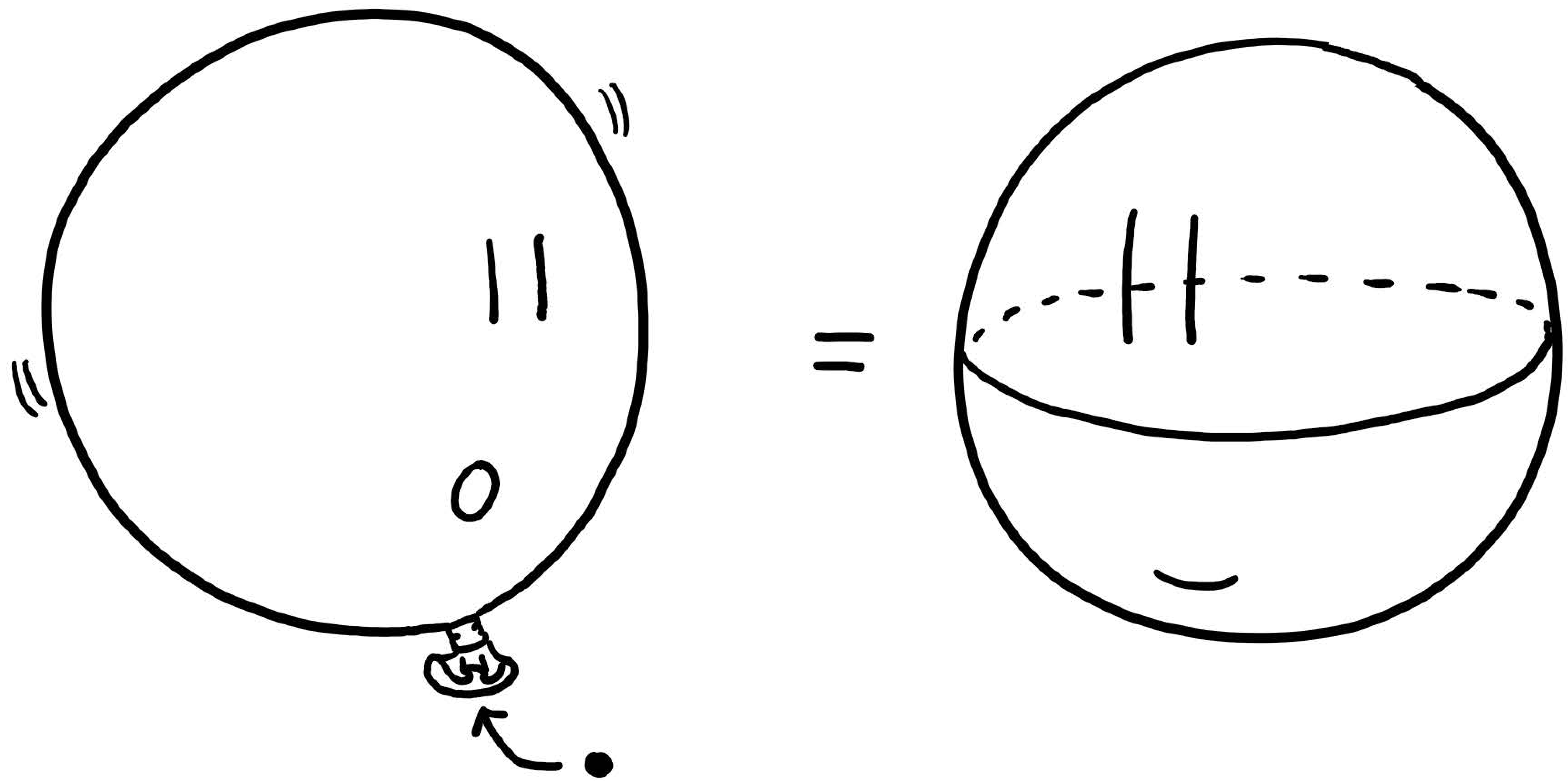
반복되거나,

아래쪽 패턴만

반복되거나.

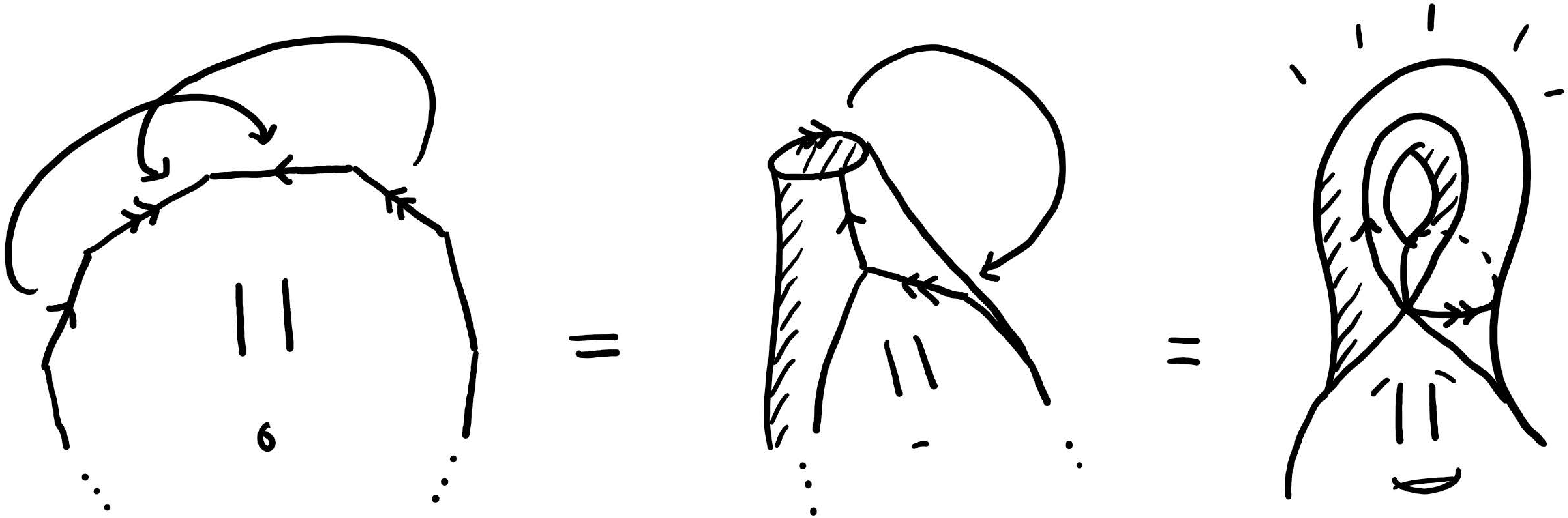


첫번째 케이스는 조금 엉뚱하지만 곰곰히 생각해 보면,



다각형의 가장자리가 한 점으로 축소된 형태, 즉 구면임을 알 수 있죠.

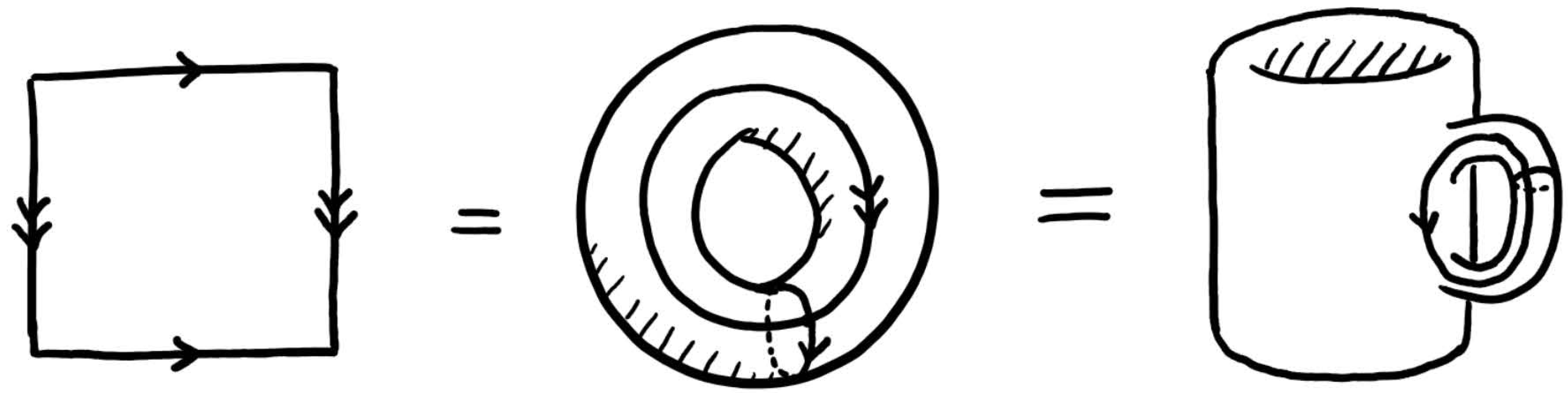
두번째 케이스는 다음과 같습니다. 서로 반대 방향인 모서리 두 쌍은...

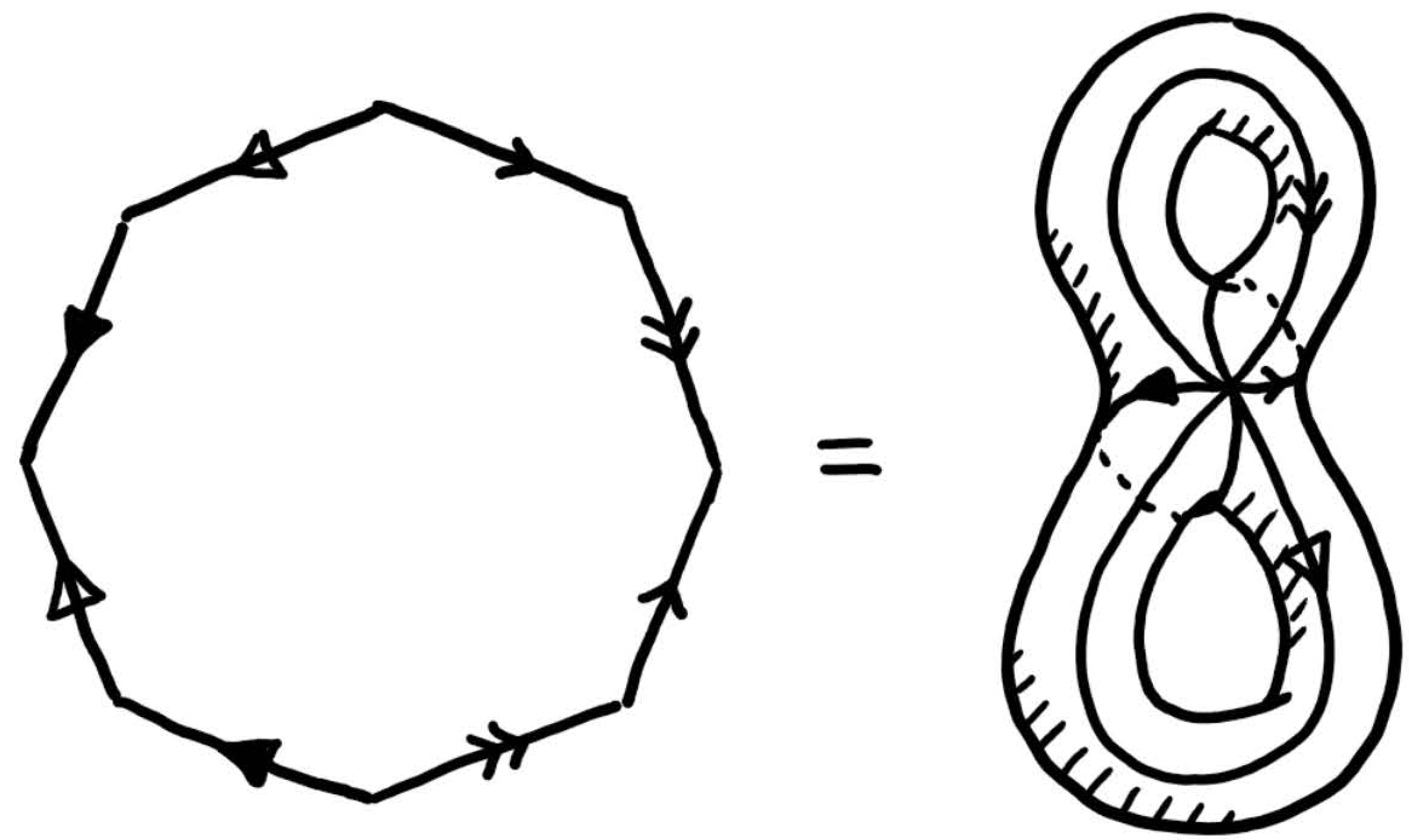


요렇게 고리를 만드는 역할을 합니다!

그러니 쌍이 2n개 있으면 고리가 n개 만들어지겠죠.

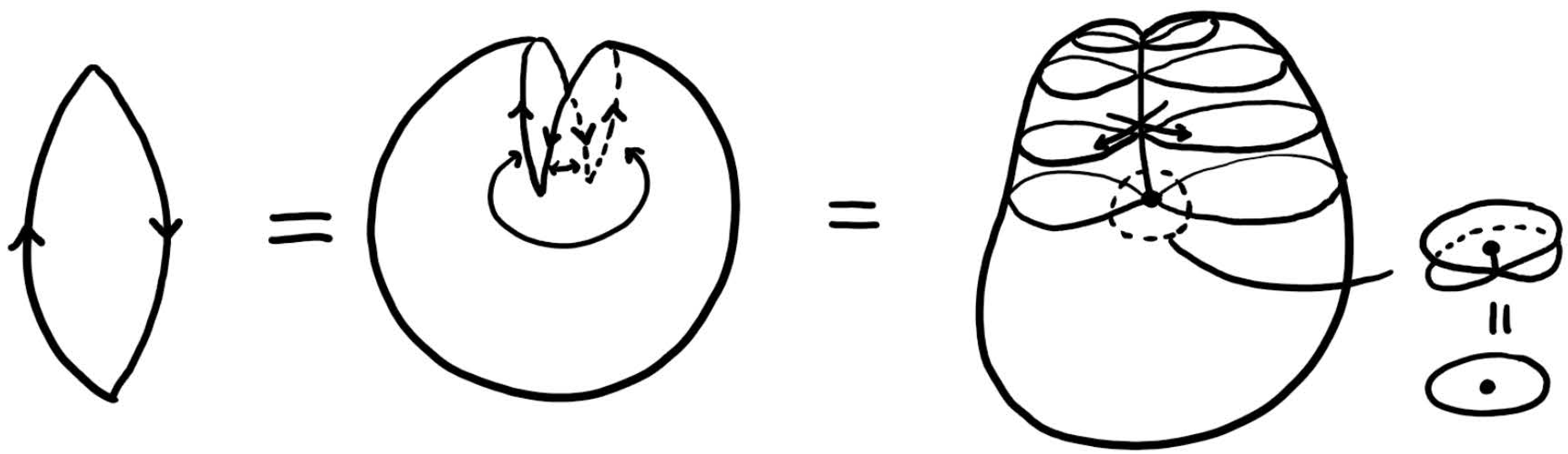
아래와 같이 말이에요. 사각형으로는 고리 하나짜리 토러스를 만들 수 있고,

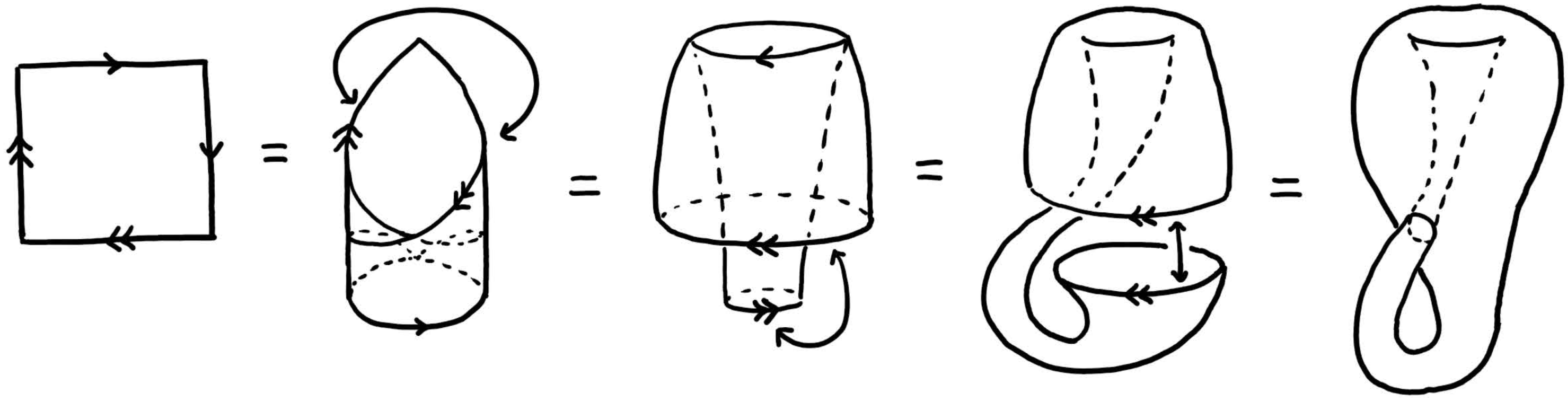




팔각형으로는 고리 두개짜리 곡면을 만들 수 있겠네요.

세번째 부류는 참 그리기가 어려운데요... 일단 앞/뒷면을 구분할 수 없단 것에서부터 어려움이 느껴지죠?





실제로 이 부류들은 3차원 공간에서는 제대로 그릴 수 없는 모양들이에요.

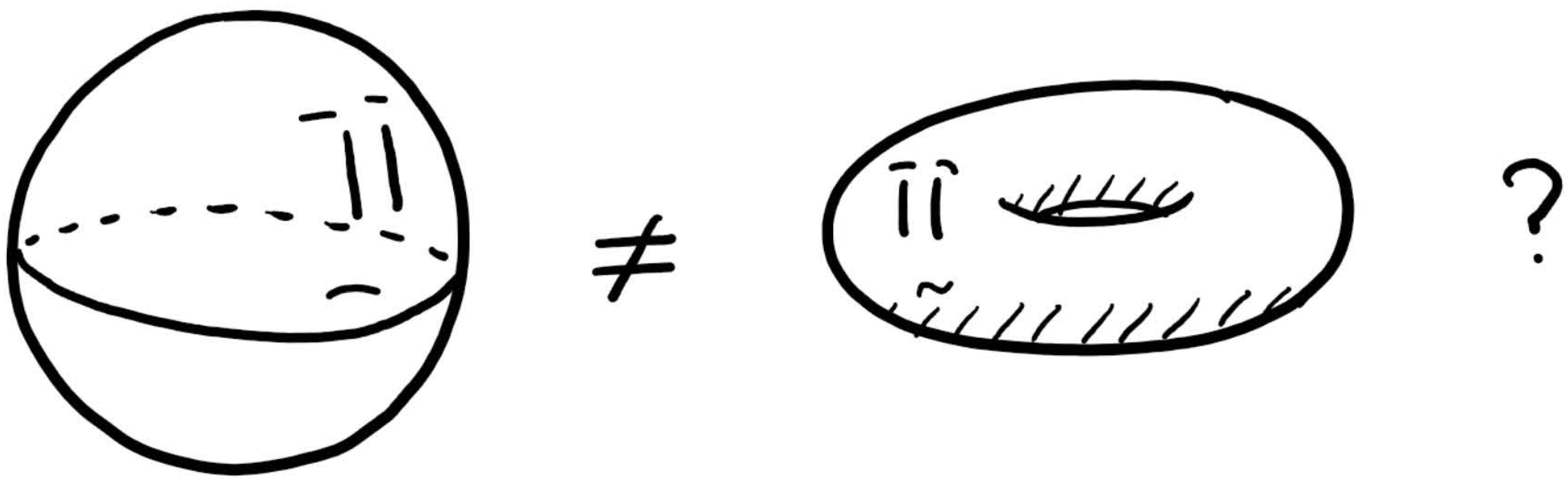
뭐 그래도 좋아요. 어쨌든 곡면을 분류하겠다는 우리 목표는 달성한 셈이네요.

임의의 곡면은...

이런 "모서리에 표시된 다각형"과 같고,

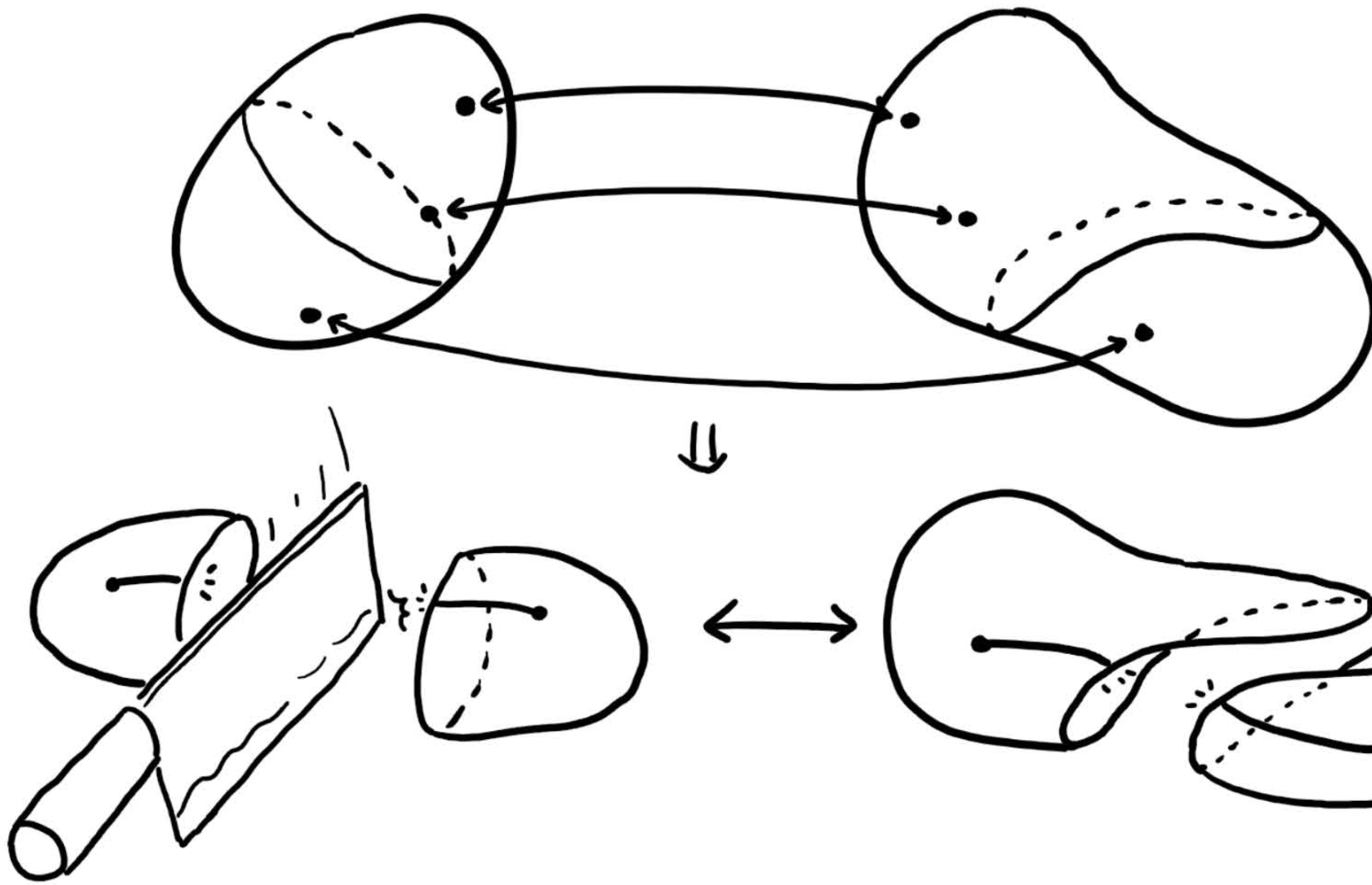
그건 이 형태들 중 하나와 같다는 걸 봤으니까요.

사실은 한 가지 문제가 남아 있어요. 분류라는 것은 다른 것은 다르게, 같은 것은 같게 구분해줘야 하는데,



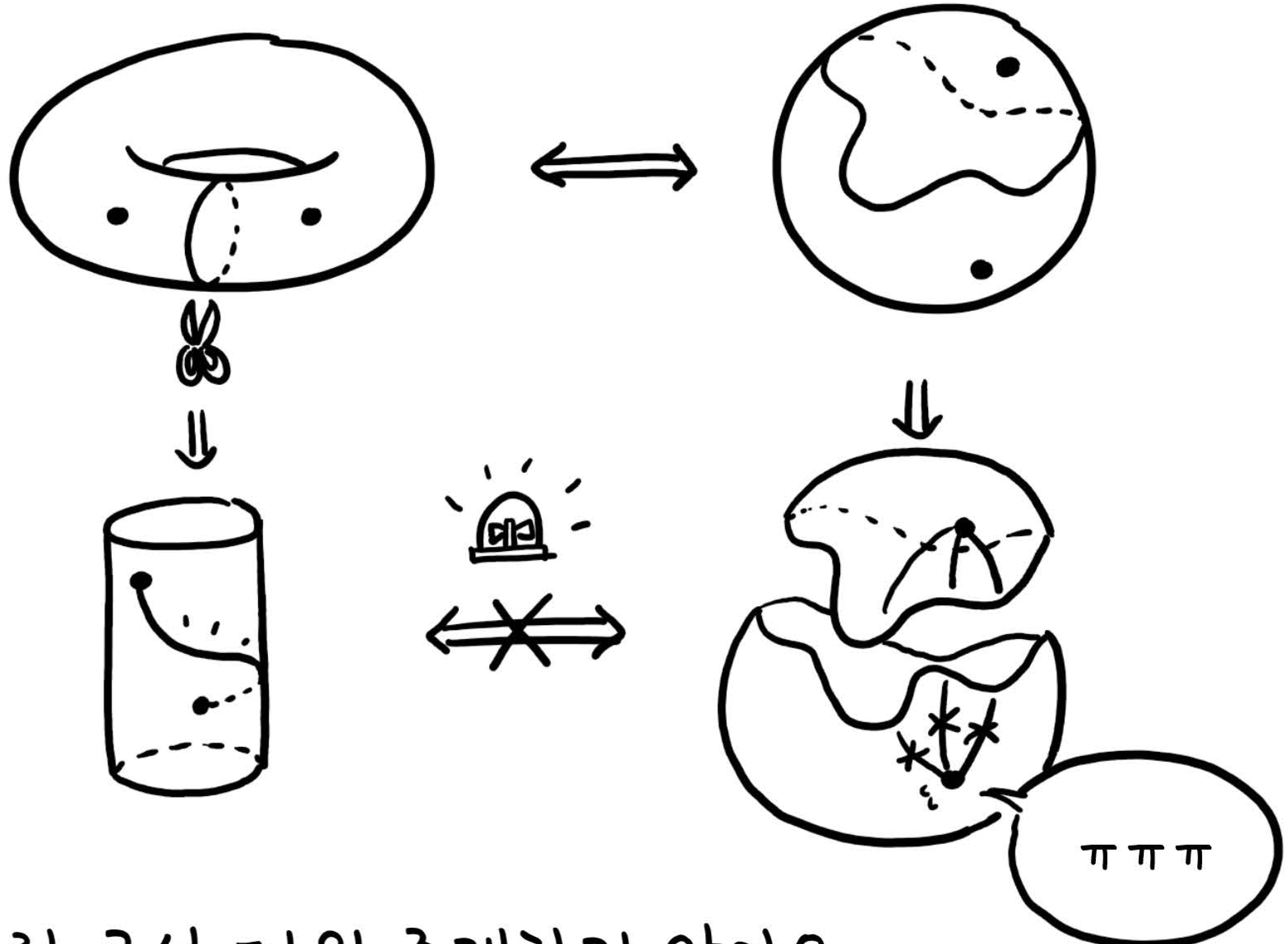
우리가 나눈 클래스들이 각각 "다르다"는 건 어떻게 증명할까요?
이건 생각을 좀 해 봐야겠죠.

이 문제는 이렇게 해결할 수 있어요. 만약 두 (물먹은) 곡면 사이에 좋은 대응이 존재한다면,



첫번째 곡면을 둘로 갈랐을 때 두번째 곡면도 따라 갈라지겠죠. 안 갈라지면 같이 안 갈라져야 하구요.

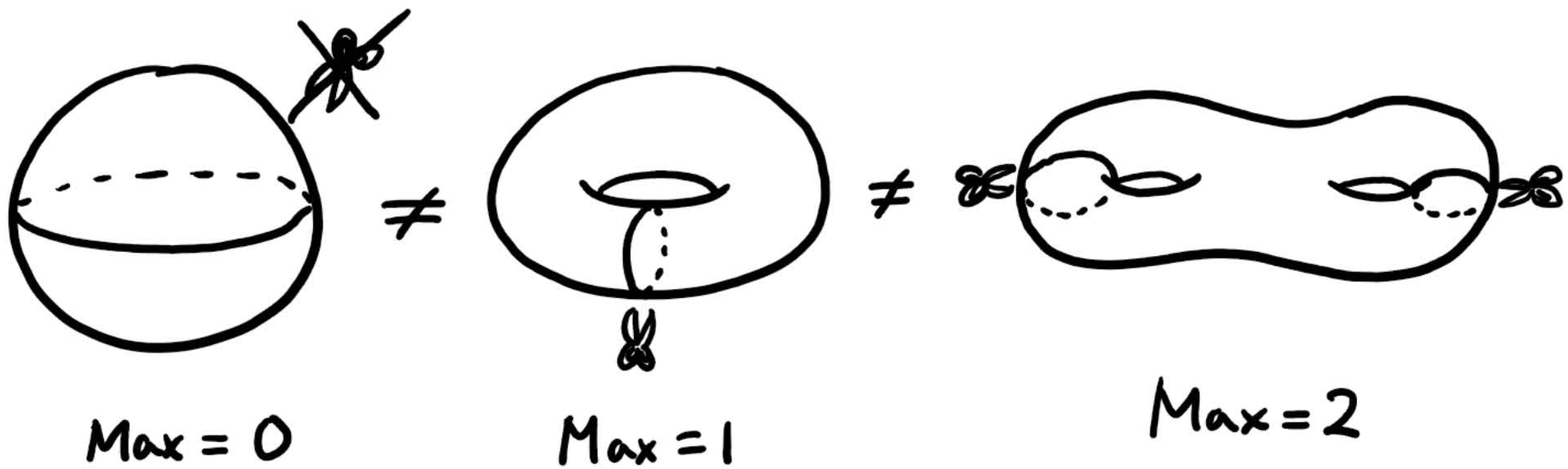
그런데 토러스에는 곡면을 둘로 잘라내지 않는 곡선이 있는가 하면,



구면에는 그런 곡선 따위 존재하지 않아요.

그러니 두 곡면은 같은 녀석으로 볼 수 없겠죠!

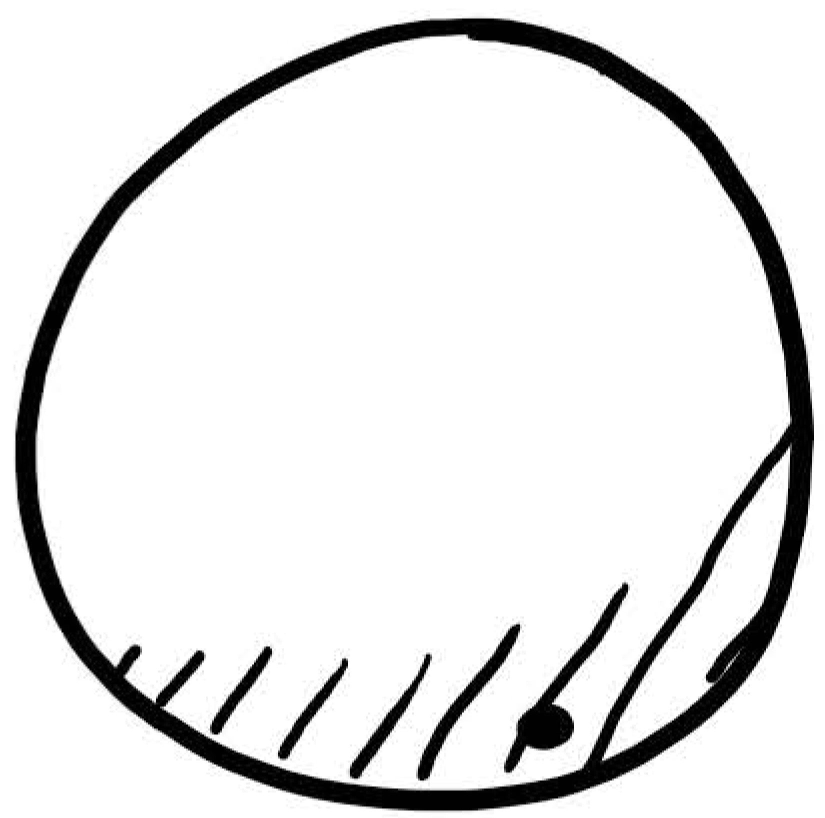
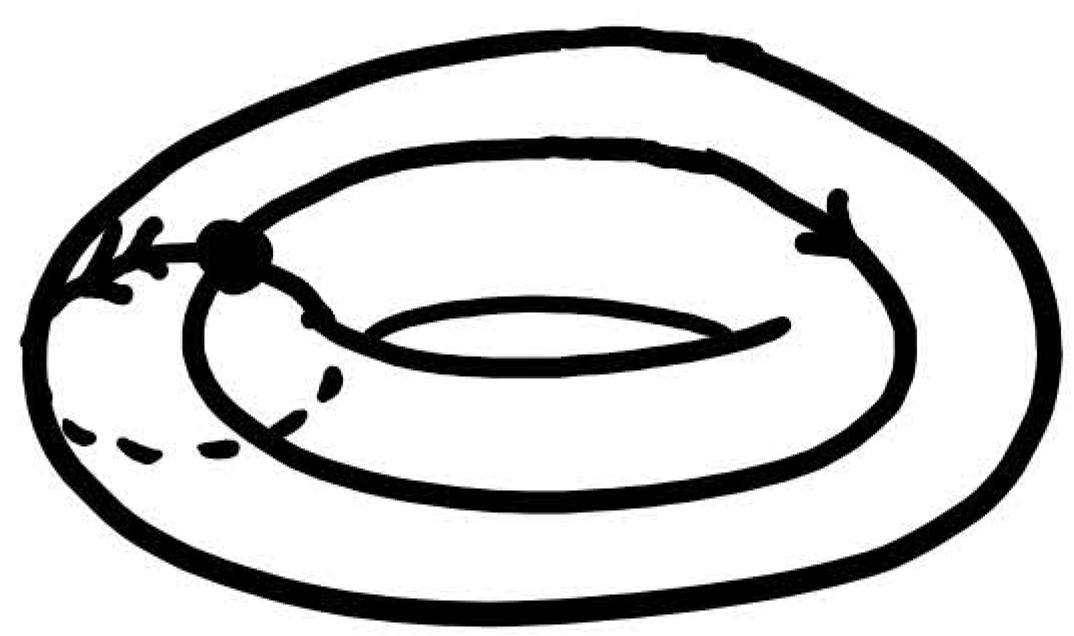
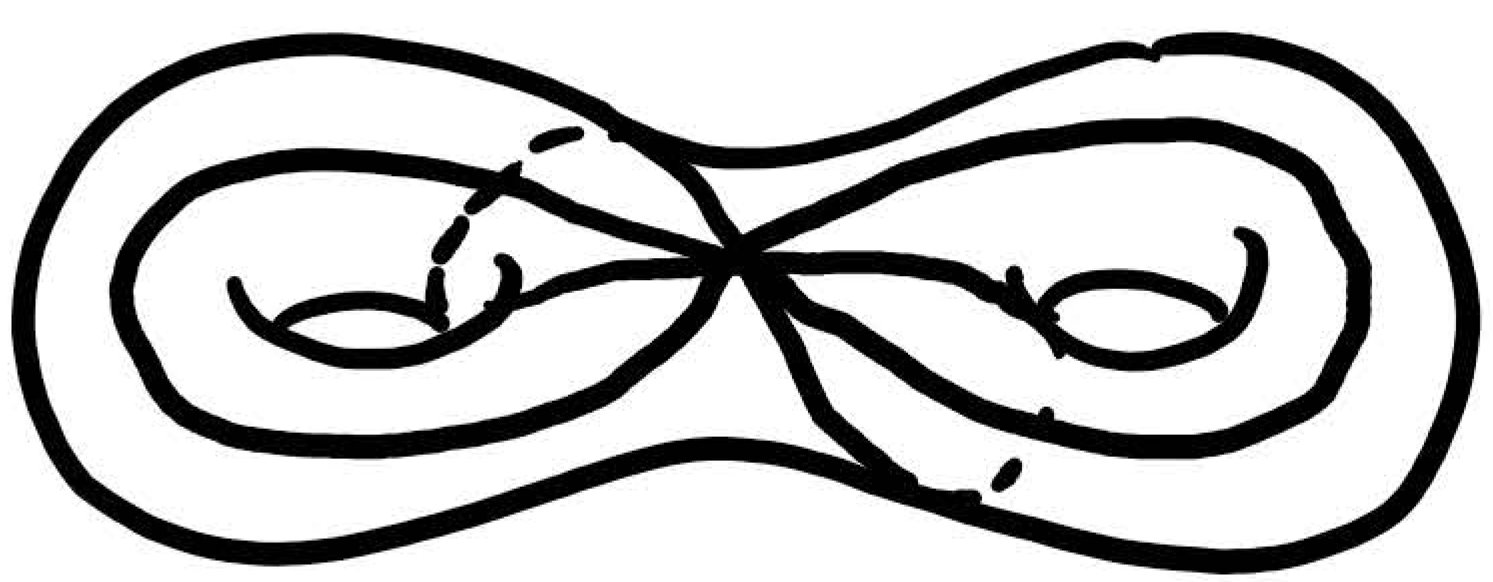
비슷한 식으로, "곡면을 안 쪼개내는 곡선의 최대 개수"를 가지고
다른 곡면들도 구분해낼 수 있어요.



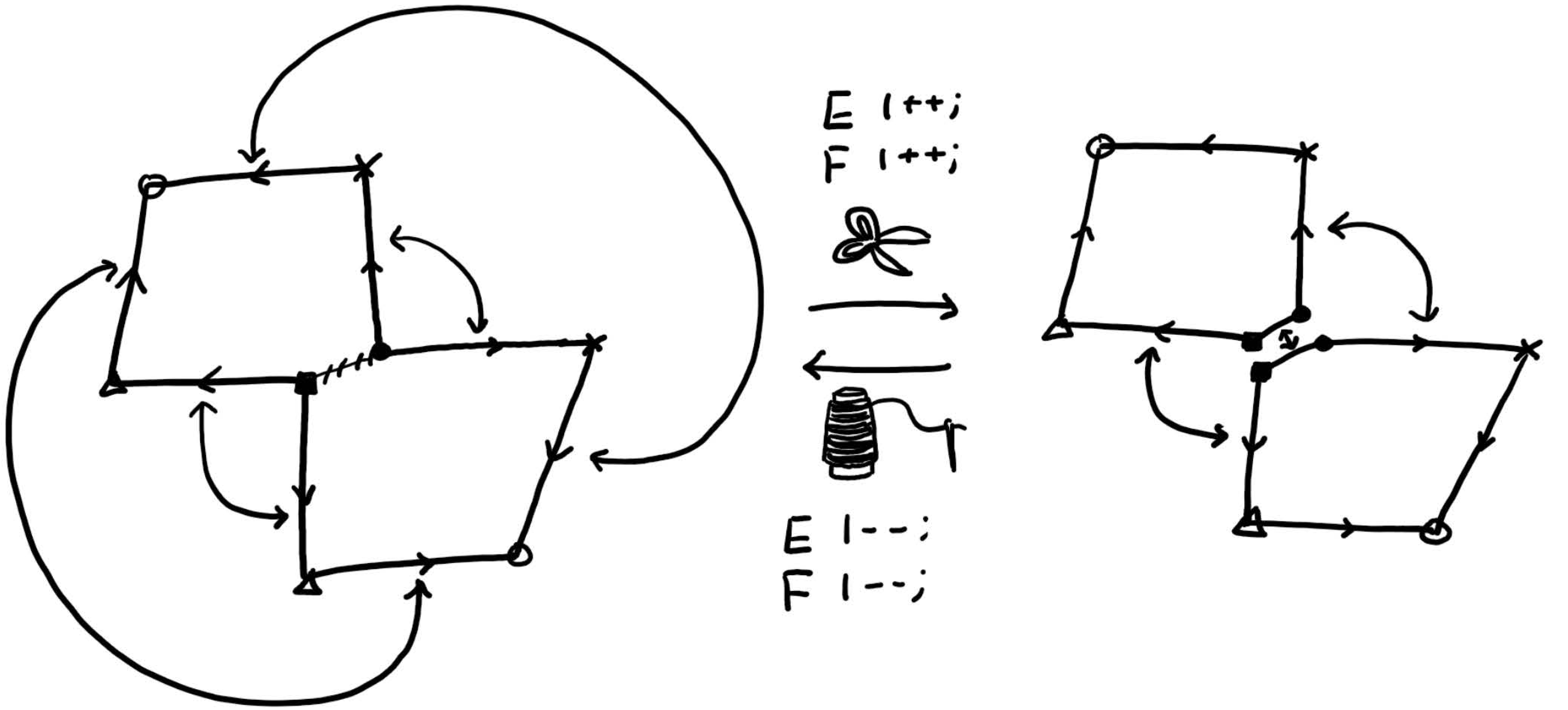
정확히는, 첫번째/두번째 부류는 이렇게 구분할 수 있고,
세번째 부류는 각자 생각해보기로 해요!

그리고 이것들을 구분하는 또 다른 방법이 있어요.

바로 다각형의 꼭짓점/모서리/면 개수를 세는 건데요,

		$V-E+F$
	$V=1$ $E=0$ $F=1$	2
	$V=1$ $E=2$ $F=1$	0
	$V=1$ $E=4$ $F=1$	-2

우리가 앞에서 언급한 자르고 이어붙이는 과정 하에서도,

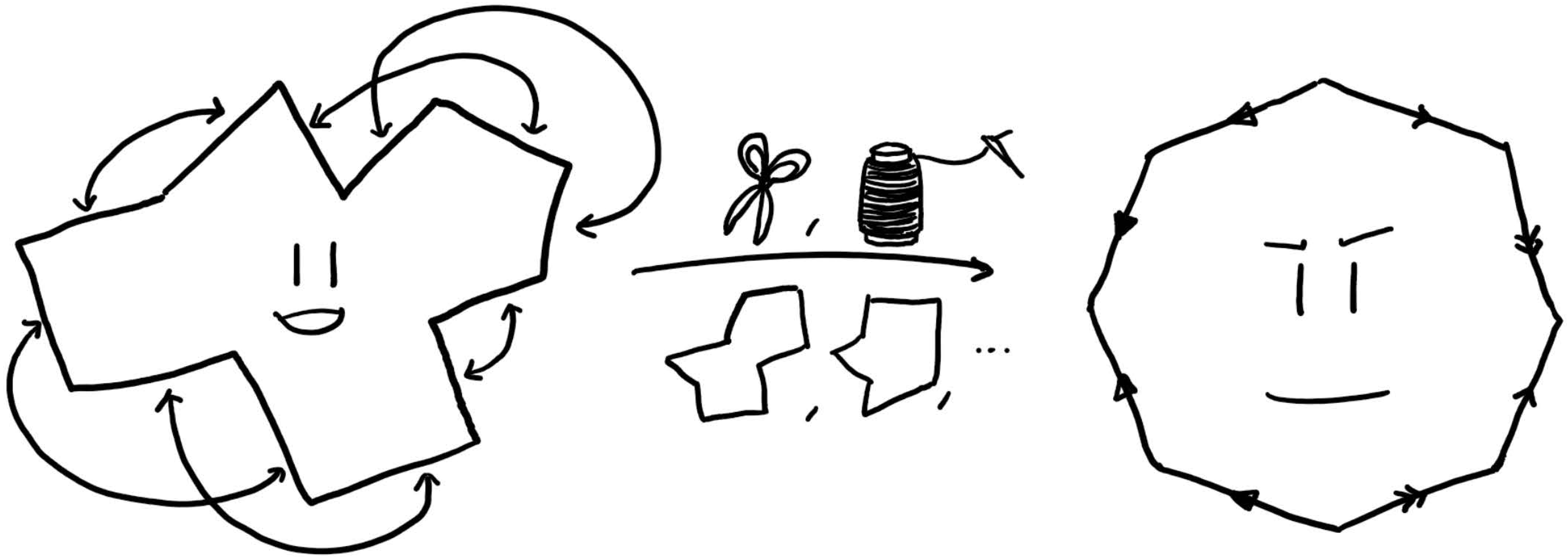


$V=5,\ E=3,\ F=1$

$V=5,\ E=4,\ F=2$

이 V−E+F라는 값은 계속 유지가 됩니다. 그러니,

정팔각형 모양으로 바꿀 수 있는 처음 다각형 모양들은 제각각이지만,

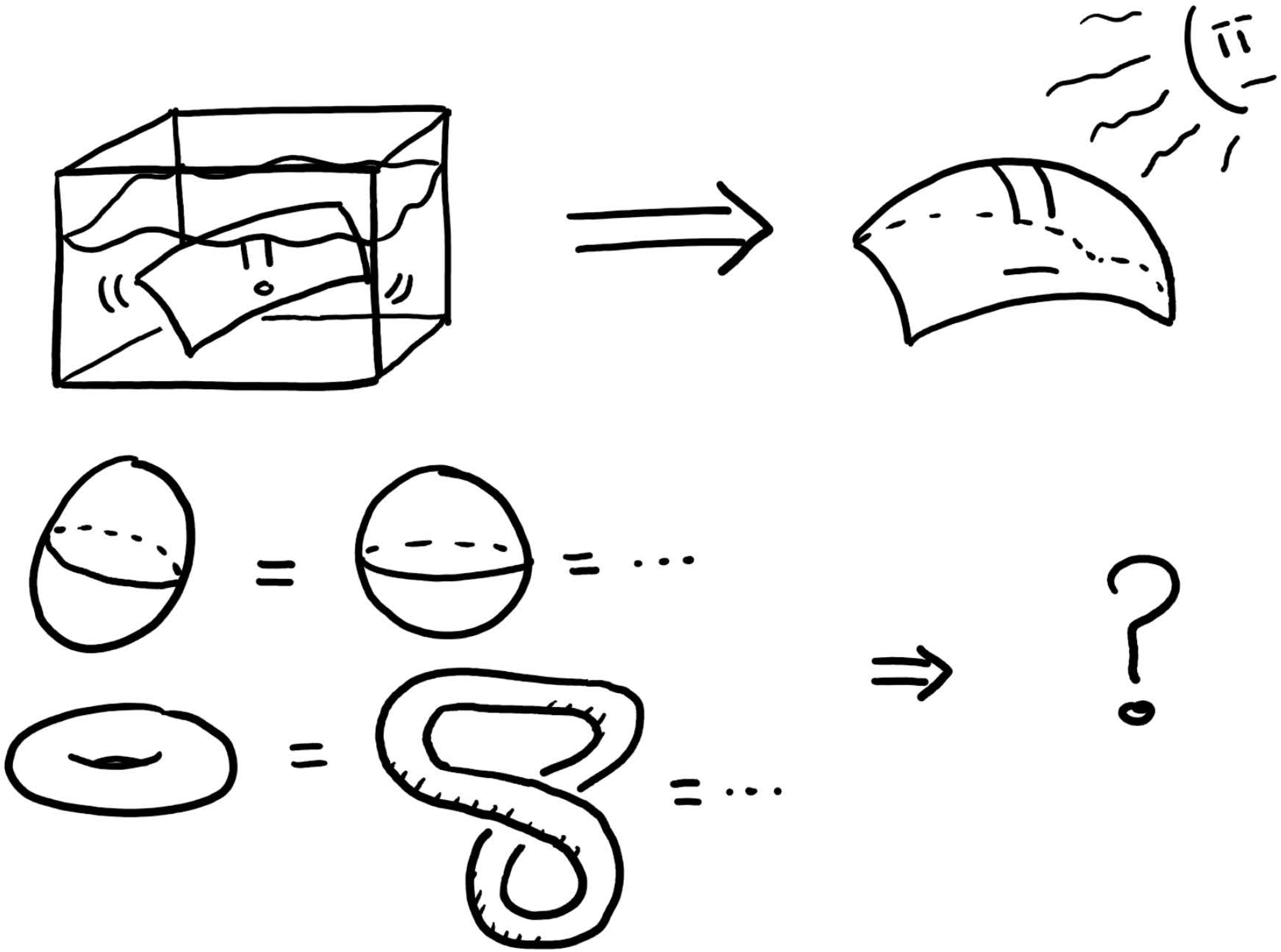


$$V-E+F=\bigcirc \longrightarrow \bigcirc \longrightarrow \bigcirc \rightarrow \cdots \longrightarrow -2$$

$$\Rightarrow \bigcirc = -2\,!$$

모두 V−E+F=−2라는 공통점이 있겠죠. 즉 이 숫자가 곡면의 위상수학적인 성질을 결정해주는 겁니다.

그런데 저 V-E+F라는 숫자가 물먹은 종이로서의 특징만 잡아주는 게 아니라,



"어떻게 말려야 하는지"도 알려준다고 하네요. 다음 시간에 계속해 봅시다!

<참고문헌>

Primary Source

- G. F. B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. 1851, Werke, 2nd ed, 3-48.
- A. F. Möbius, Theorie der elementaren Verwandtschaft. Originally submitted to the Verhandlunger der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenshaften, math.-phys. Klasse, 1863. Version in Werke 2: 433-471.
- H. Poincaré, Analysis situs. 1985, J. École Poly, Vol. 2, Issue 1, 1-123.
- H. Poincaré, Complément à l'Analysis situs, 1899. Rend. Circ. Mat. Palermo, Vol. 13, 285-343.
- H. Poincaré, Second complément à l'Analysis situs, 1900. Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 32, 277-308.

Secondary Source

- E. Scholz, The Concept of Manifold, 1850-1950. (Chapter 2 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).
- K. S. Sarkaria, Poincaré's Papers on Topology, 1993.
- K. S. Sarkaria, The Topological Work of Henri Poincaré (Chapter 6 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).
- J. Stillwell, Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements. 2010, AMS.
- J. Munkres, Topology (2nd ed). 2000, Pearson.
- M. A. Armstrong, Basic Topology. 1983, Springer.
- D. W. Kahn, Topology: An Introduction to the Point-Set and Algebraic Area. 1995, Dover Publications.
- A. Hatcher, Algebraic Topology. 2001, Cambridge University Press.
- F. Bonahon, Low-Dimensional Geometry – From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots. 2009, AMS.