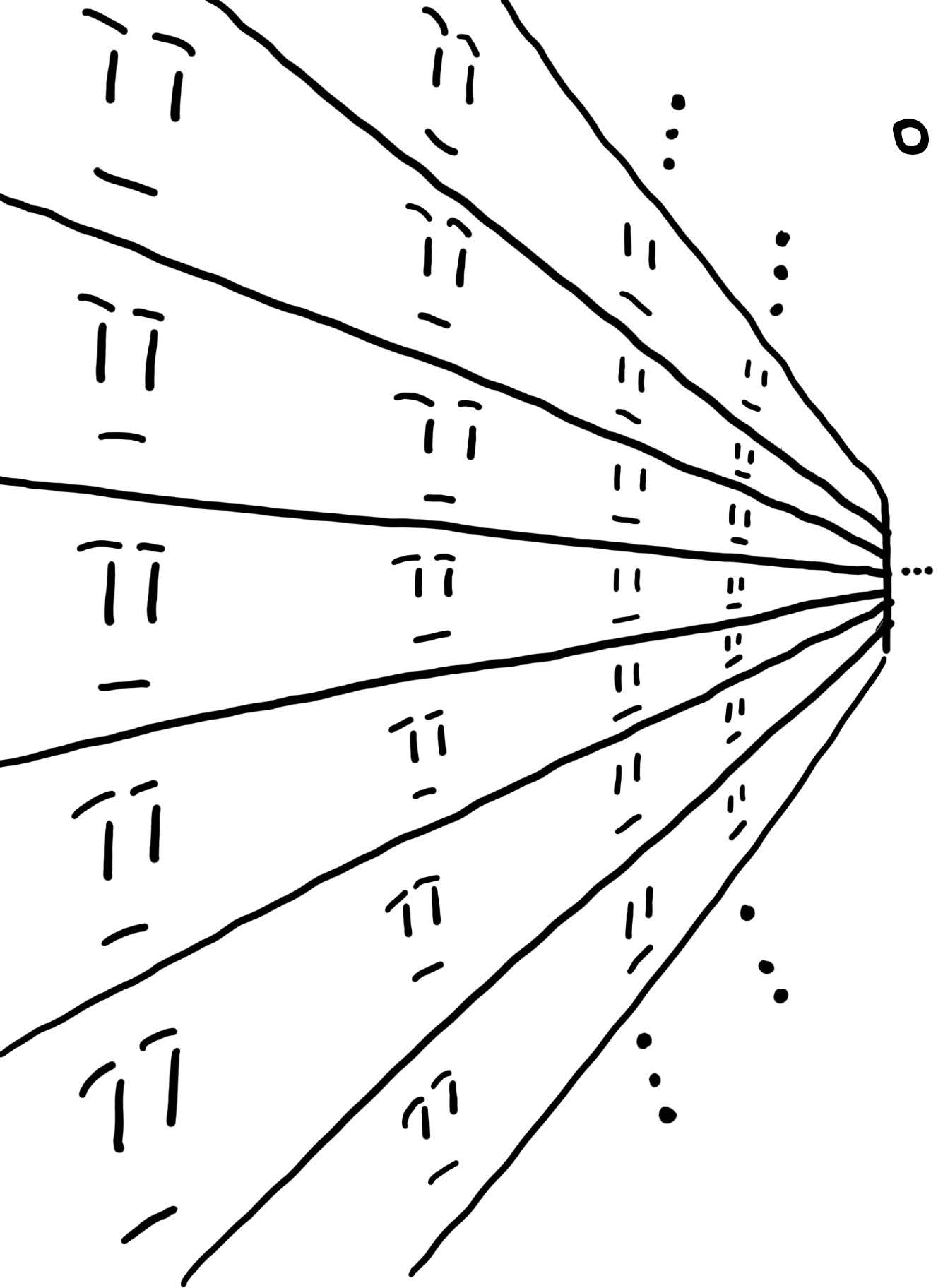
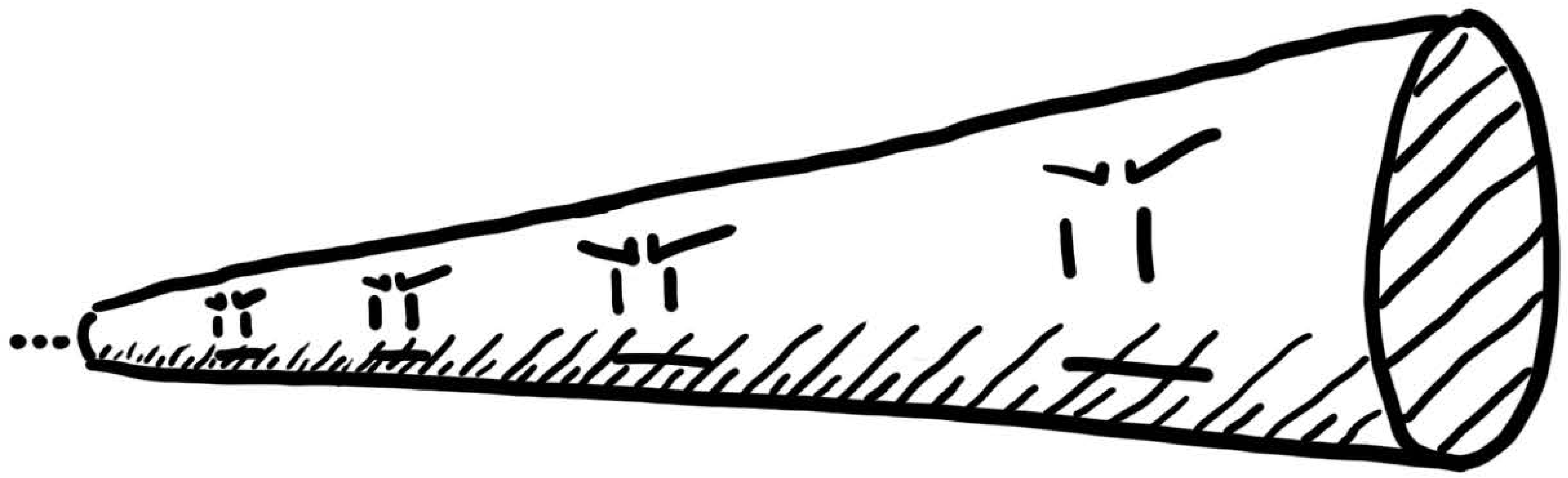
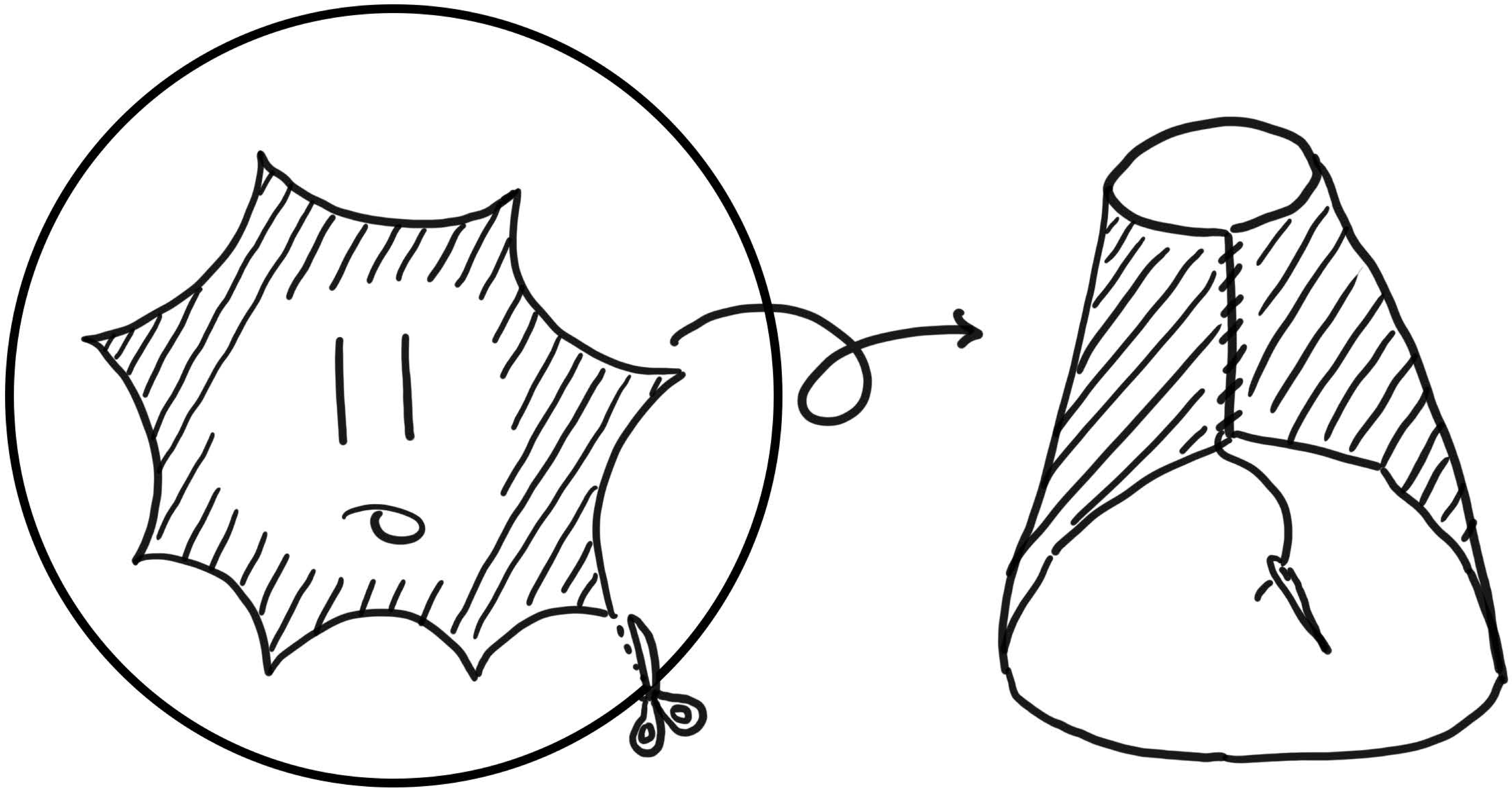
이것은 기하학인가 아니면 위상수학인가





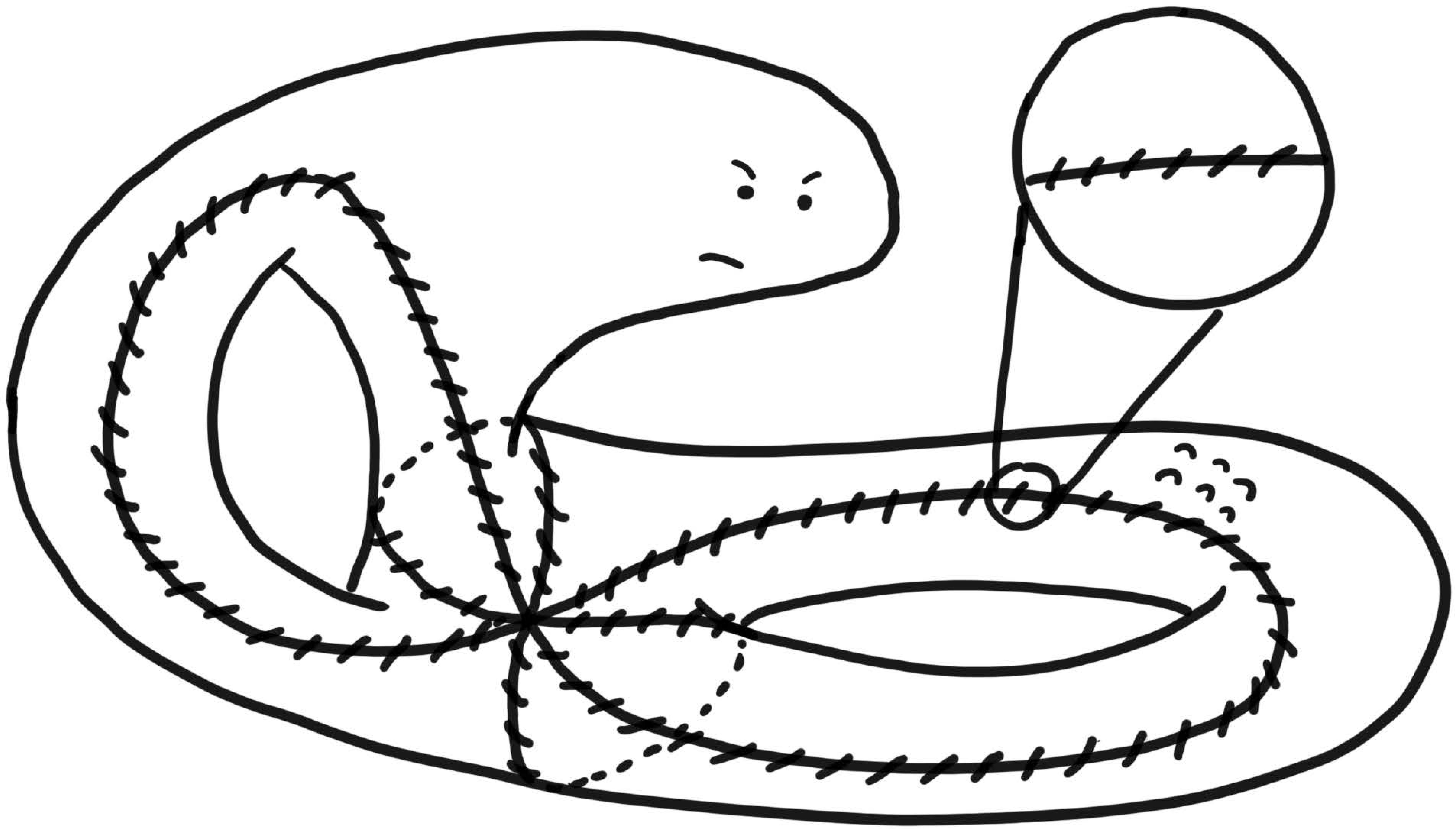
제4화: 곡면 말고 곡면 만들기

지난 시간에는 구면/평면/쌍곡면에서 적당한 다각형을 잘라내,



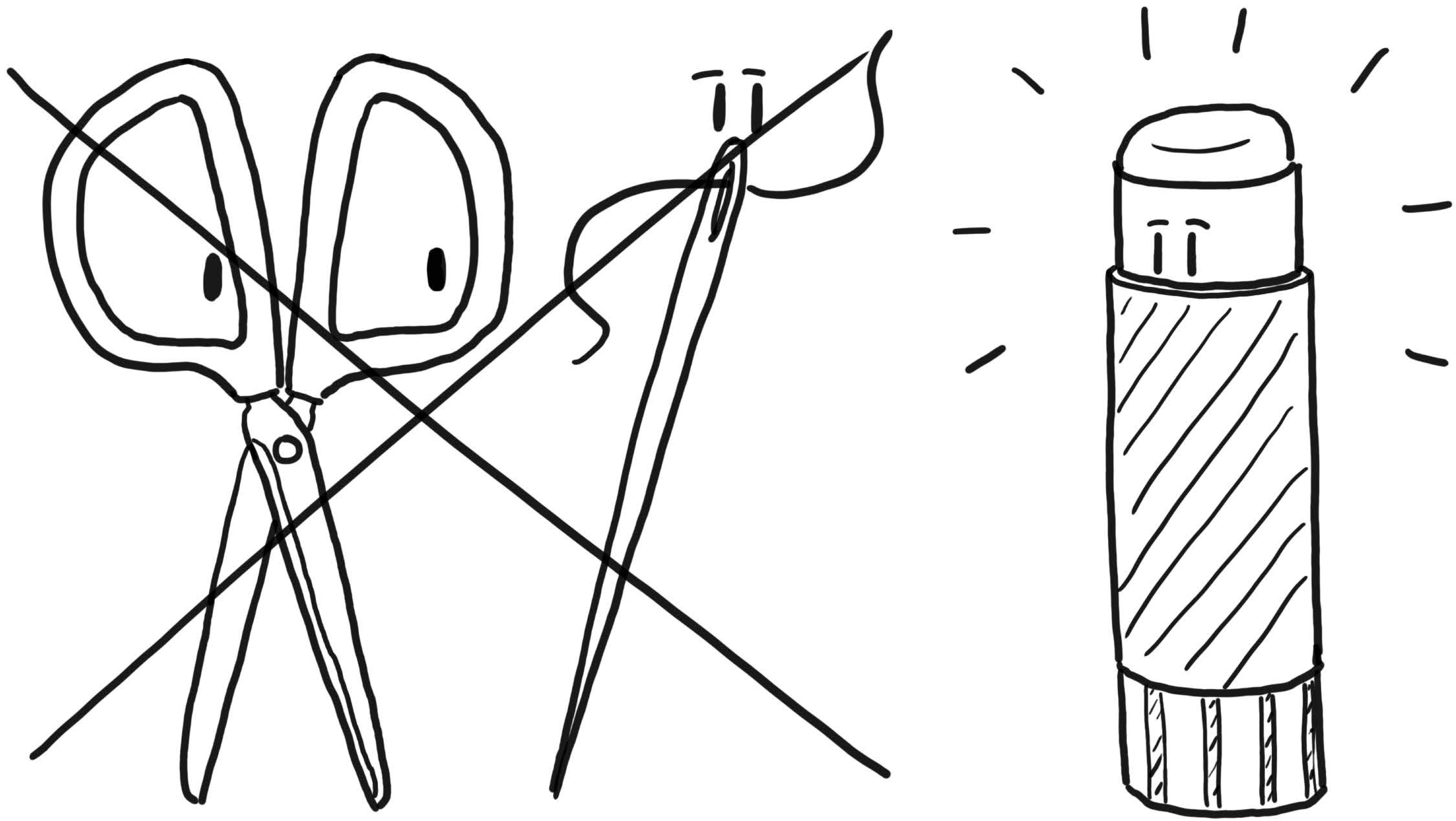
변들을 적당히 꿰매서 원하는 곡면을 만들었죠.

하지만 이 방식은 아무래도 이어 붙인 자국이 신경쓰이네요.



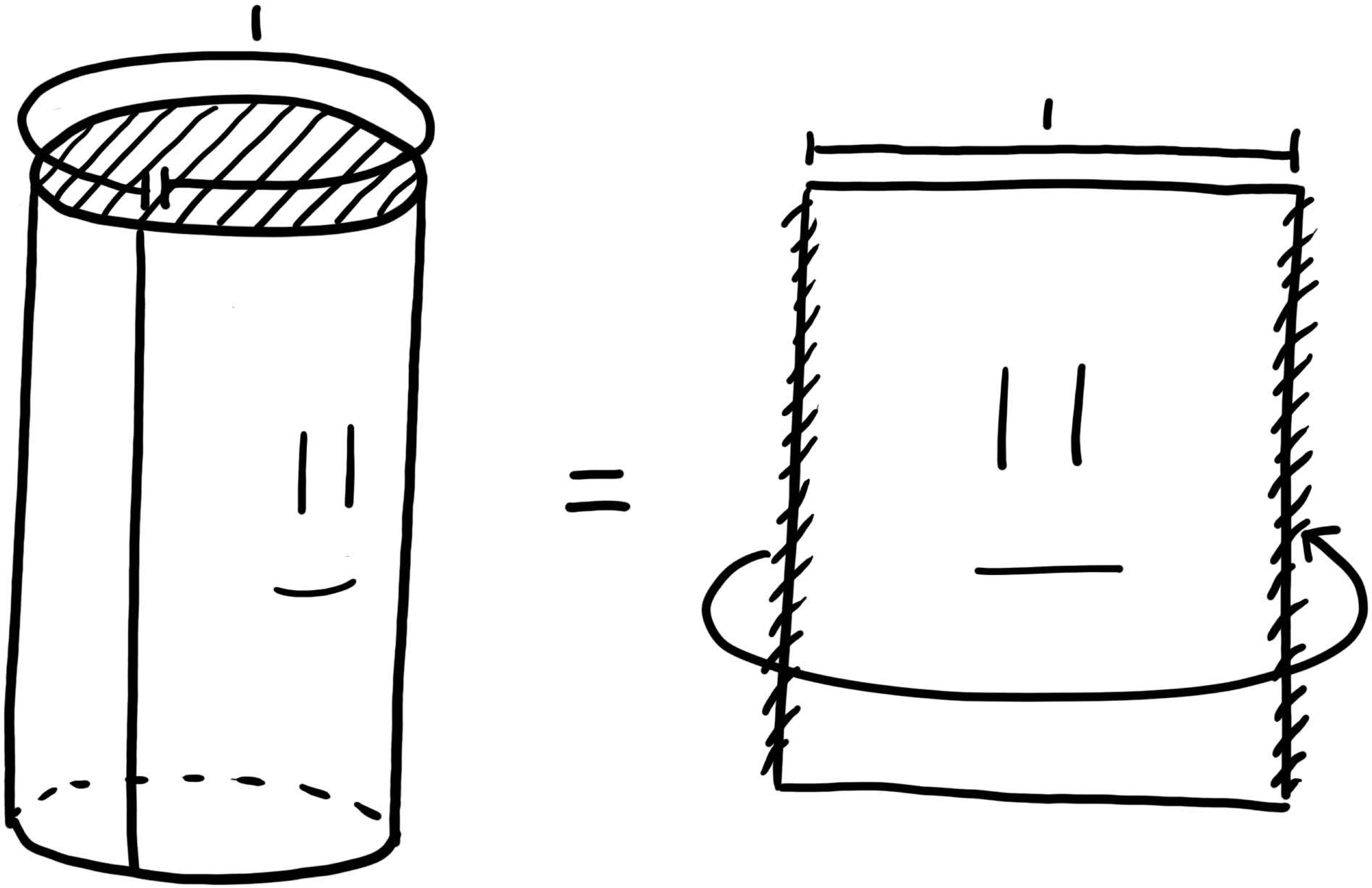
곡면의 모든 지점이 동등하게 취급받지 않는 느낌이에요.

그래서 이번 화에서는 가위나 바늘은 쓰지 않고,



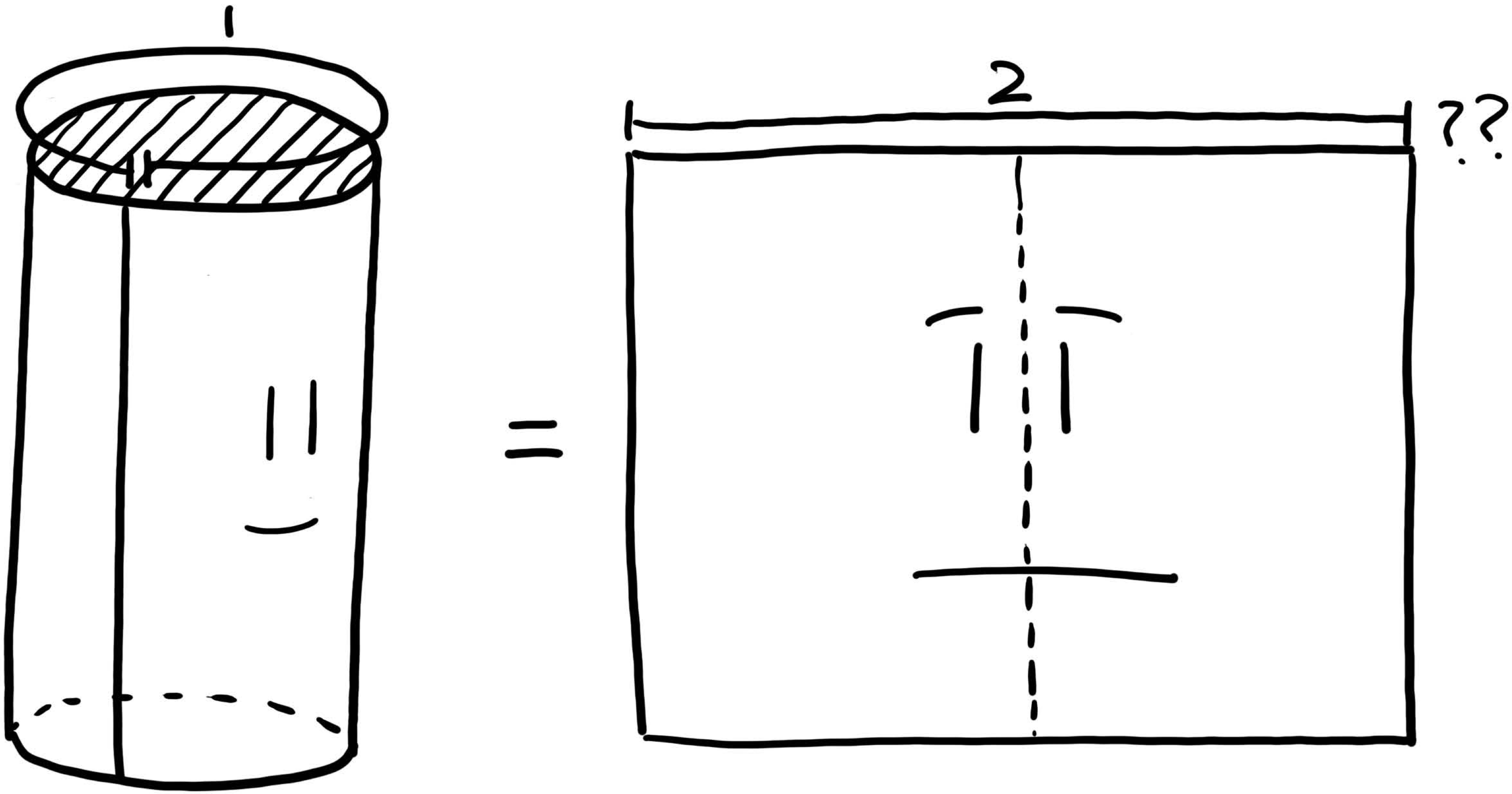
평면/쌍곡면에다가 "풀만 발라서" 곡면을 만들어 볼 거예요.

이게 무슨 의미인지 간단한 예시를 통해서 알아봅시다.



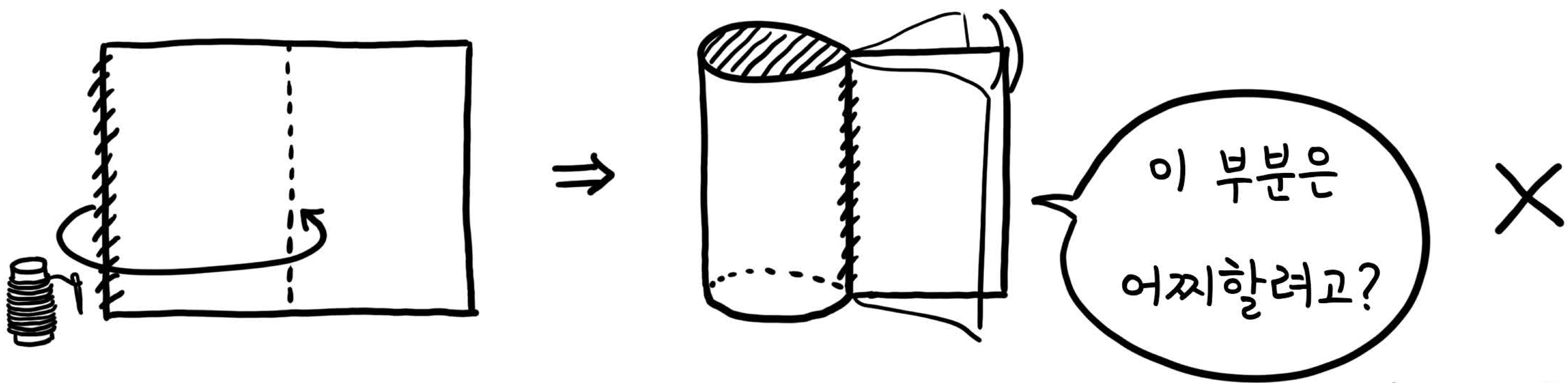
둘레 1짜리 원통은 가로 1짜리 직사각형을 가지고 만들 수 있겠죠?

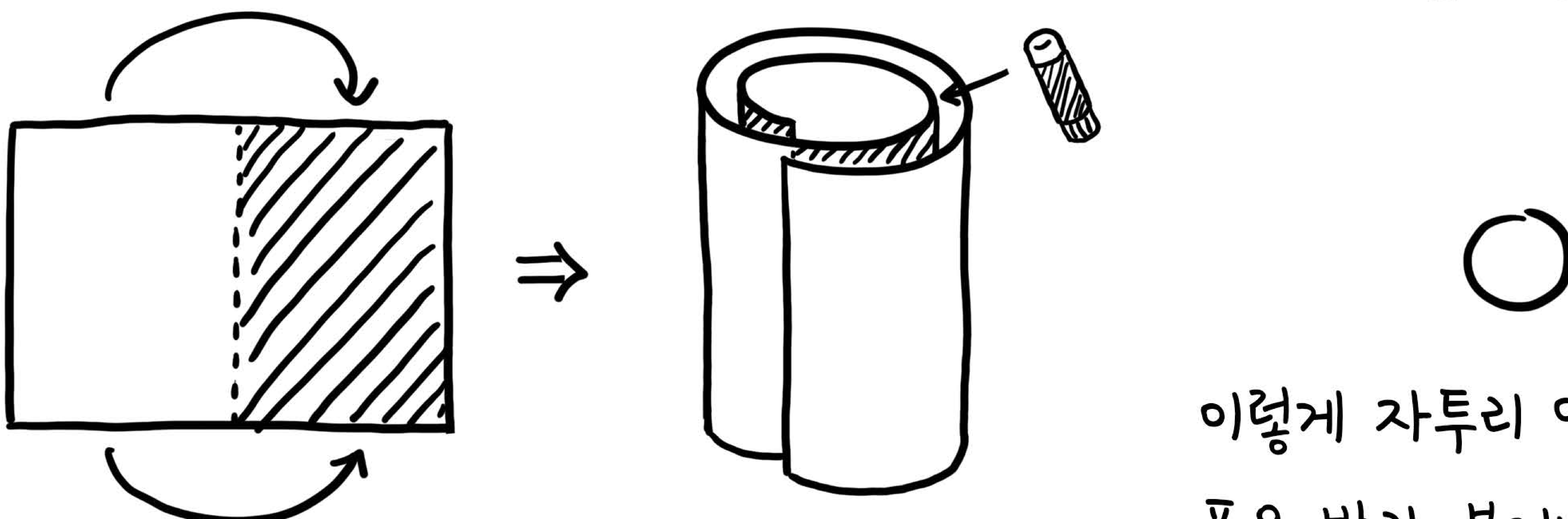
하지만 굴이 가로 2짜리 직사각형을 가지고 만들려면,



어떤 방법을 생각할 수 있을까요?

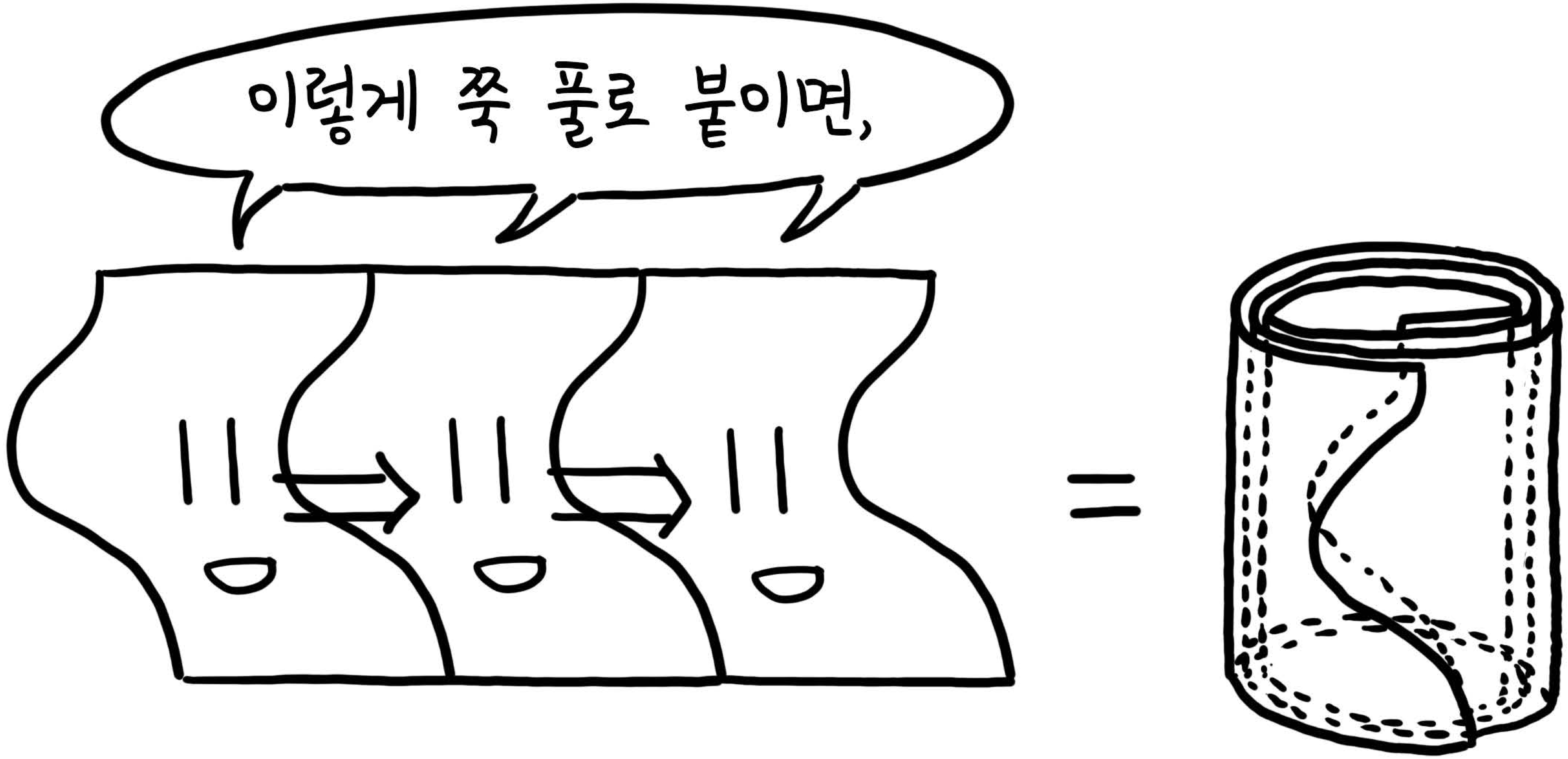
둘레가 1이 되도록 실로 꿰맨다고 해도...





이렇게 자투리 영역까지 풀을 발라 붙여버리는 게 좋겠습니다.

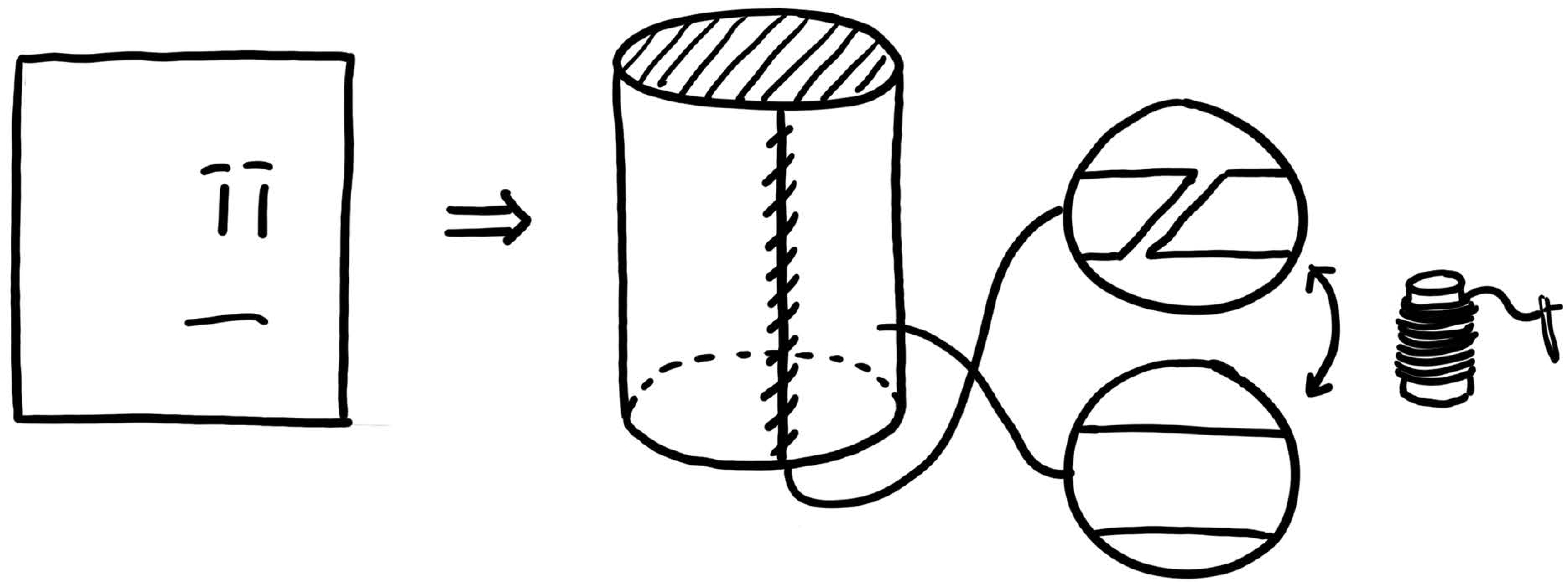
꼭 직사각형이 아니어도, 혹은 두 겹으로 붙이지 않아도 돼요.



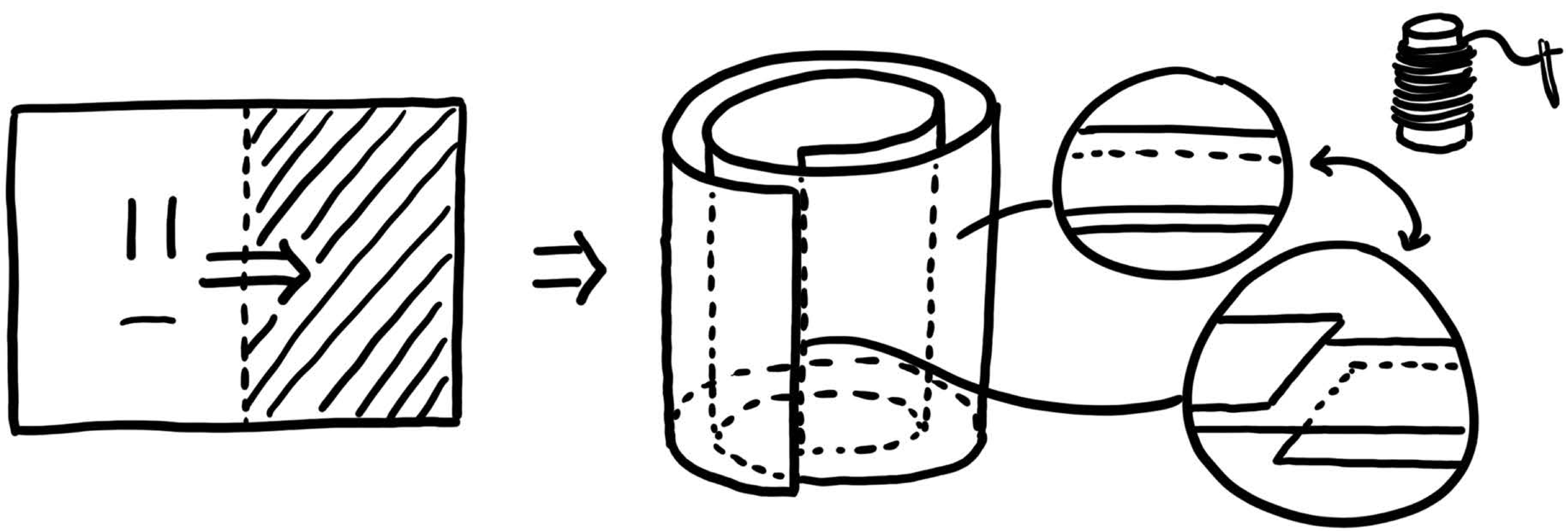
세 겹으로 겹쳐서 원통 하나를 만들 수 있죠.

다만, "흉터 자국" 문제를 좀 더 깊이 생각해봐야 해요.

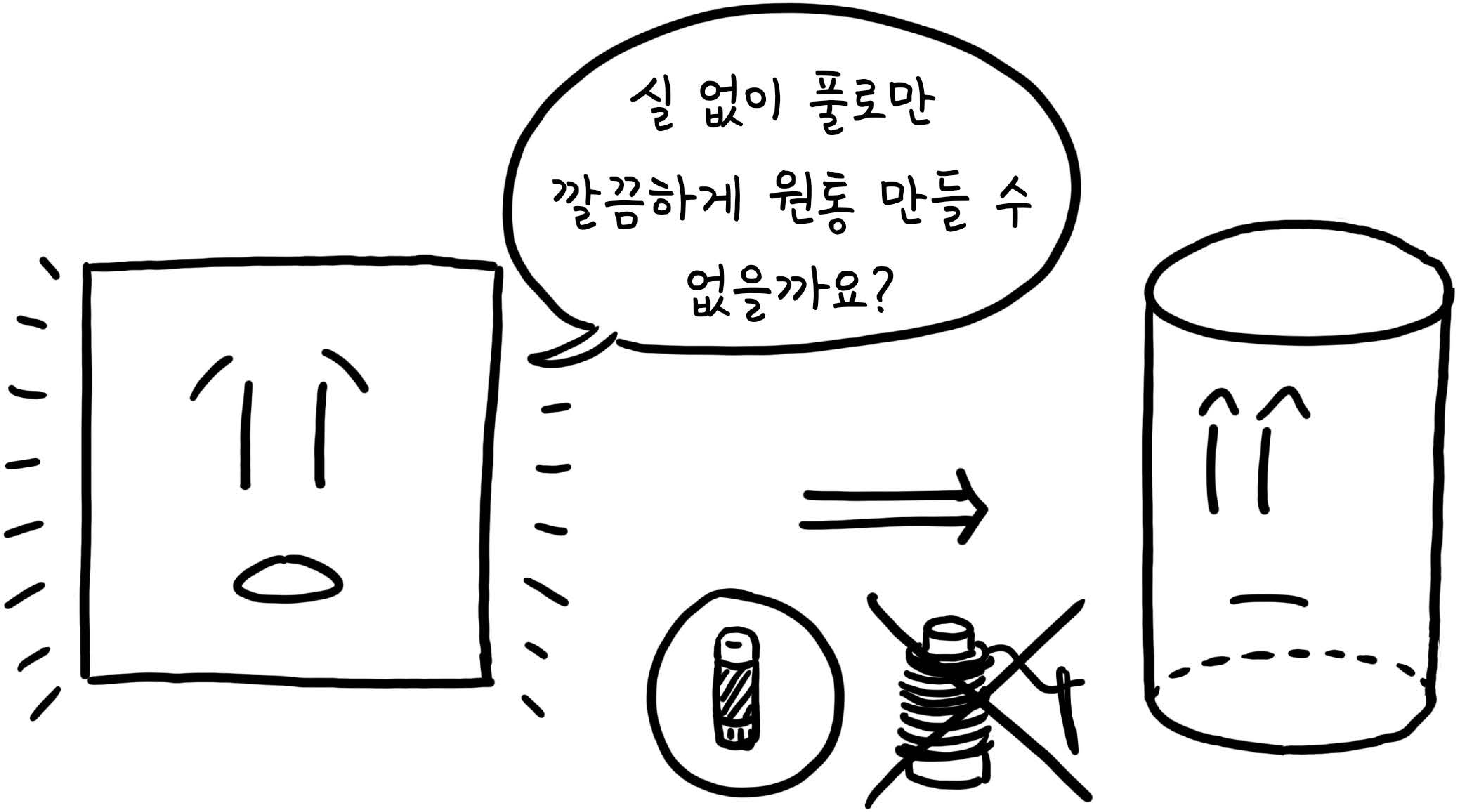
한 겹으로 원통을 만들 때 모서리를 꿰매야 하니까 흉터가 남았는데,



두 겹인 상황에서도 모서리를 꿰매야만 진정한 의미의 원통이 만들어진단 말이죠.



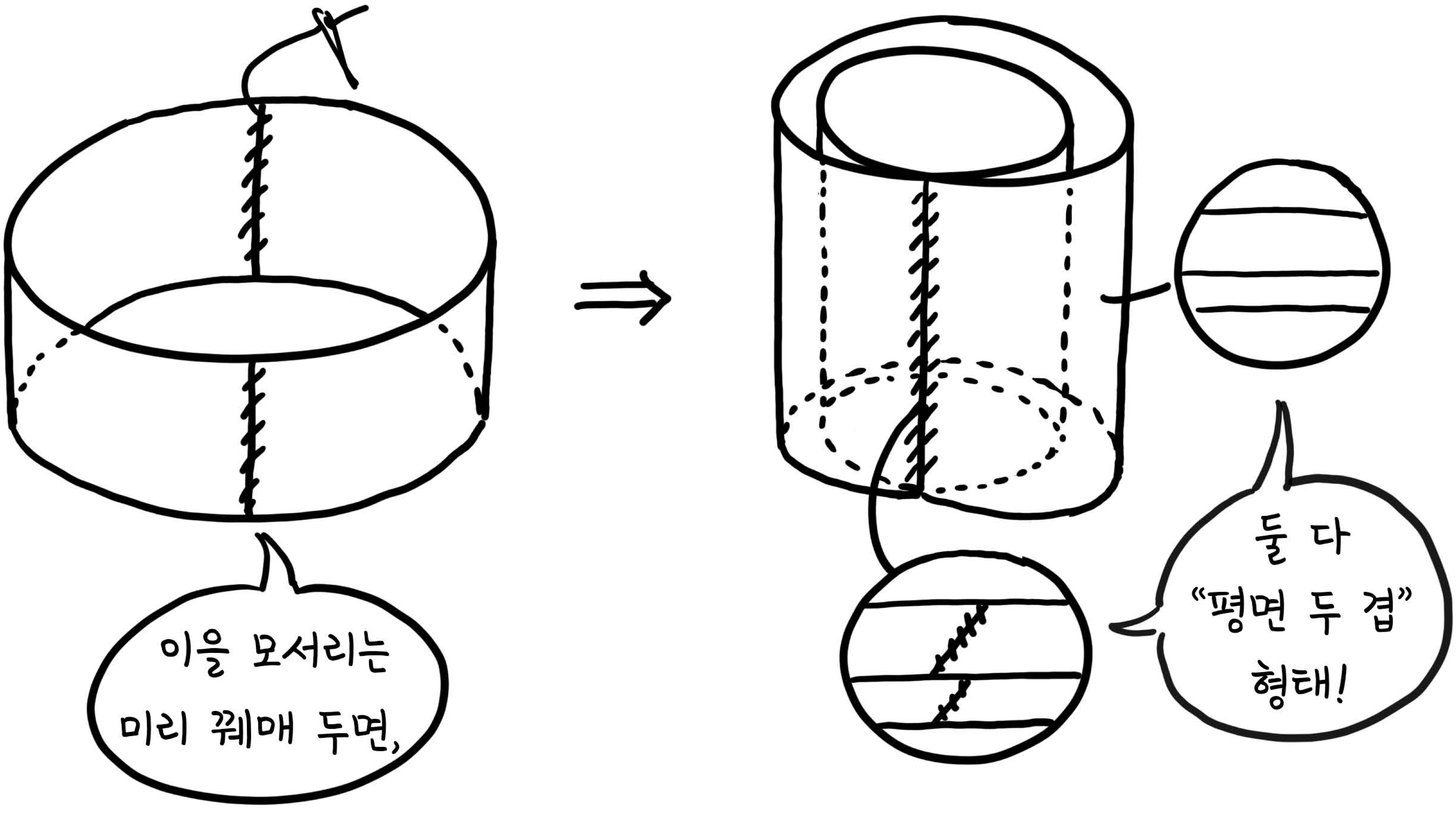
아니, 휴터 자국이 눈에 거슬려서 풀로 붙이는 방법으로 바꾼건데...



여기에는 두 가지 해결책이 있습니다. 한번 살펴보죠.

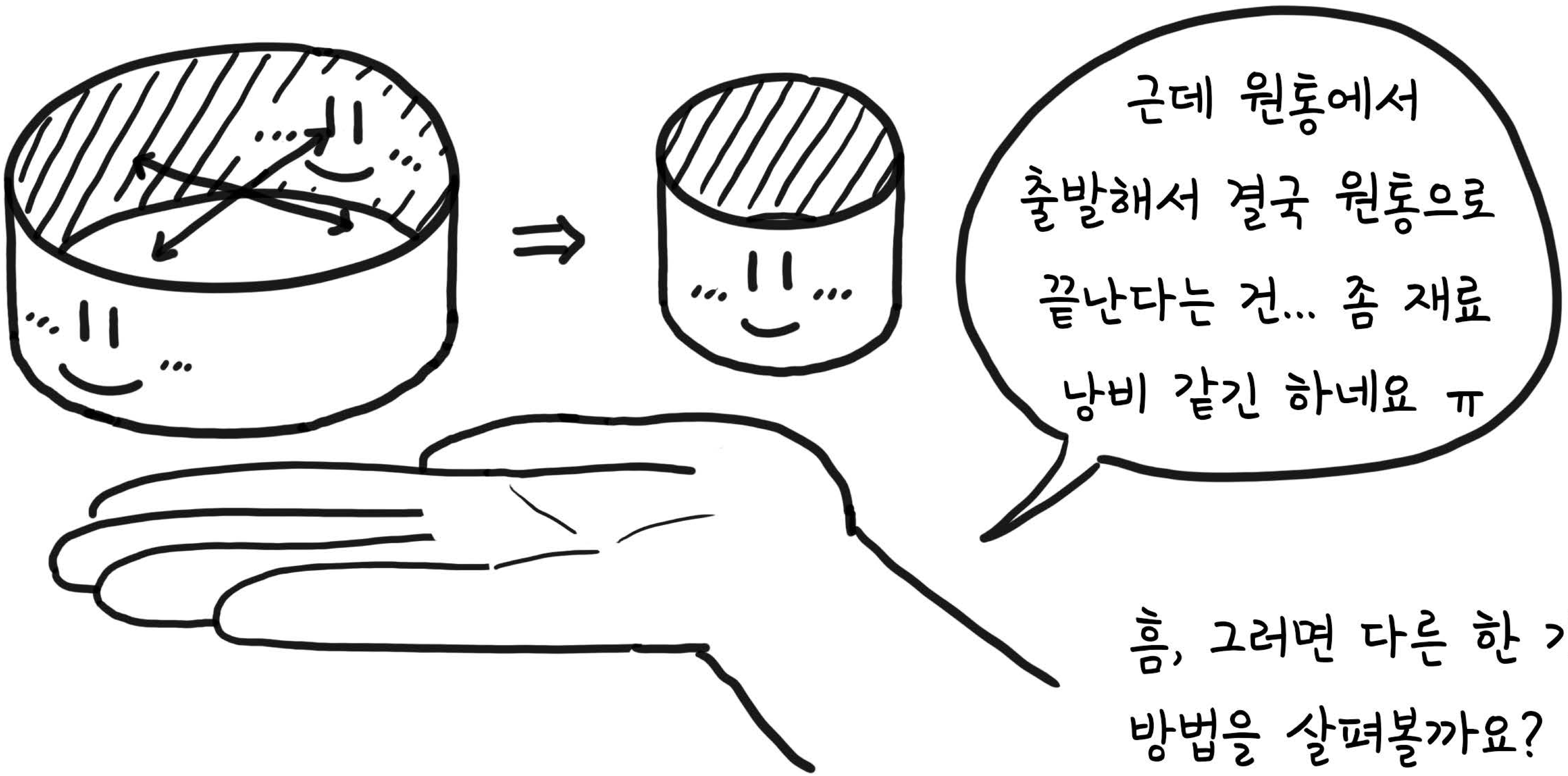
① 이어야 할 모서리 미리 꿰매 두기

애초에 직사각형이 아닌 원통에서 출발하면, 만드는 과정에는 풀칠만 하면 되죠.



그럼 재료에 바느질 표시를 안 해 놓으면 감쪽같겠네요!

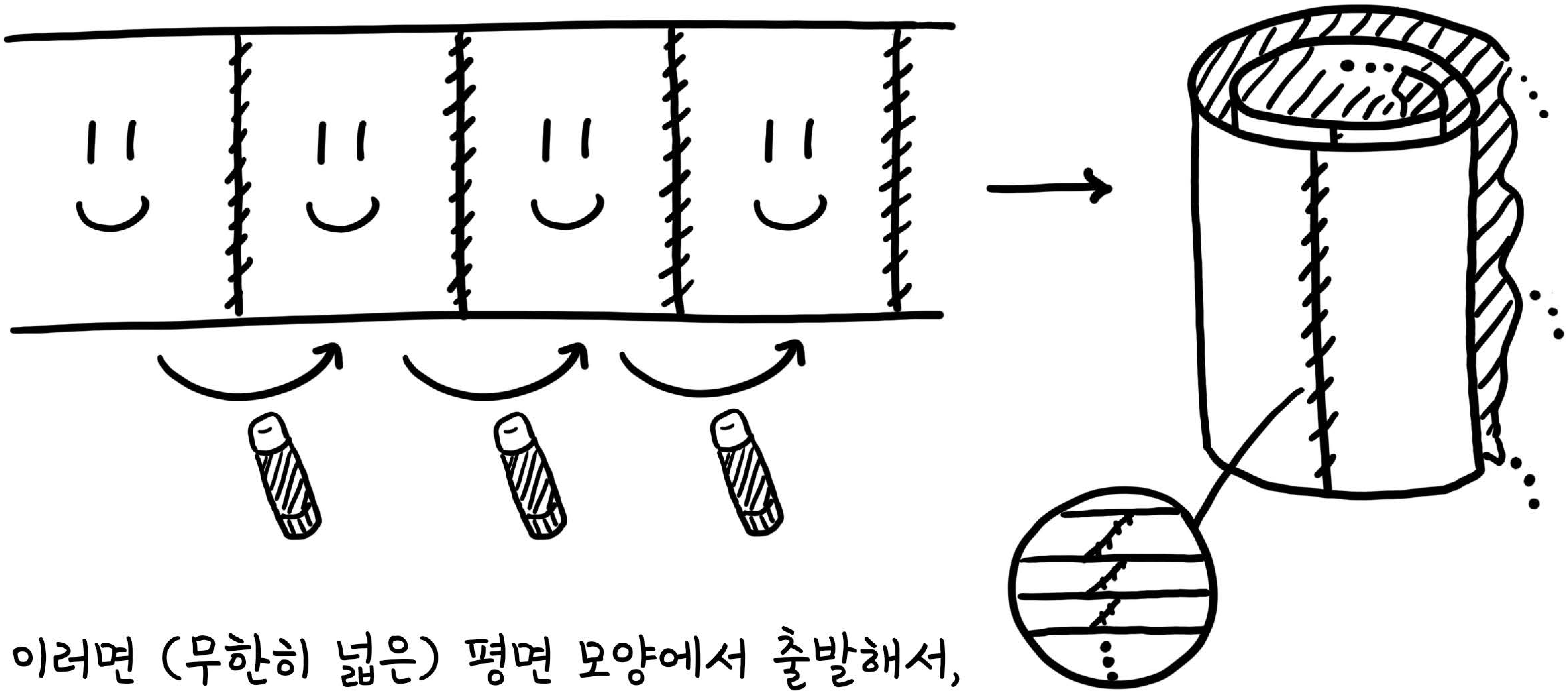
오로지 풀칠만 해서 새 원통을 만들 수 있어요.



흠, 그러면 다른 한 가지 방법을 살펴볼까요?

② 꿰매야 할 양 옆 모서리가 없도록 해도 되겠죠.

양 옆으로 무한히 길게 늘어놓는 거예요!

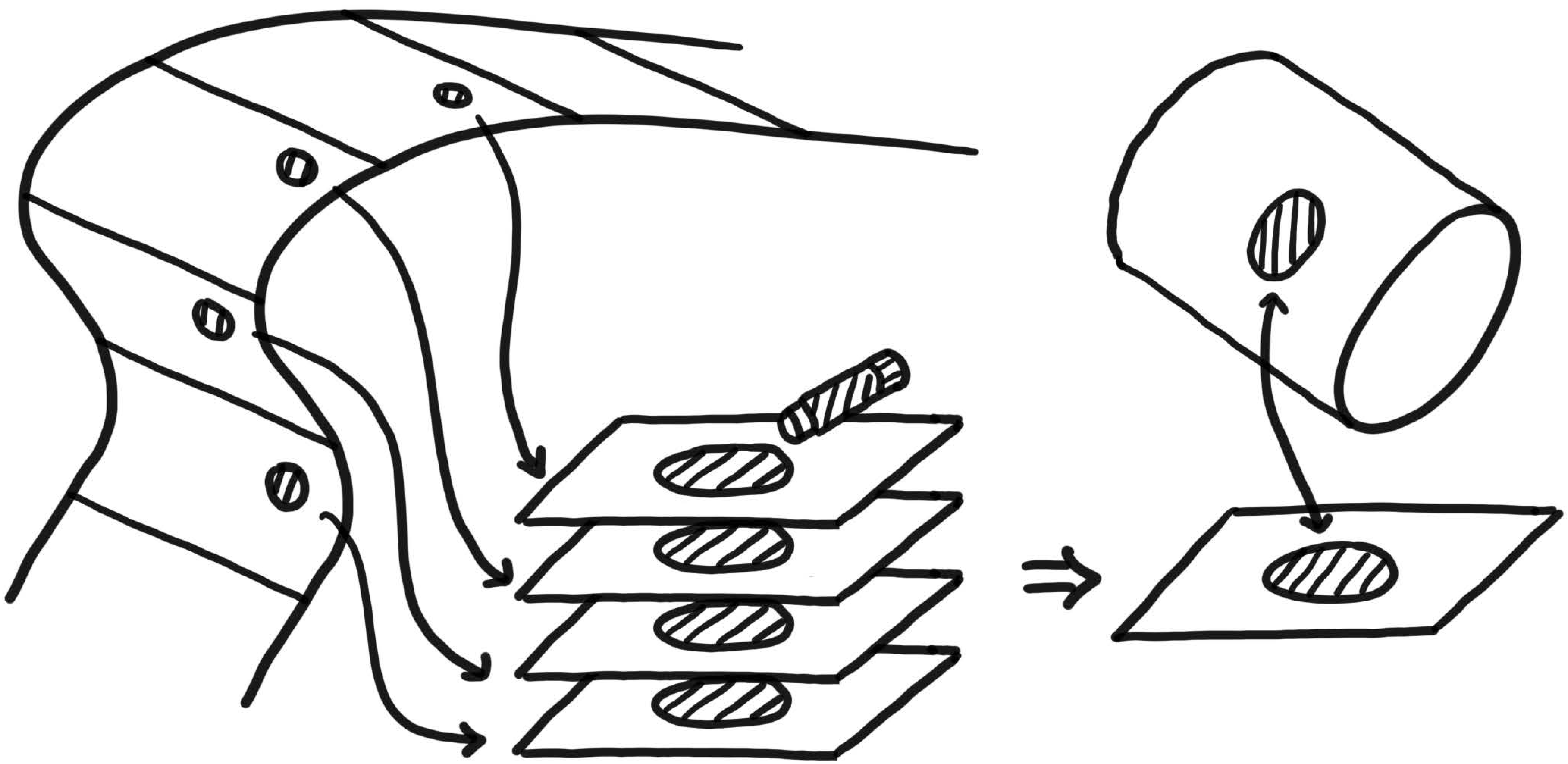


이러면 (무한히 넓은) 평면 모양에서 출발해서,

어디 꿰매지 않고 풀칠해서 돌돌 말기만 하면 원통이 만들어지겠죠.

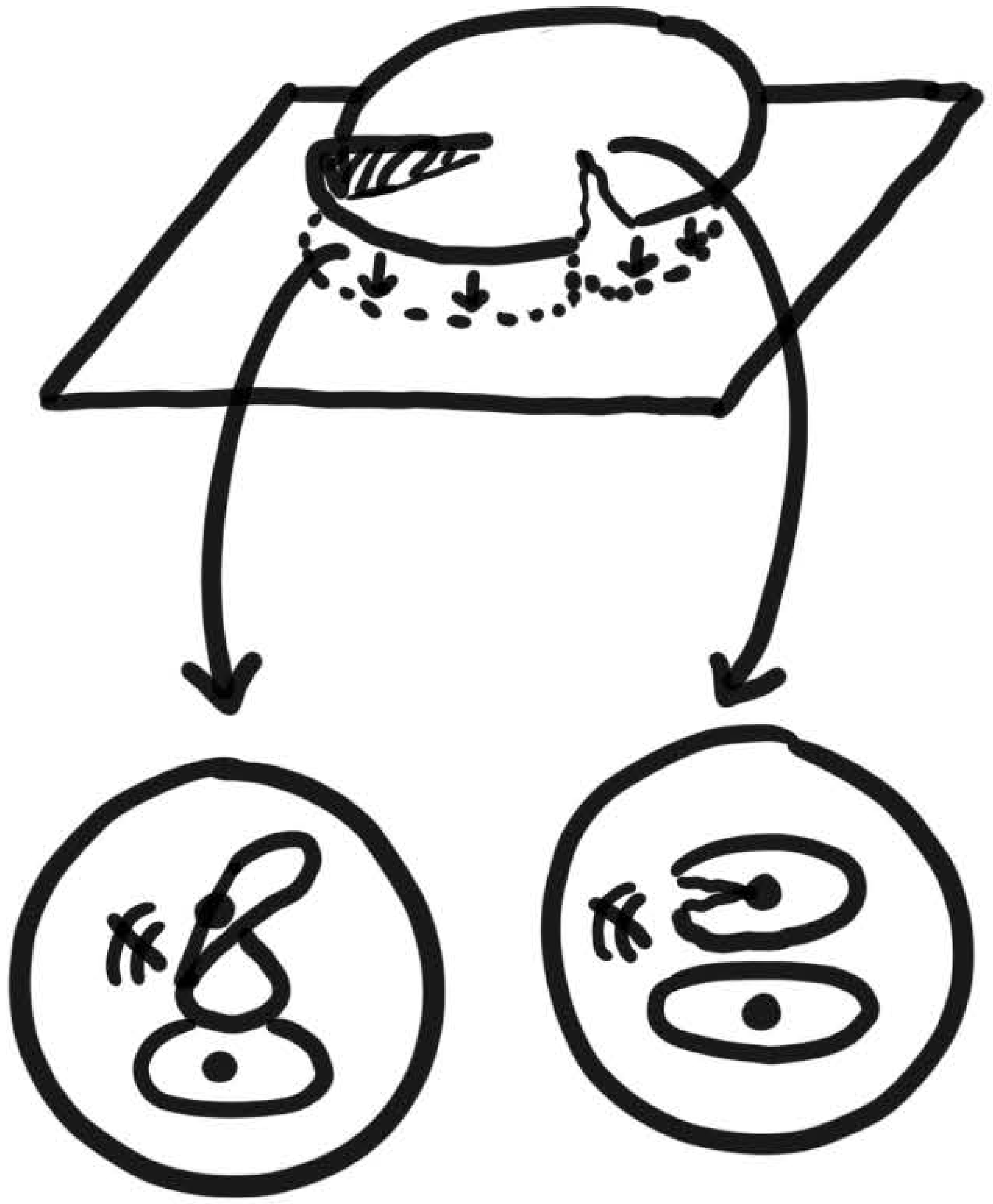

오, 드디어 평면 도형으로부터 바느질 없이 복잡한 곡면을 만들어냈군요. 그럼 여기서 "풀칠하는 방법"을 잘 제시해 줘야겠네요. 풀칠이란 도대체 뭘까요?
...
?
...

풀칠이란 건, 재료 공간의 어떤 부분을 다른 부분과 일치시켜,

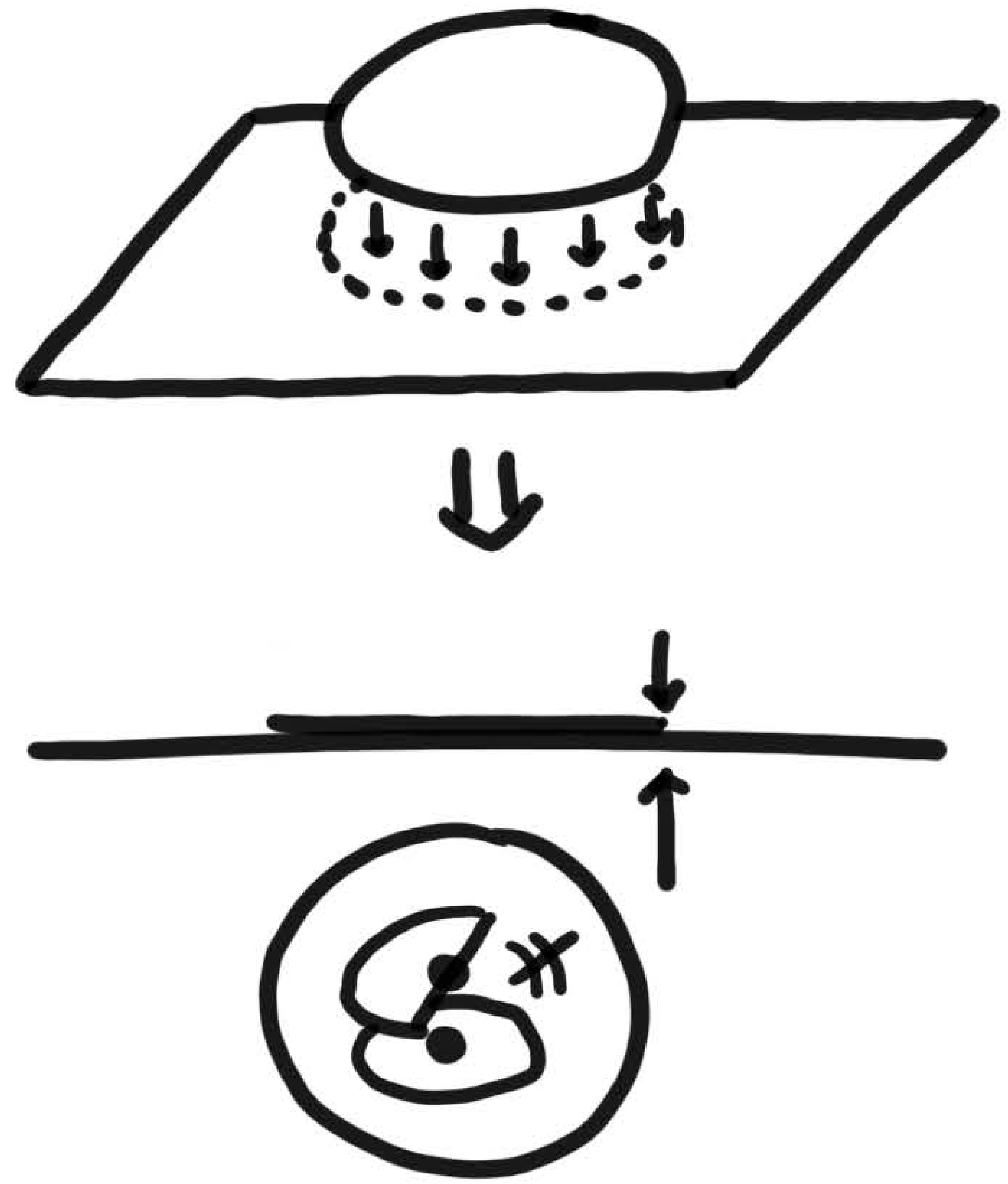


그렇게 딱 붙은 결과물을 새로운 공간으로 보겠다는 거예요.

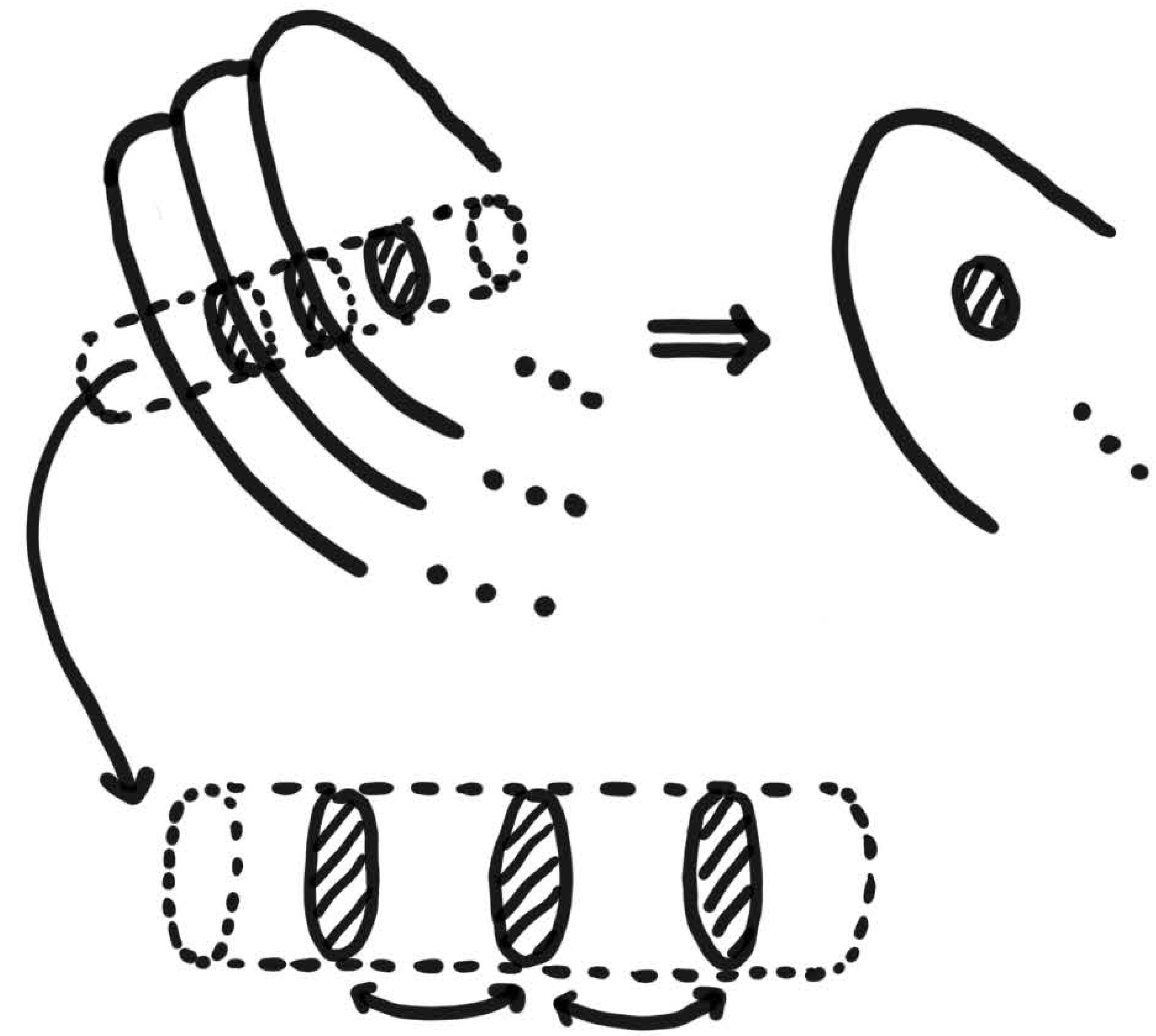
여기서 이어 붙일 때는 물론 조심조심 붙여야겠죠. "물에 젖은" 버전으로 얘기하든 "물기가 마른" 버전으로 얘기하든,



이렇게 찢거나 구겨서 붙이는 건 당연히 안 될 뿐더러,

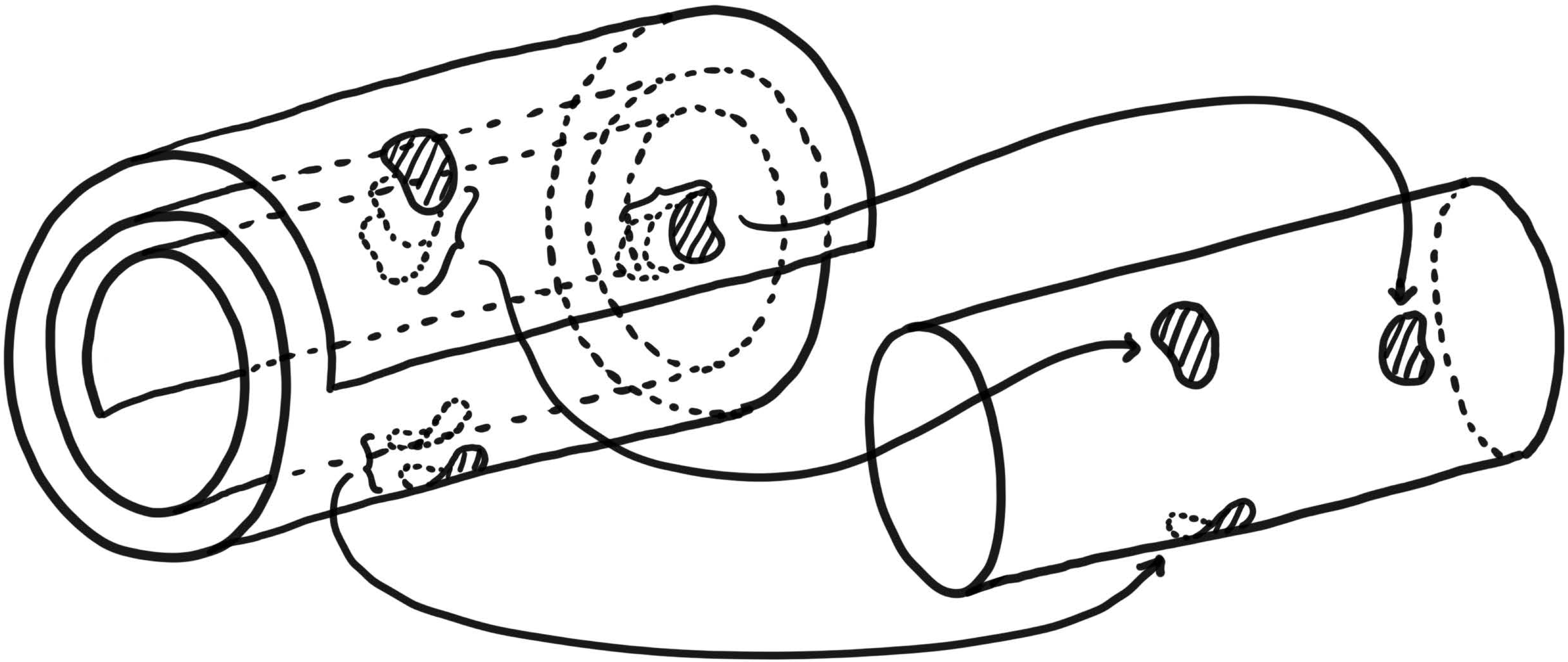


아무리 반듯하게 붙여도 붙이는 조각 성질이 다르면 티가 다 납니다.



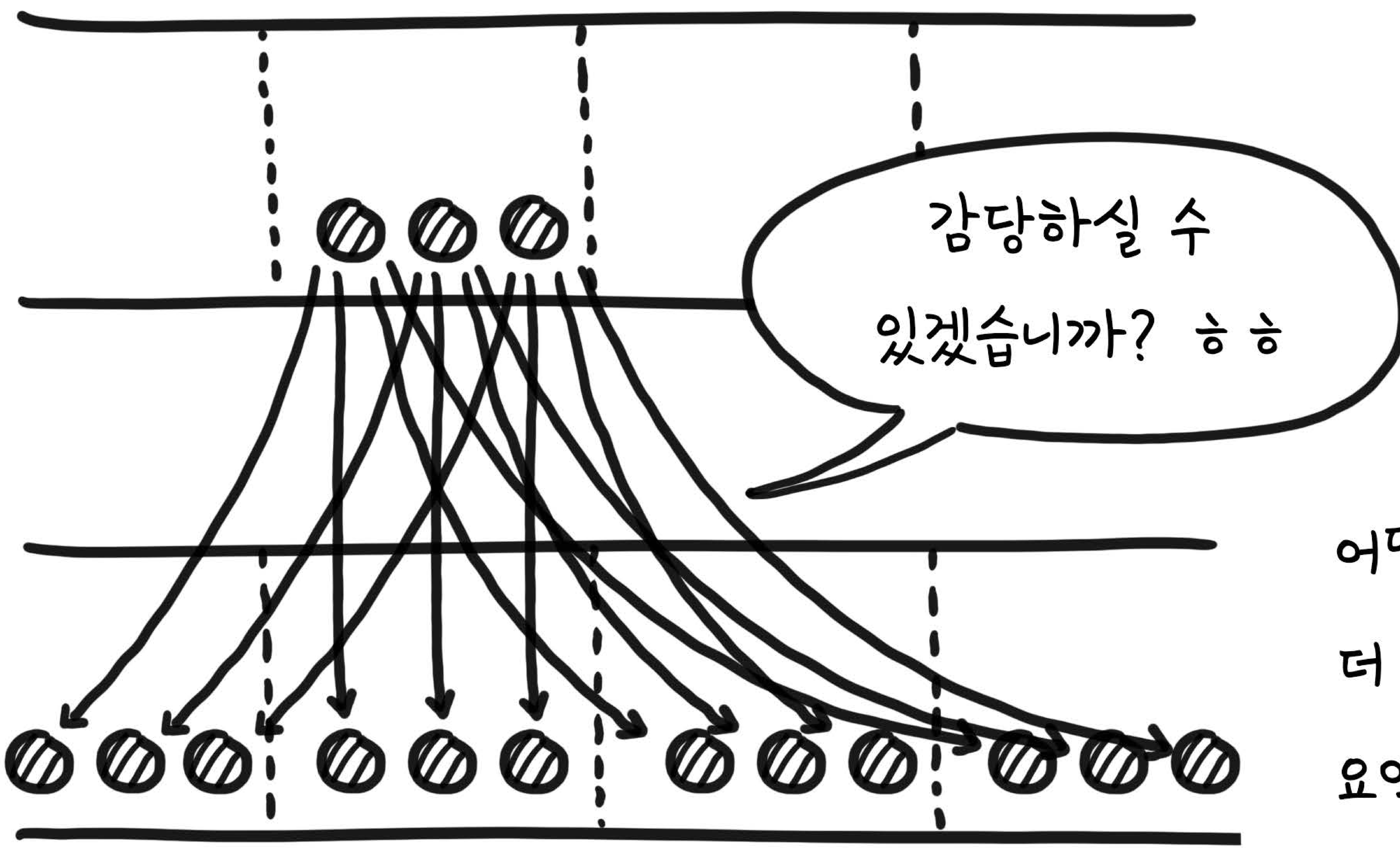
각 지점에서 붙는 조각 모양이 로컬하게 같아야 합니다.

그러면 재료의 각 지점마다 풀칠 정보를 제공해줘야 하는데,



그럼 정보량이 너무 많아요. 한번에 표현할 방법이 없을까요?

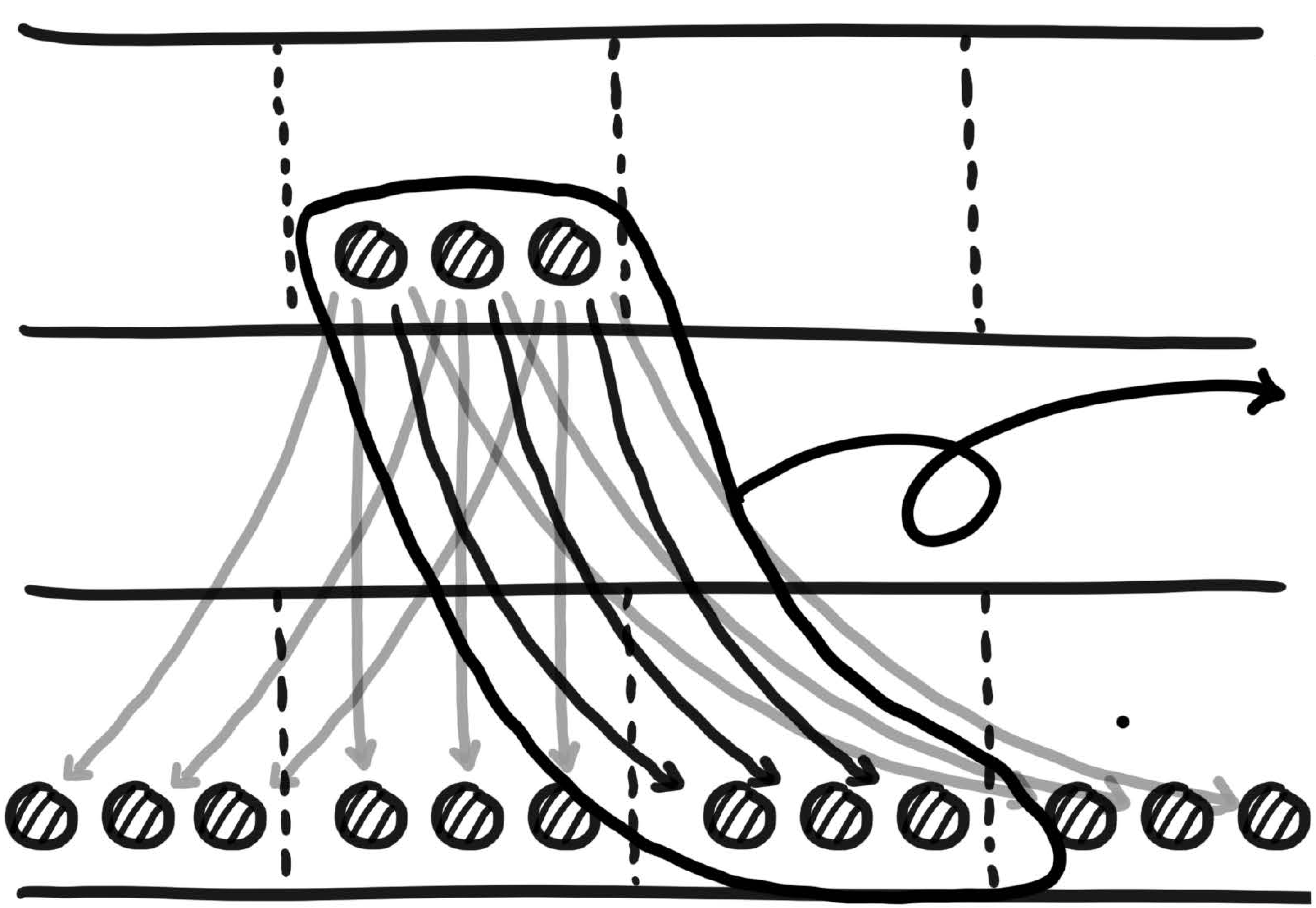
이게 각 지점마다 풀칠 정보를 다 표시하려면 한 세월이에요.



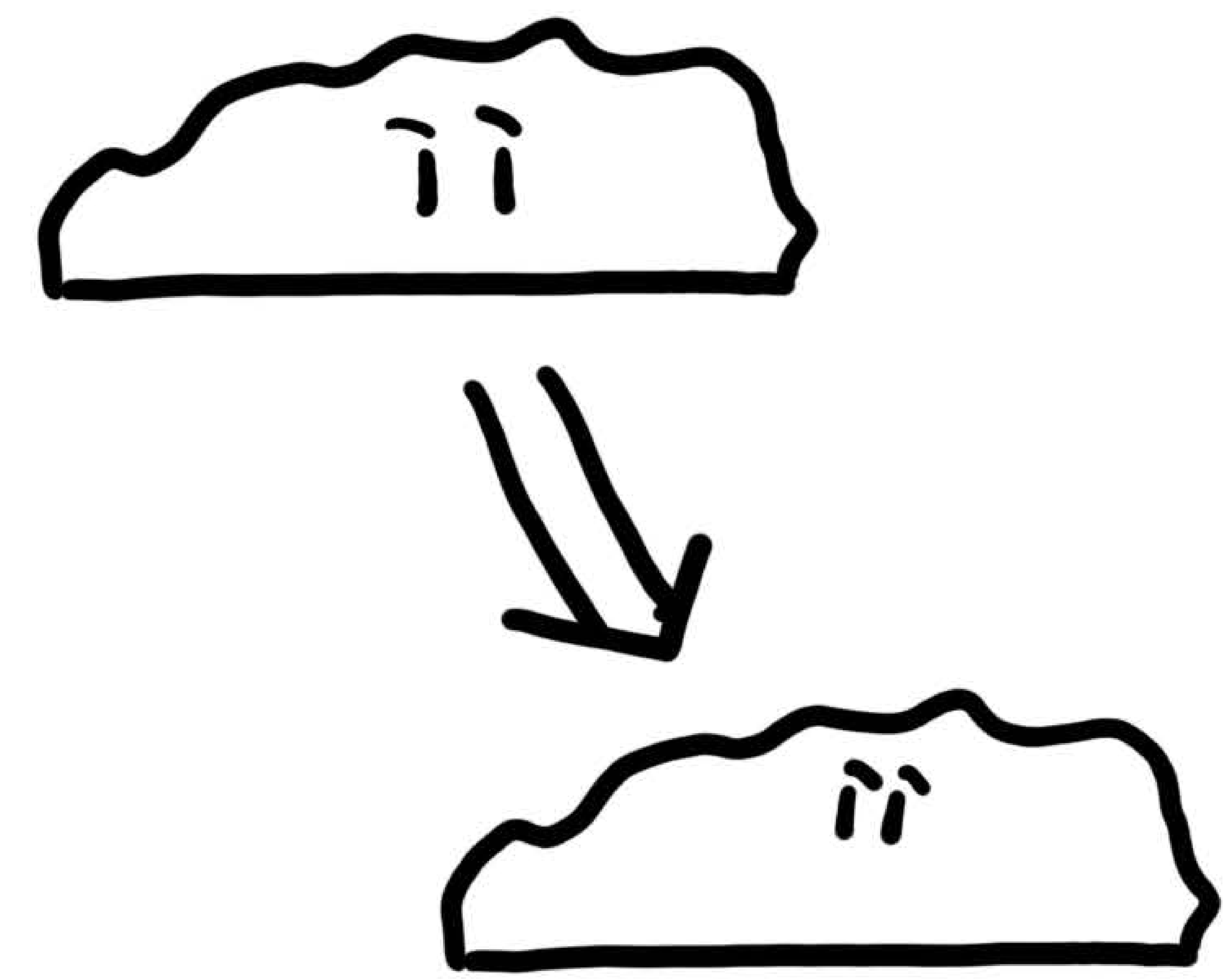
어떻게 하면 이것보다
더 깔끔하게 정보를
요약할 수 있을까요?

먼저, 저 정보 중 “서로 연속적인 정보”만 추려 봅시다.

아래와 같이 일부만 묶어서 보면 조금 덜 복잡해 보이겠죠. 서로 일관된 느낌이고요.

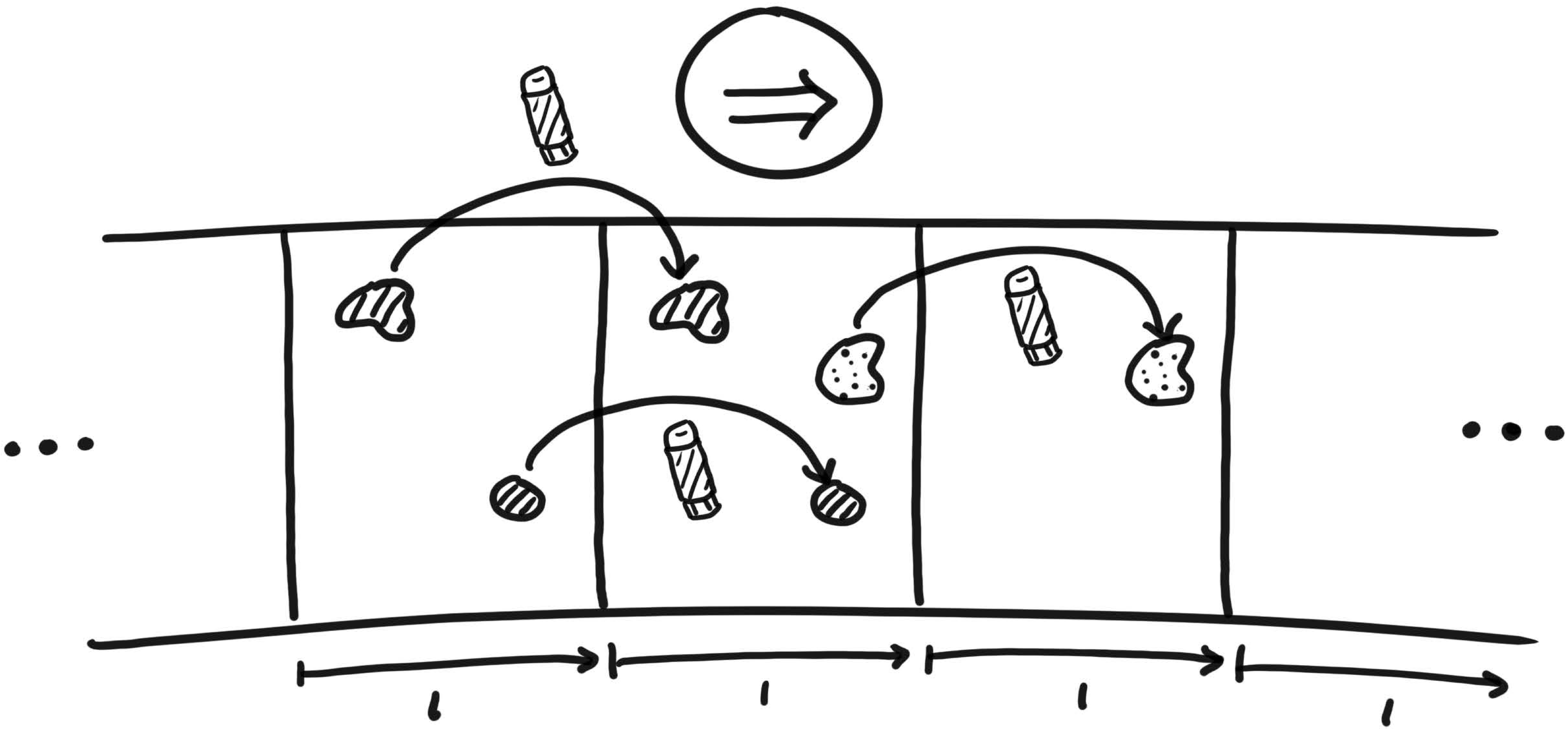


그러니 이런 부분부분 정보를 같이 엮어서,



“옆으로 1칸 민다”는 말 한 문장으로 요약할 수 있겠네요.

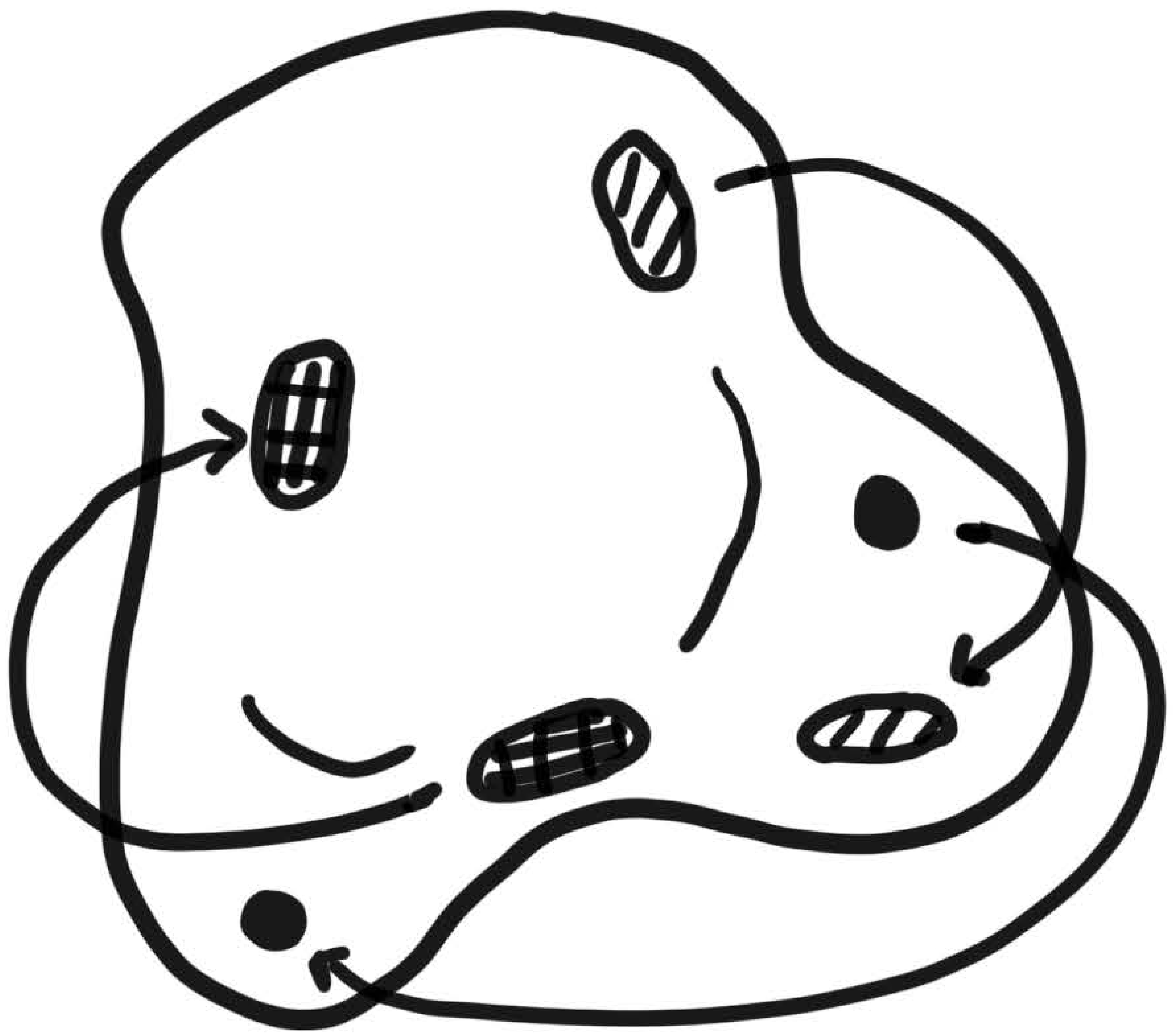
그러니 재료 곡면 전체에 걸쳐 "옆으로 1칸" 주문을 걸면,

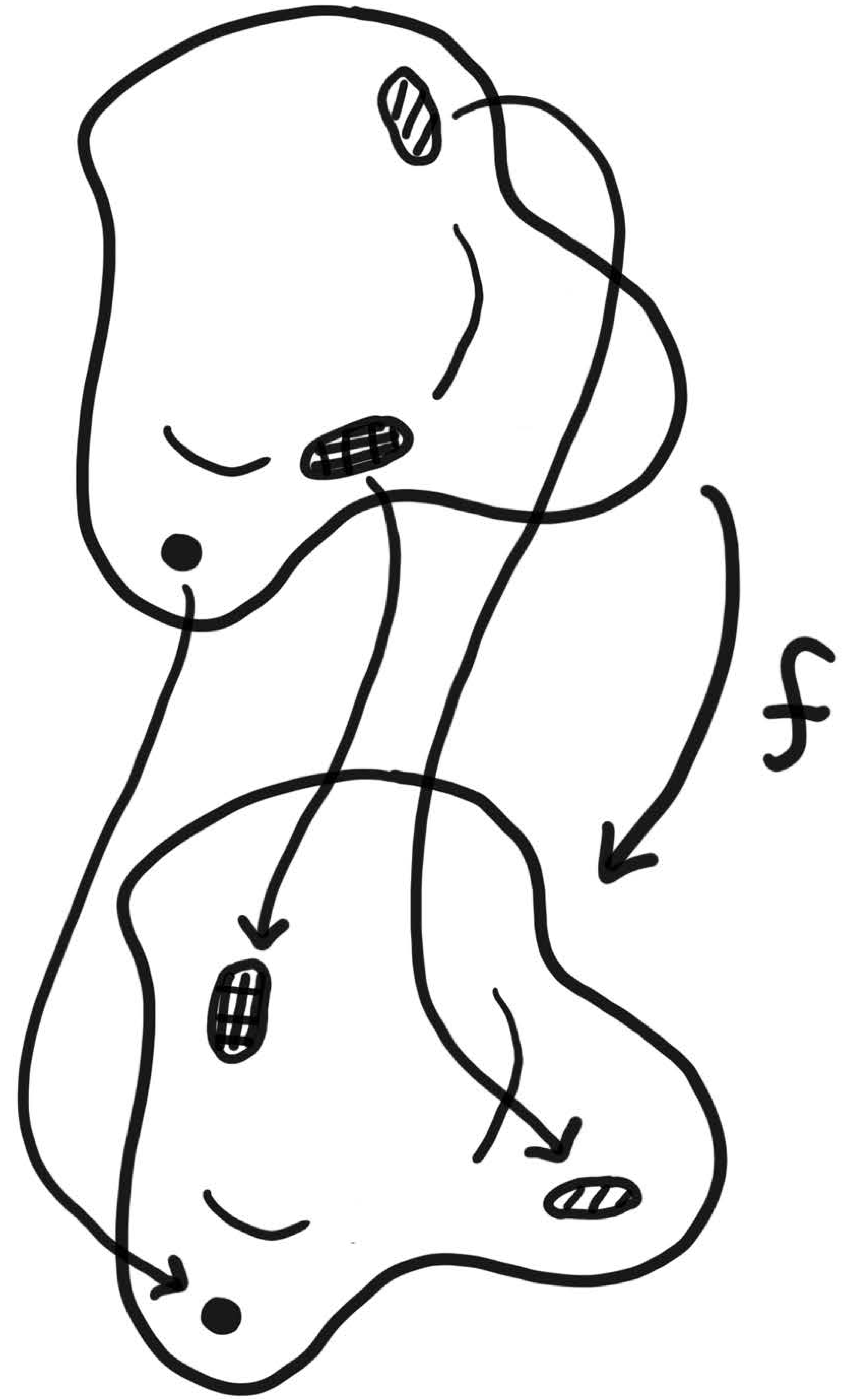


각 부분에게 풀칠 정보 하나씩을 일괄적으로 배정해줄수 있죠.

이렇게, 운이 좋은 경우에는 부분부분의 풀칠 정보를 합쳐서

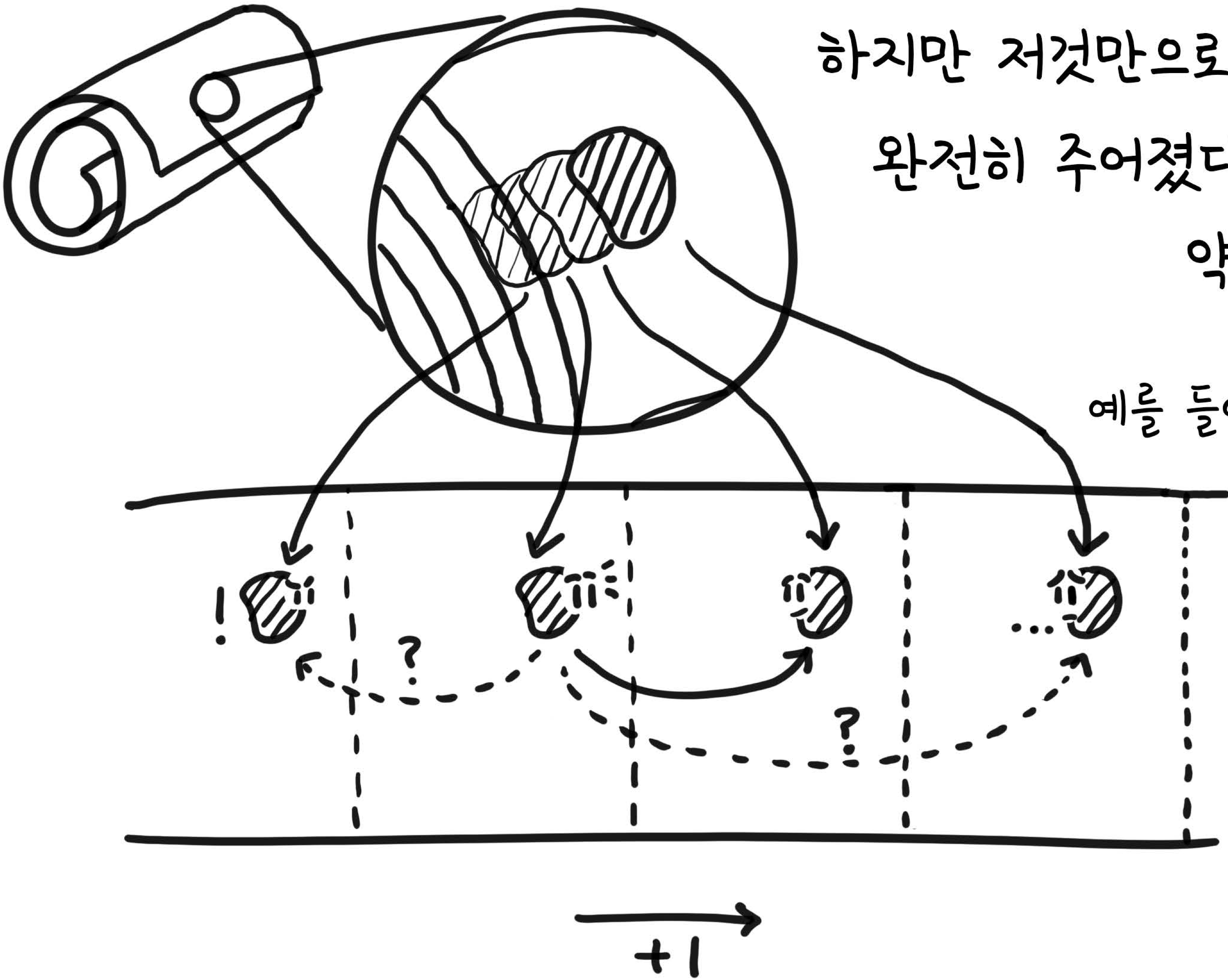
글로벌한 함수로 구현할 수 있어요.





물론 이 함수는 물에 젖은 곡면으로서든,

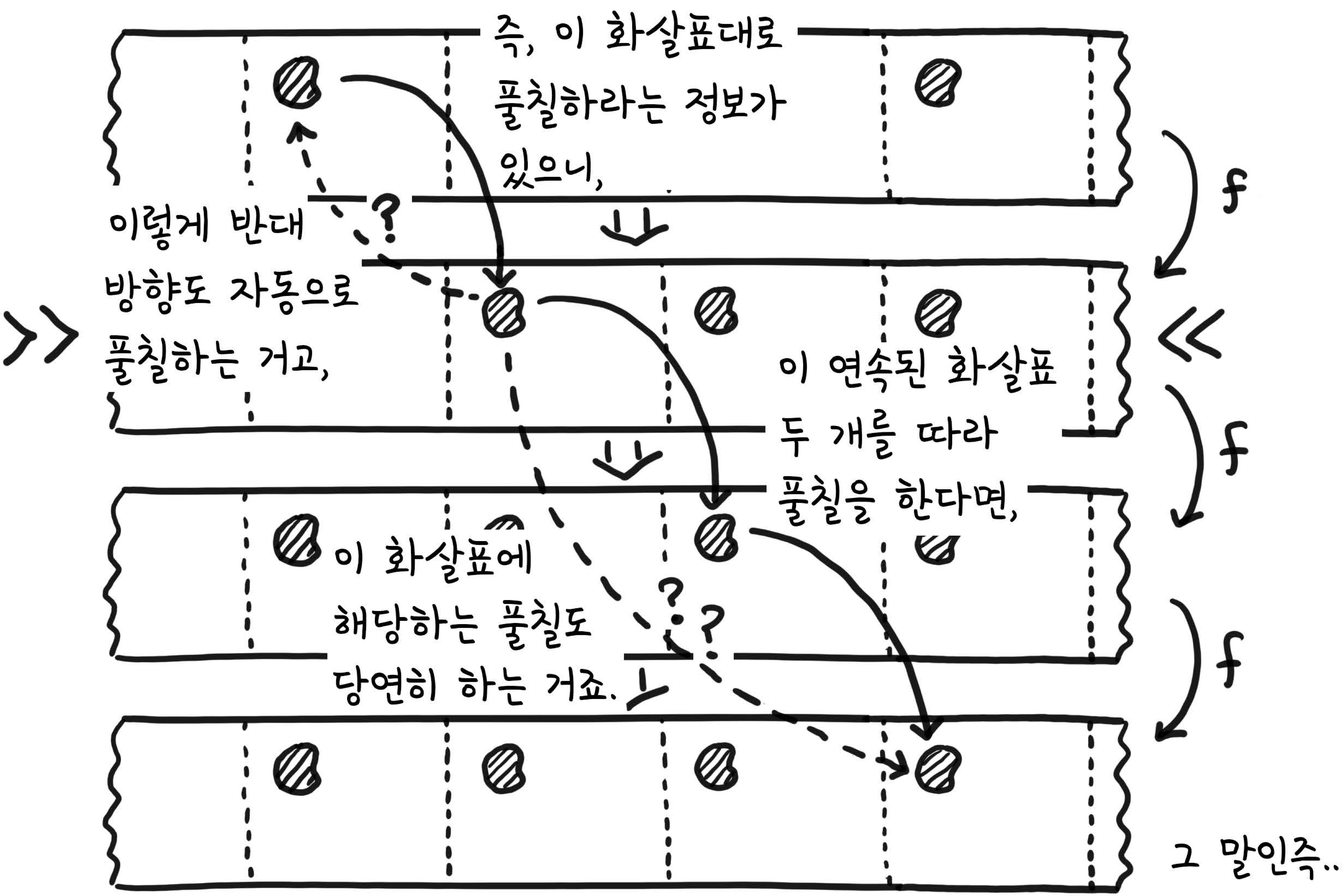
마른 곡면으로서든 형태를 왜곡하지 않는 함수겠죠.



하지만 저것만으로 풀칠 정보가
완전히 주어졌다고 하기에는
약간 아쉬워요.

예를 들어, 이 상황에서
두번째 녀석은
물론 세번째와도
붙여야 하지만,
사실 첫번째나
네번째 녀석과도
붙여야 하니까요.

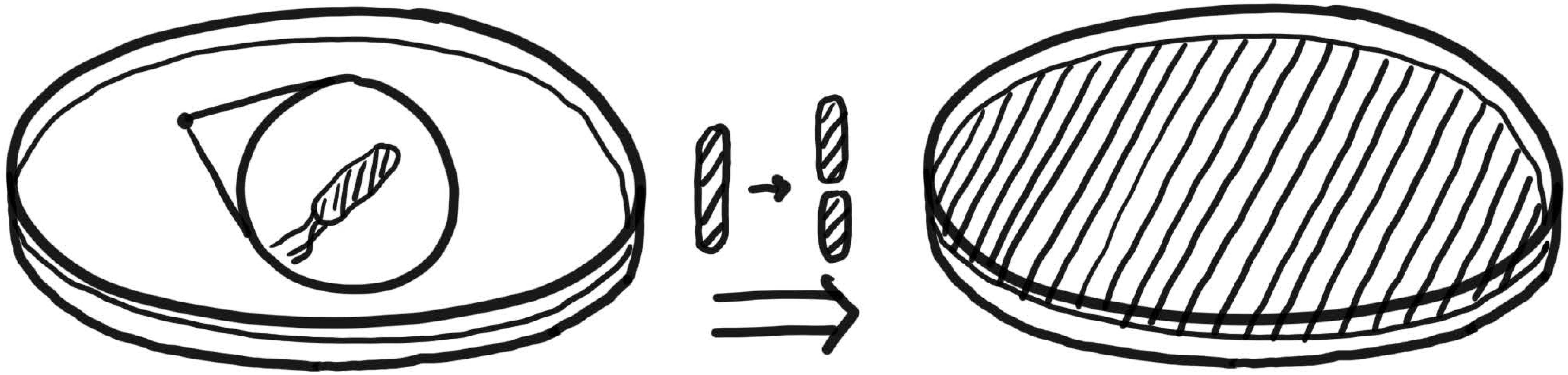

이건 그냥 상식적으로 생각하면 해결될 일입니다. 그 말인즉슨, 다음 두 룰을 인정하기만 하면 된다는 거죠.
①
이렇게 두 번 이어붙였으면,
처음 녀석과 마지막 녀석도 이어붙인거죠 뭐.
②
하나를 다른 거에 붙였으면, 그 다른 거도 처음 거에 붙은 거죠.


즉, 이 화살표대로
풀칠하라는 정보가
있으니,
이렇게 반대
방향도 자동으로
풀칠하는 거고,
이 연속된 화살표
두 개를 따라
풀칠을 한다면,
이 화살표에
해당하는 풀칠도
당연히 하는 거죠.
f
f
f
그 말인즉...

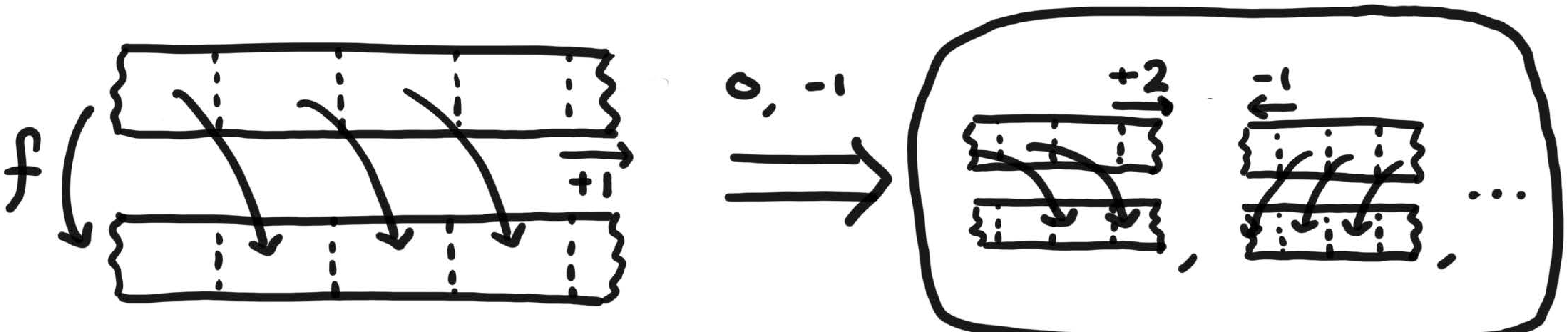
이건 글로벌한 풀칠 방법,
즉 공간 -> 공간 함수
관점에서는 함수의 합성과
역함수에 해당하겠죠.
f
f
f∘f
f
f⁻¹
그러니, "글로벌한 풀칠 방법"의
모임 안에서는 "합성"과 "역함수"
과정을 자유롭게
시행할 수 있어요.
"0", "-1"

일반적으로, 어떤 공간 안에서의 "정보를 잃지 않는 함수"들의 모임 중에서 합성함수와 역함수 과정에 닫혀 있는 모임을 군(group)이라고 부릅니다.
f g
f
fog
!

그러면 박테리아 한 마리가 세포분열을 통해 배지를 꽉 채우듯,



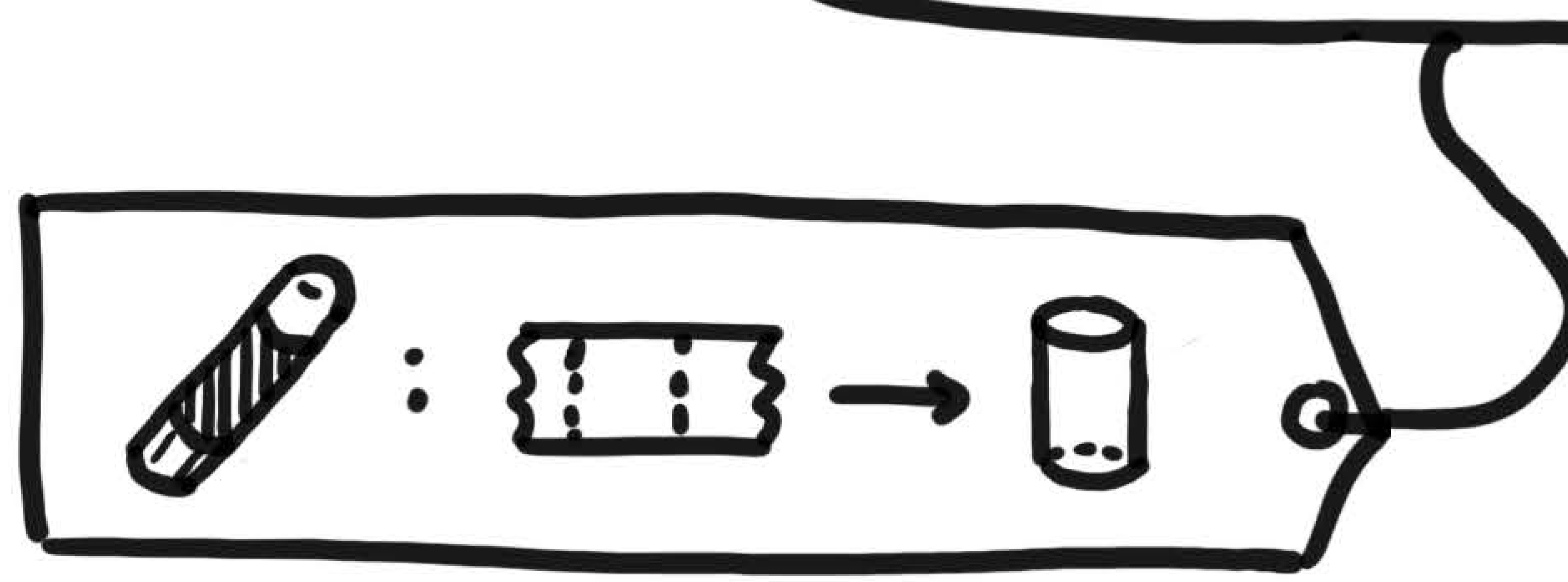
“옆으로 한 칸” 함수로부터 “합성/역함수”를 통해 만들 수 있는 걸 다 모아보면,



이렇게 필요한 풀칠 정보를

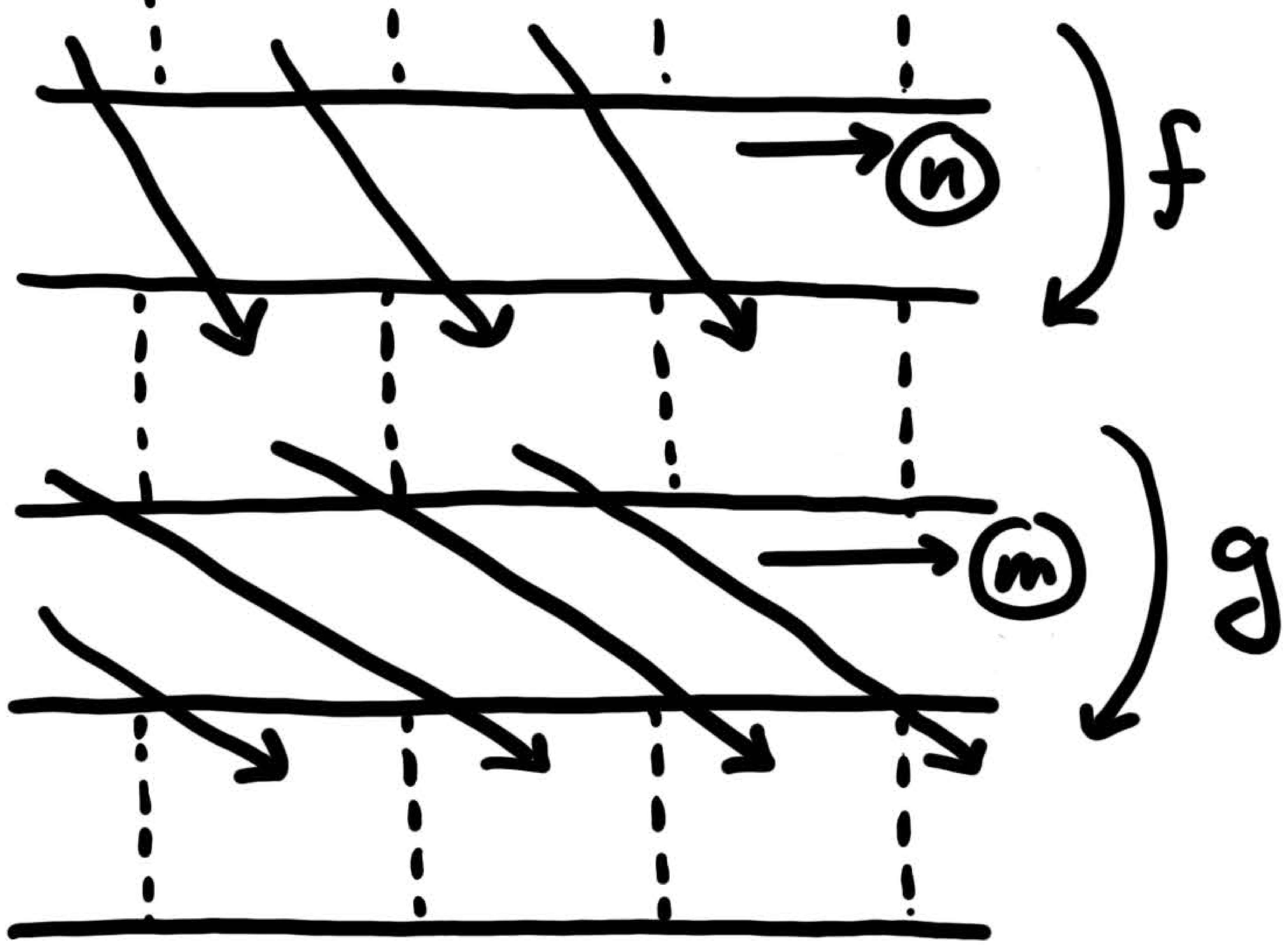
하나의 “군”으로

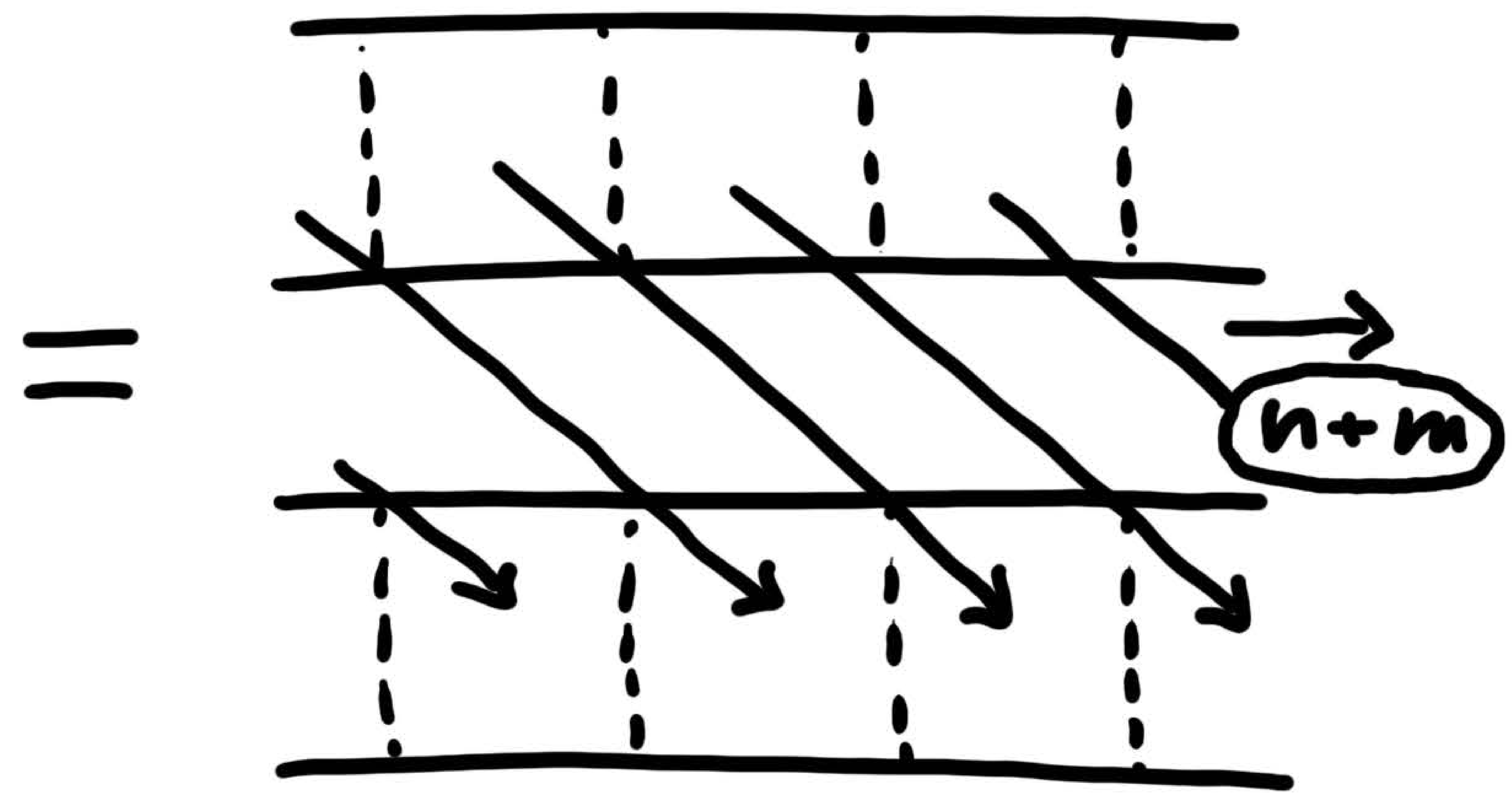
표현할 수 있습니다.



그런데 이 풀칠 방법 군은 사실 우리한테 익숙한 존재예요.

“n만큼 옆으로 밀기”를 정수 n과 대응시키면.

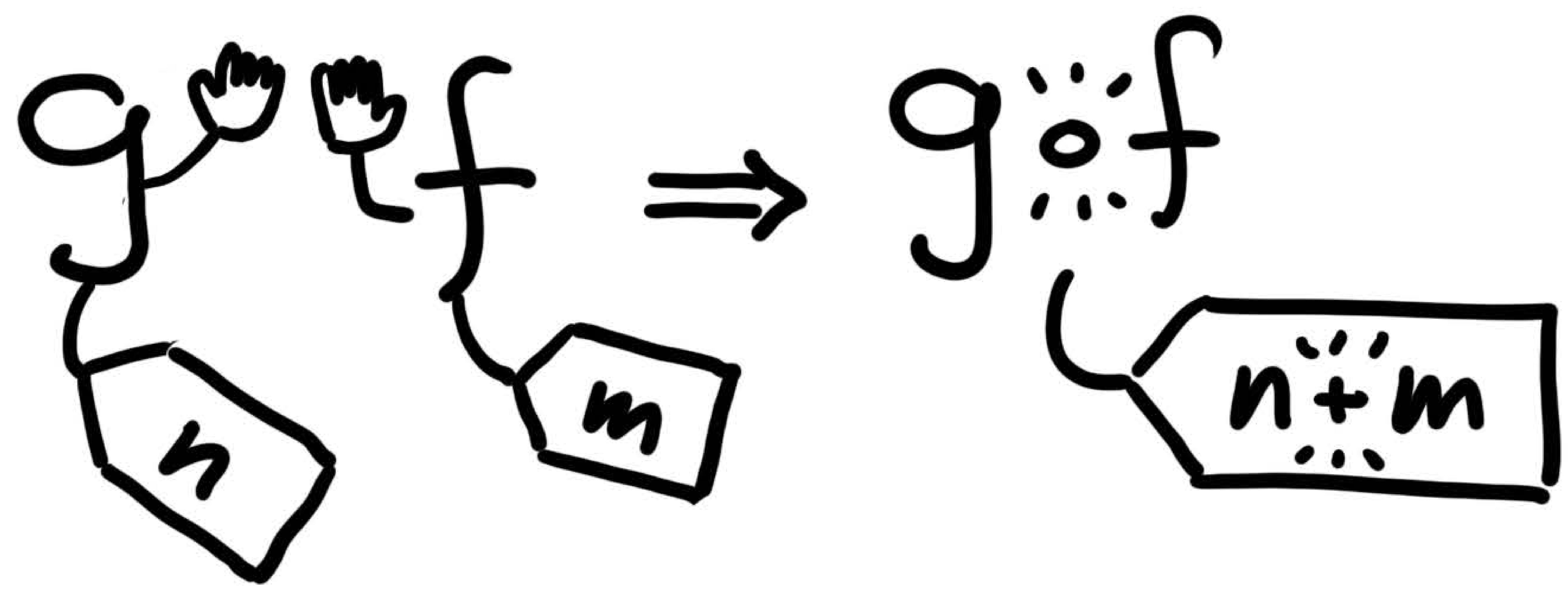




이렇게, 풀칠 방법의

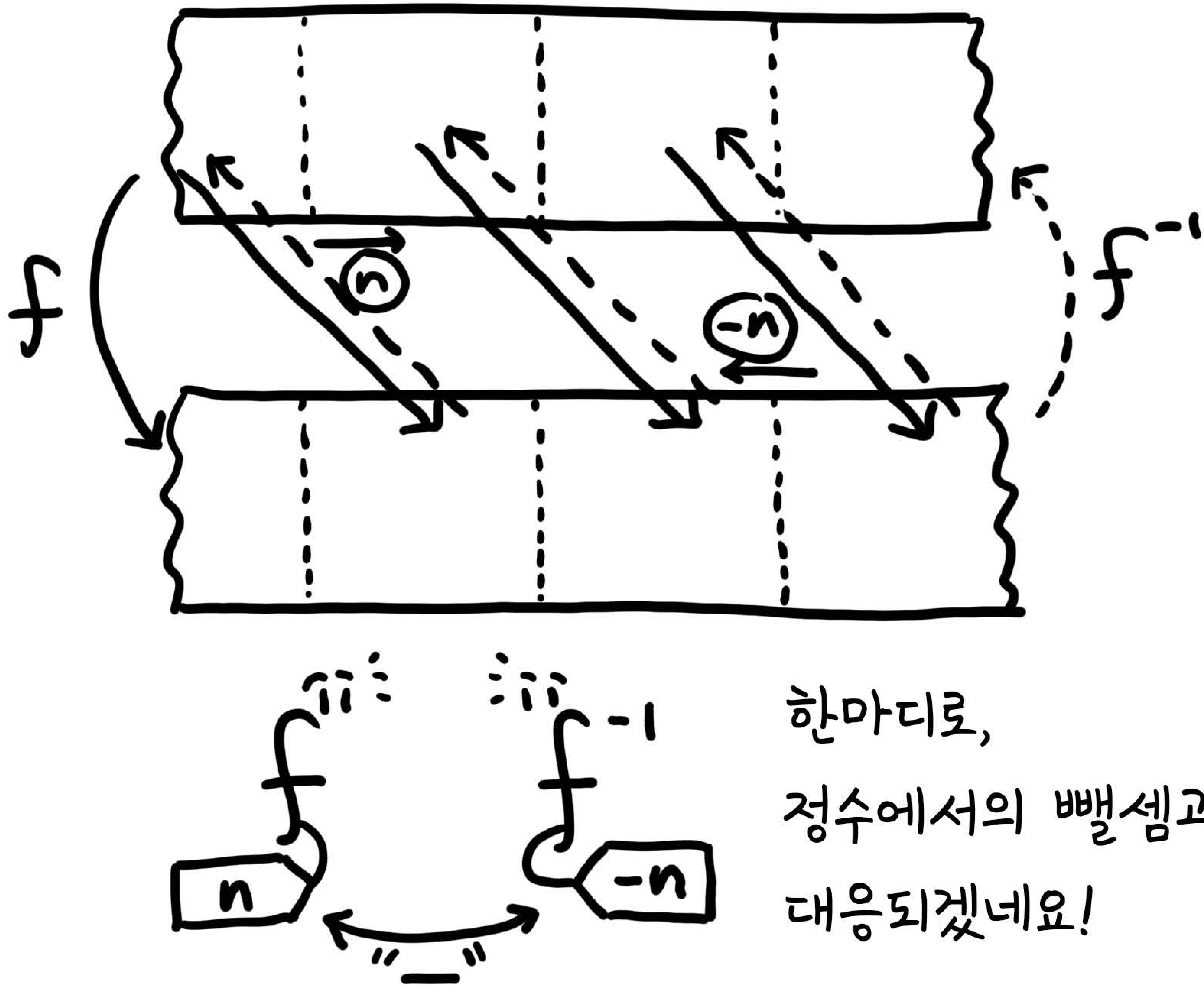
“함수의 합성”은

정수의 덧셈과 대응됩니다.



그리고 역함수를 취하면 대응하는 정수값에는

마이너스가 붙는 효과가 나타나겠죠.

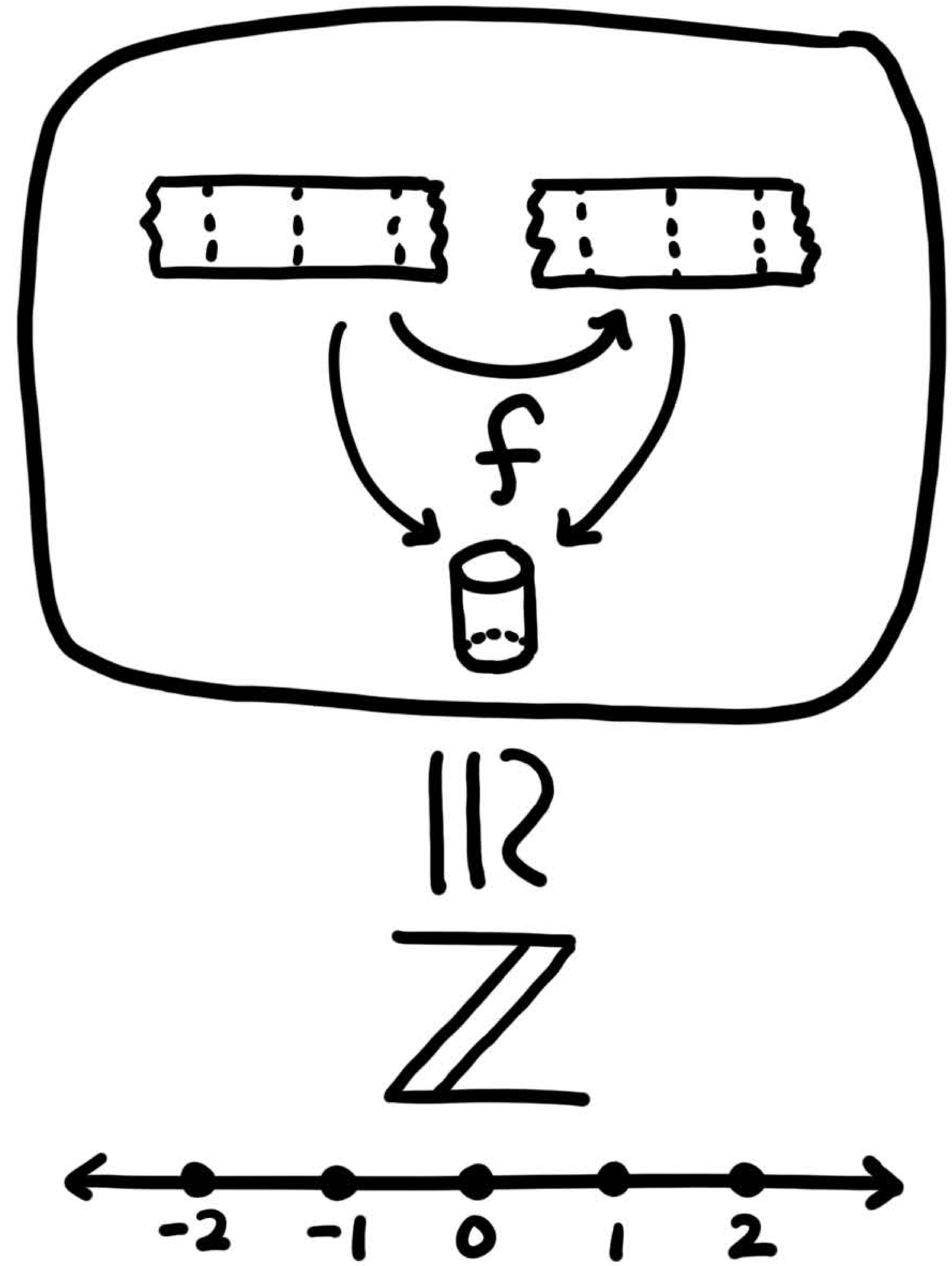


한마디로,

정수에서의 뺄셈과

대응되겠네요!

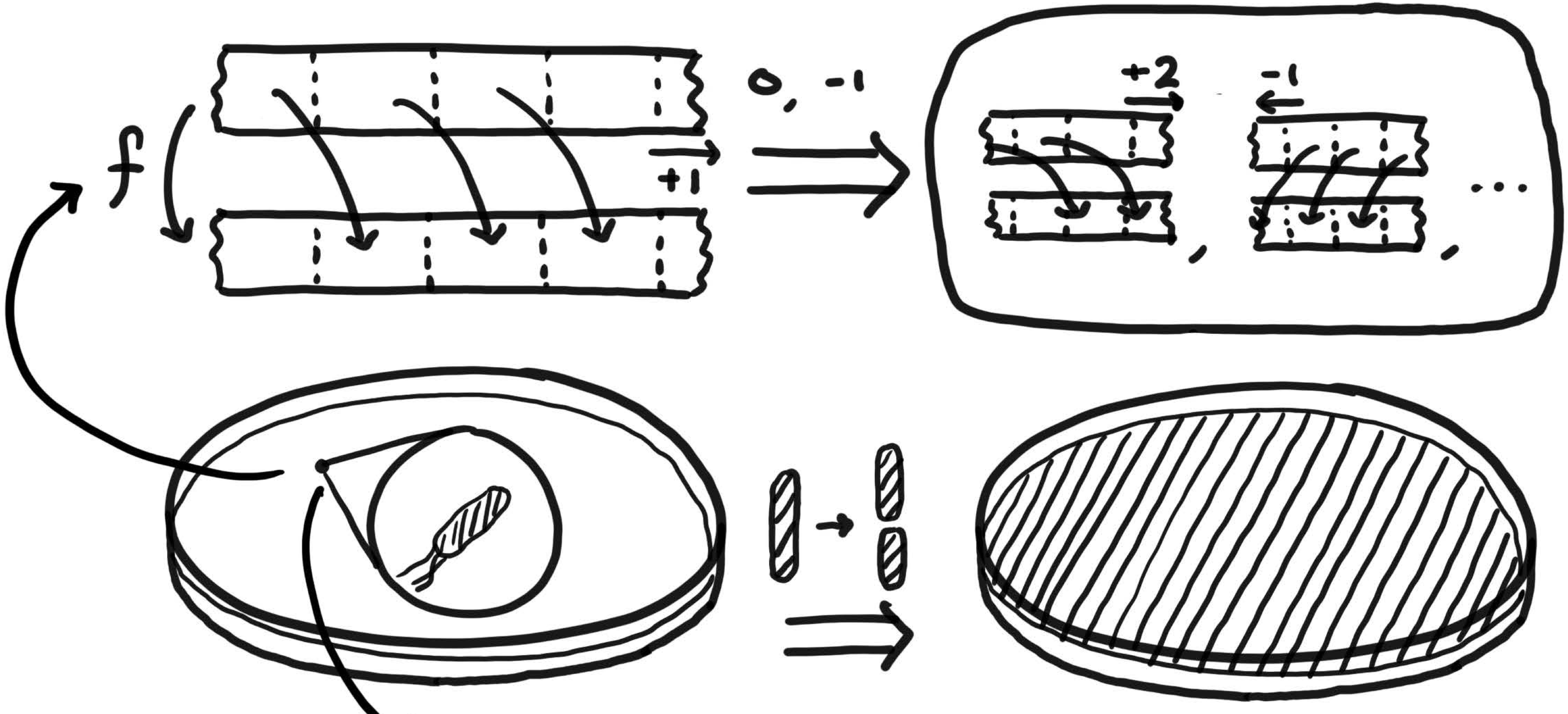
그러니 "풀칠 방법 군"은,



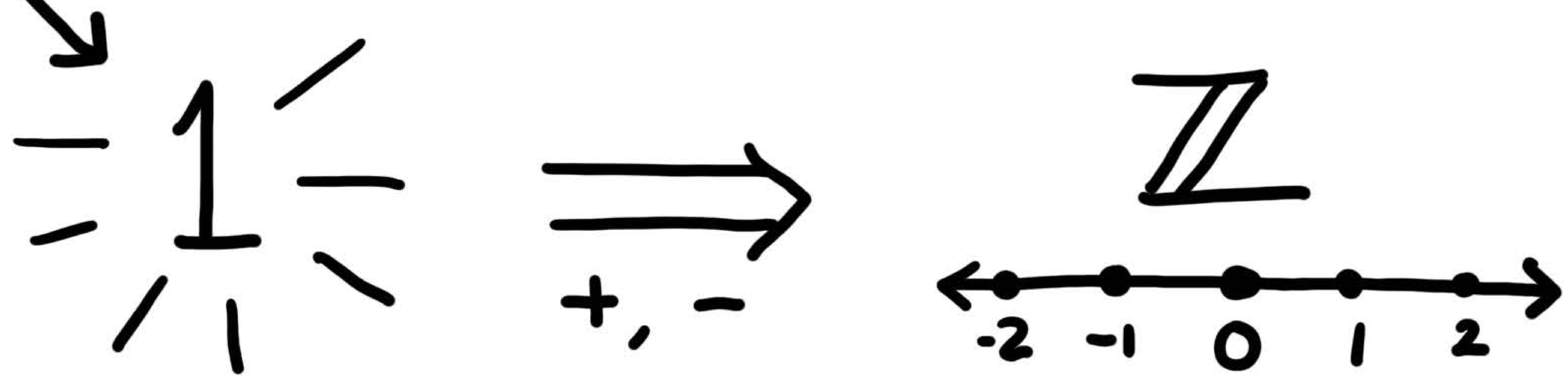
덧셈, 뺄셈을 갖춘

정수 집합과 마찬가지예요!

그러니 아까 박테리아 비유에 "옆으로 1칸" 함수를 대입한 건,

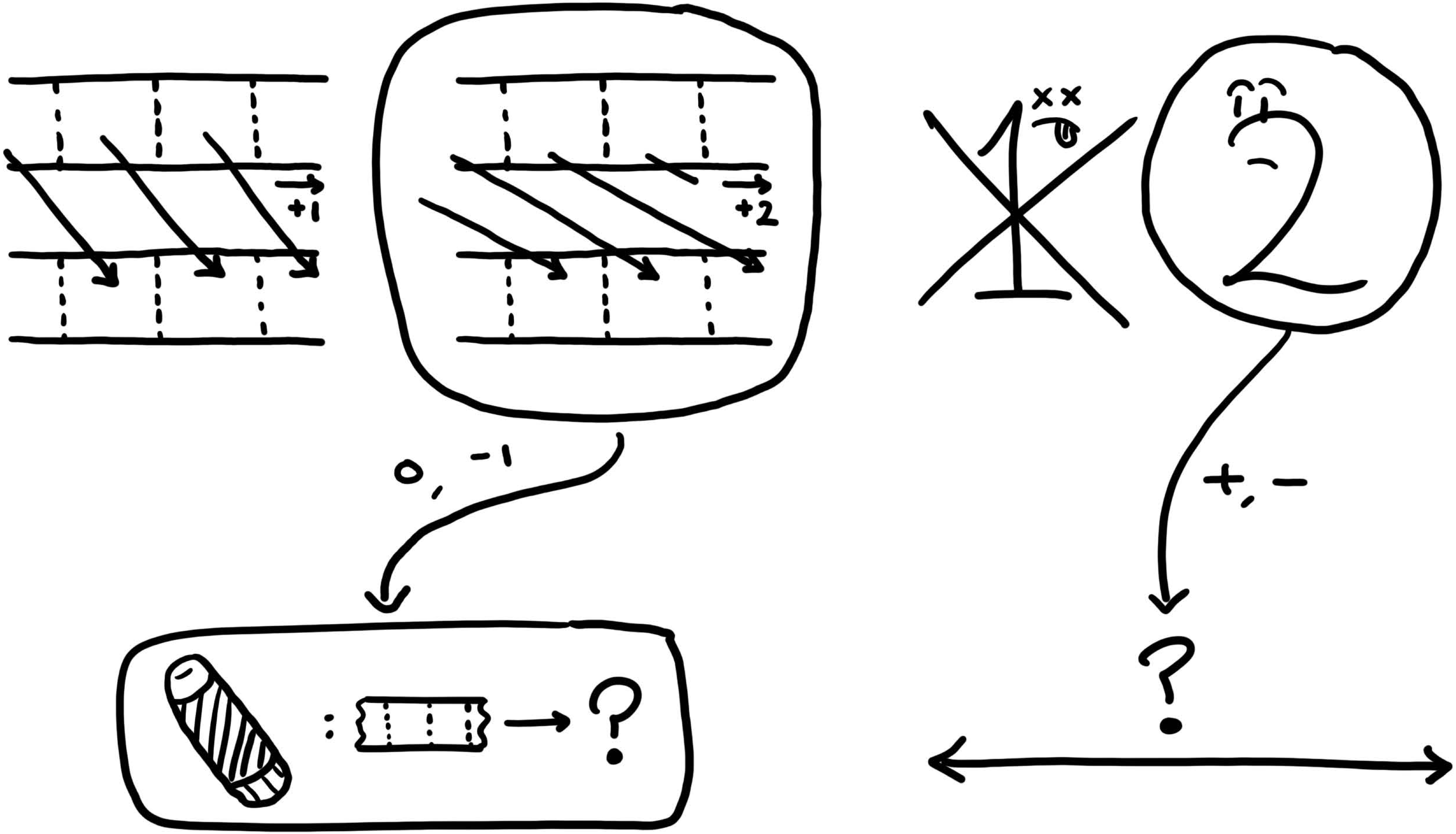


1을 가지고
덧셈/뺄셈만
사용해서,



전체 정수를
만들 수 있다는
얘기와 똑같아요.

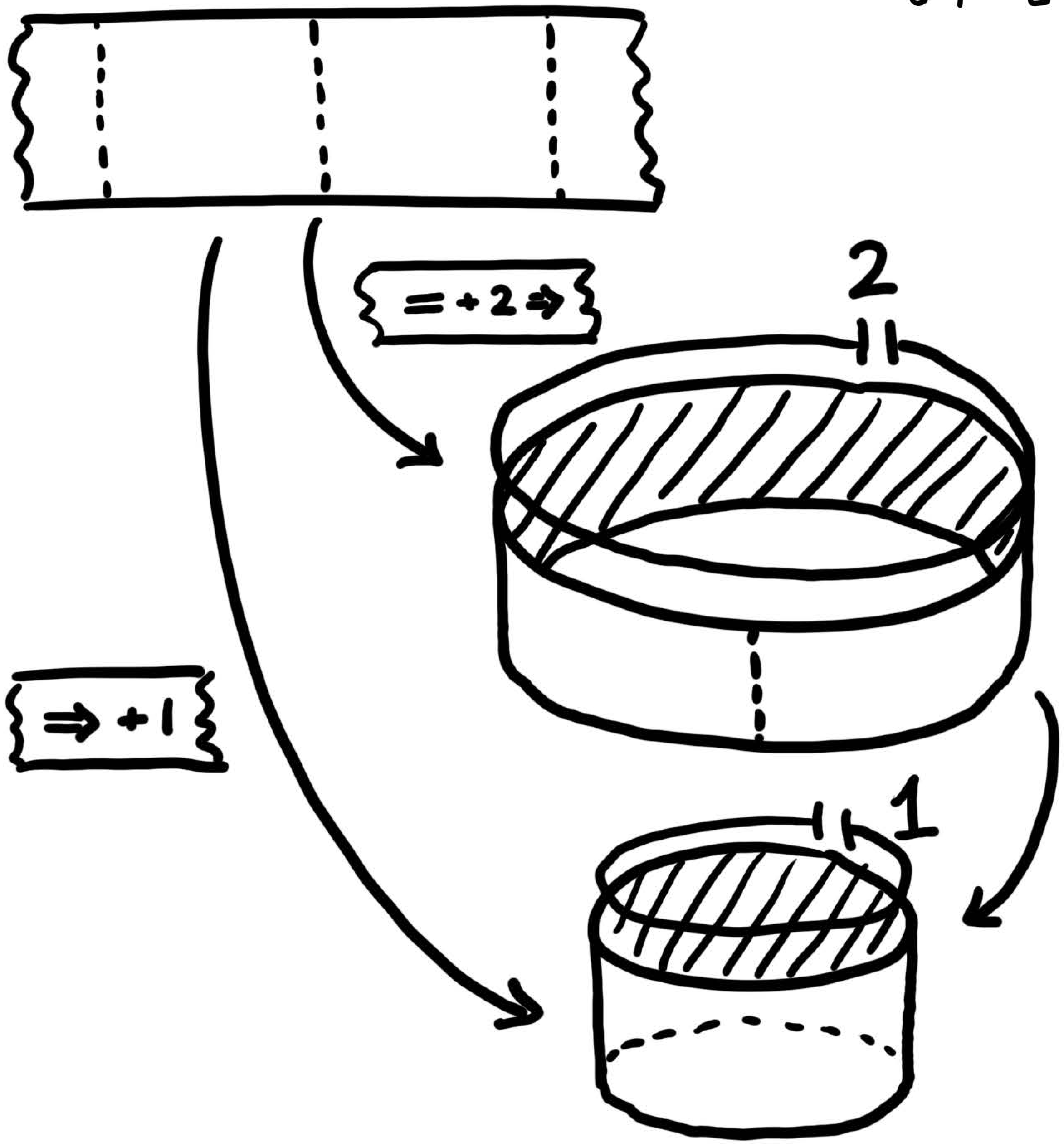
그러면, "1칸 옆으로" 혹은 1 대신, "2칸 옆으로" 및 2를 가지고 군을 만들면...

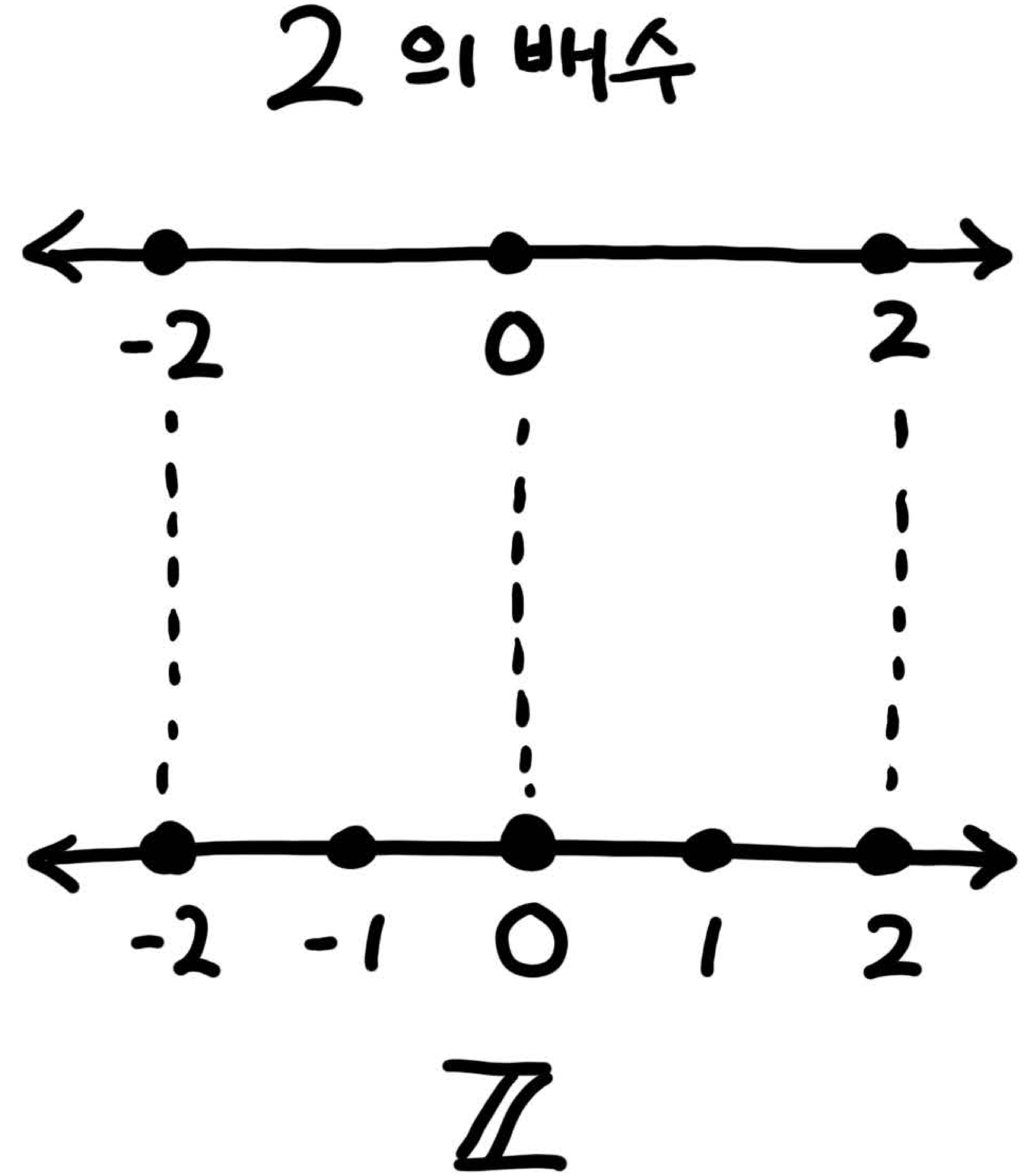


과연 어떤 풀칠을 얻게 될까요?

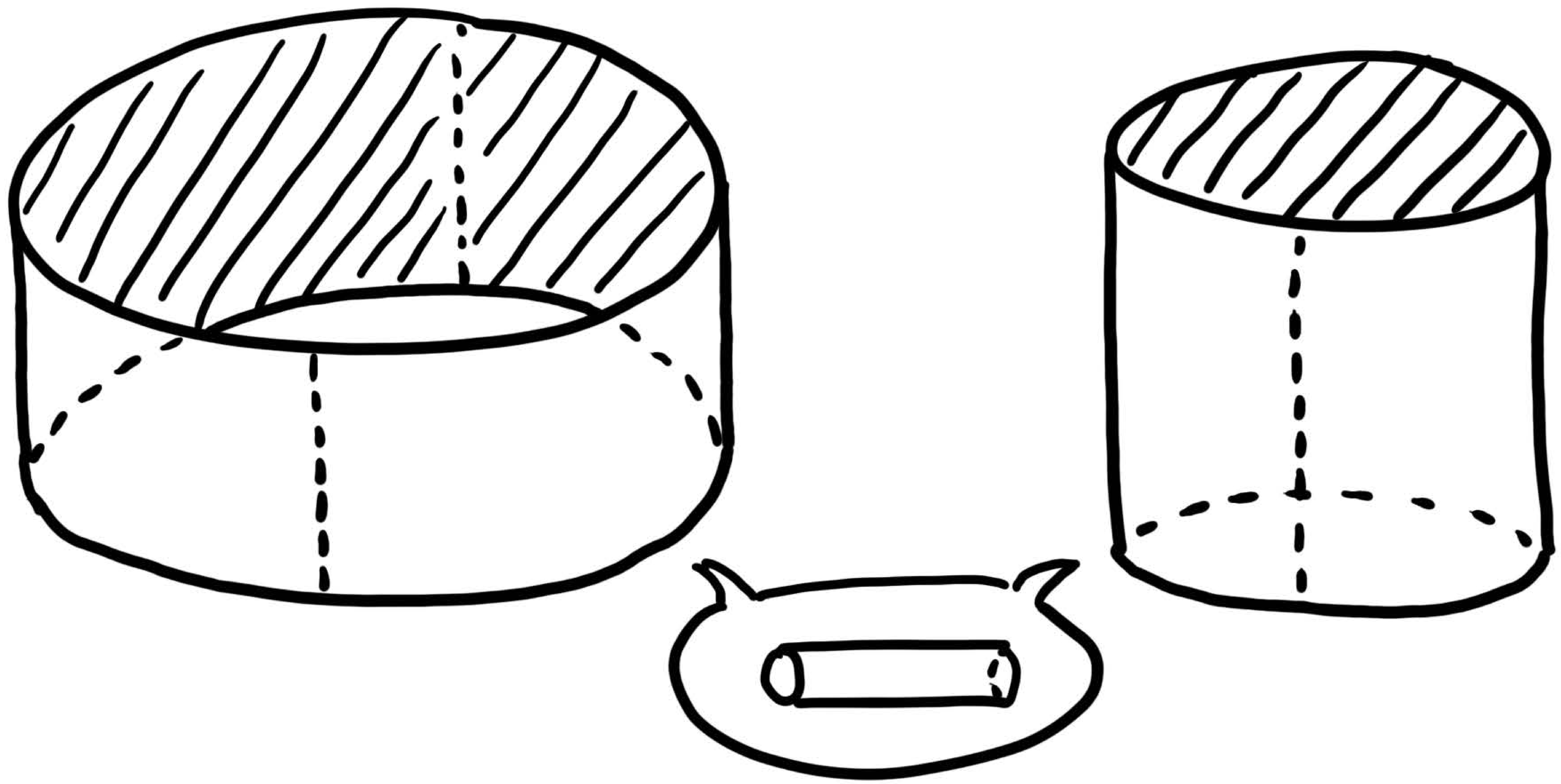
곡면 입장에서는, 둘레 1까지 감지는 못하고 둘레 2짜리 원통이 만들어지겠죠.

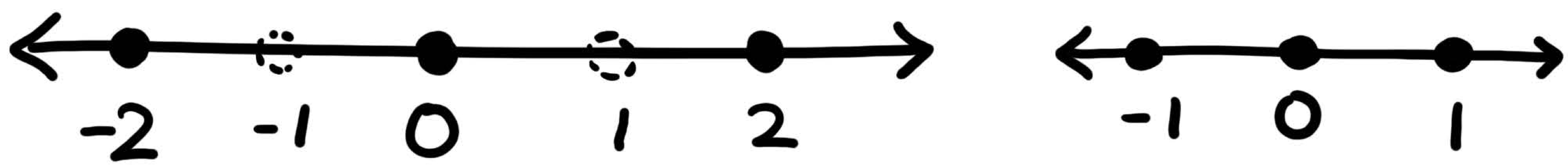
그리고 정수 입장에서도 2의 배수만 만들어집니다.





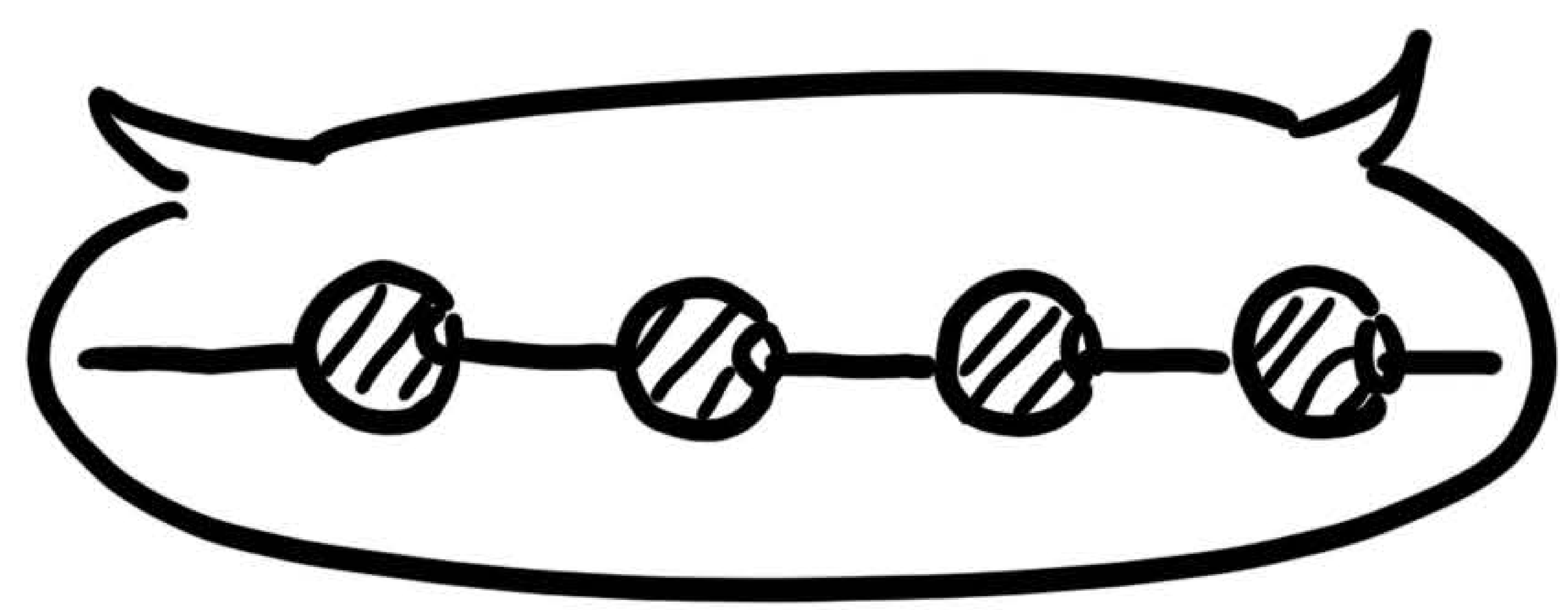
사실, 정확한 둘레에 목숨 걸지 않으면 둘 다 원통은 원통이죠.





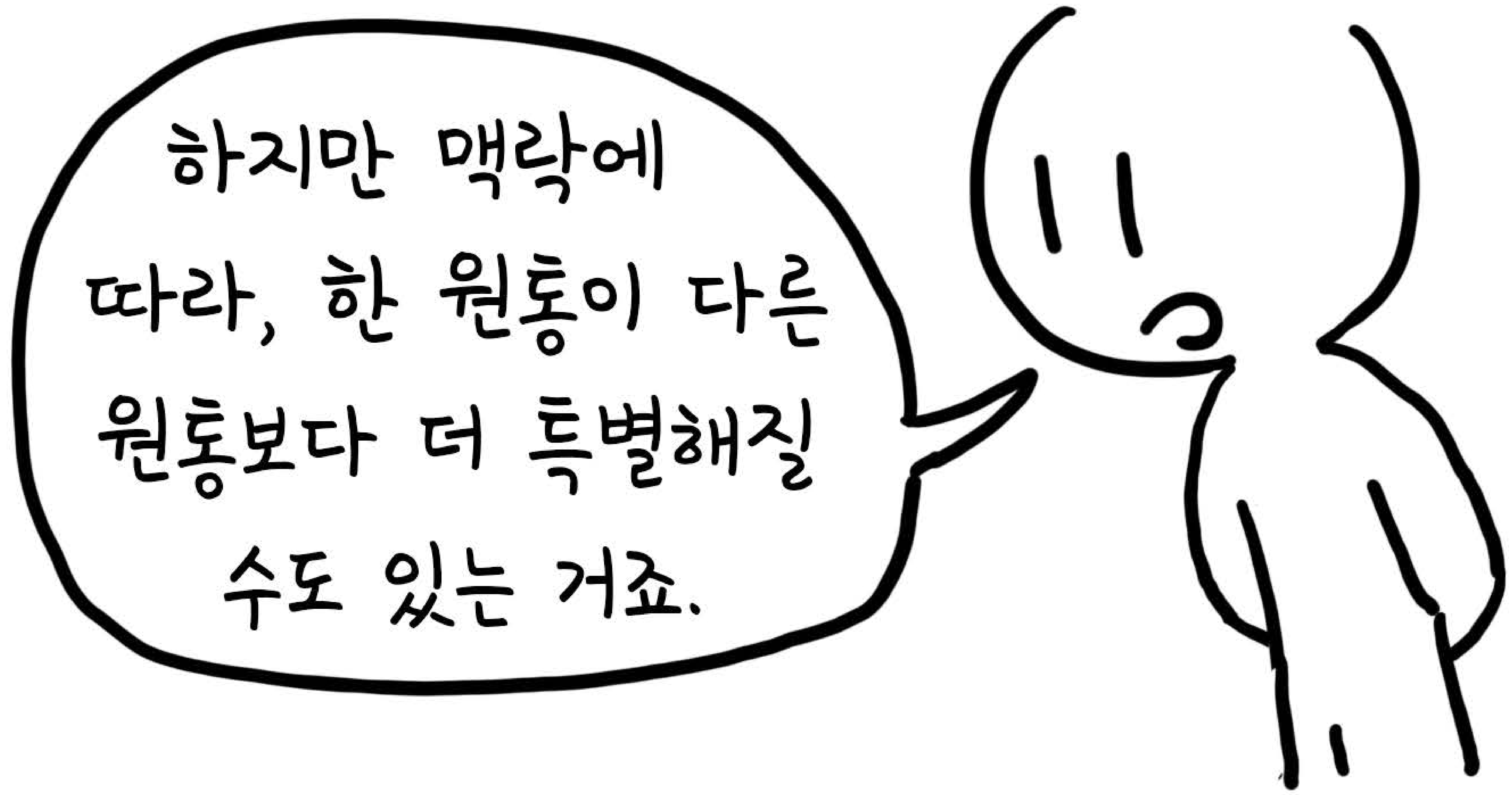
그처럼, "짝수의 집합"이든

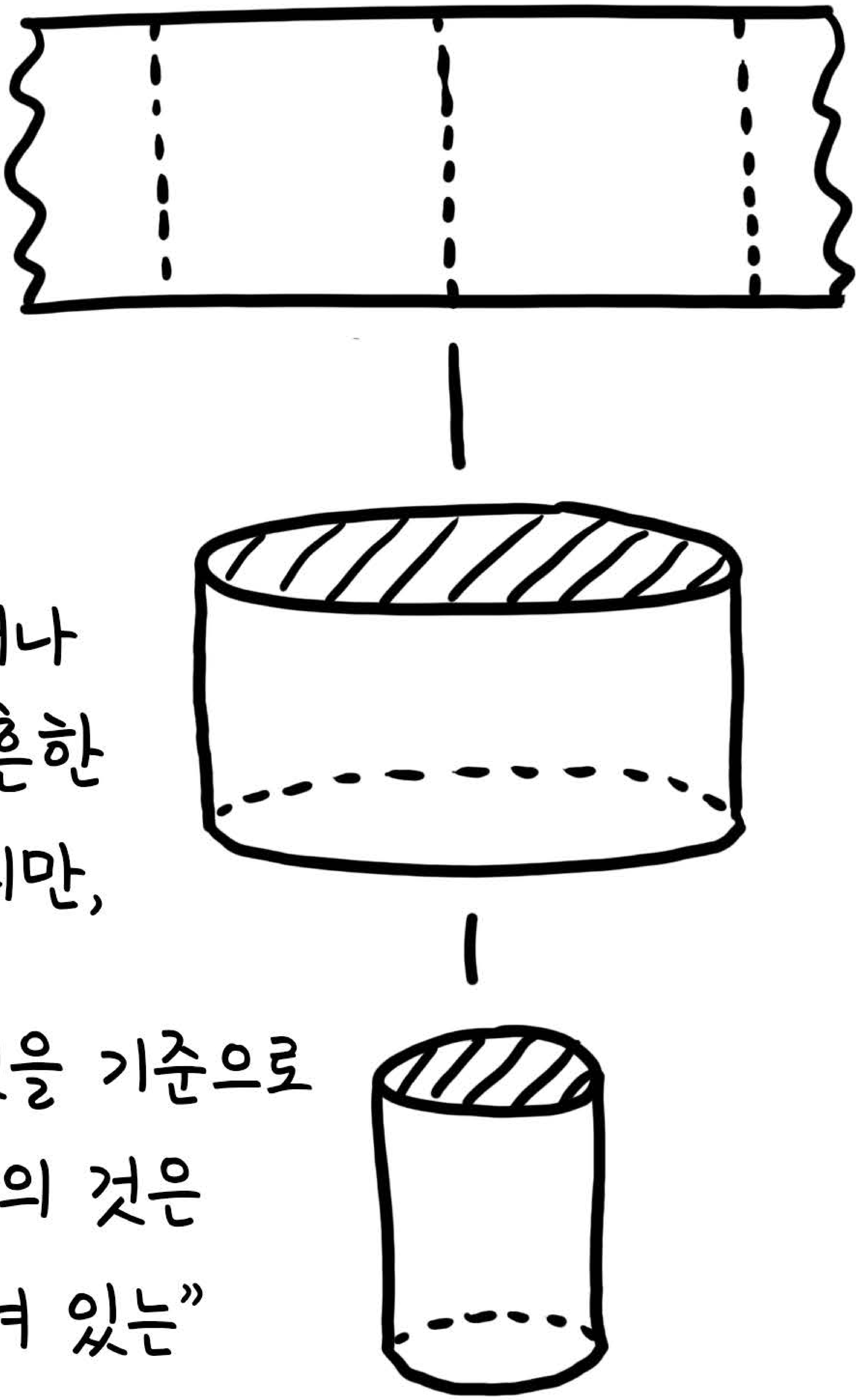
"정수 전체 집합"이든,



가지고 있는 연산구조는

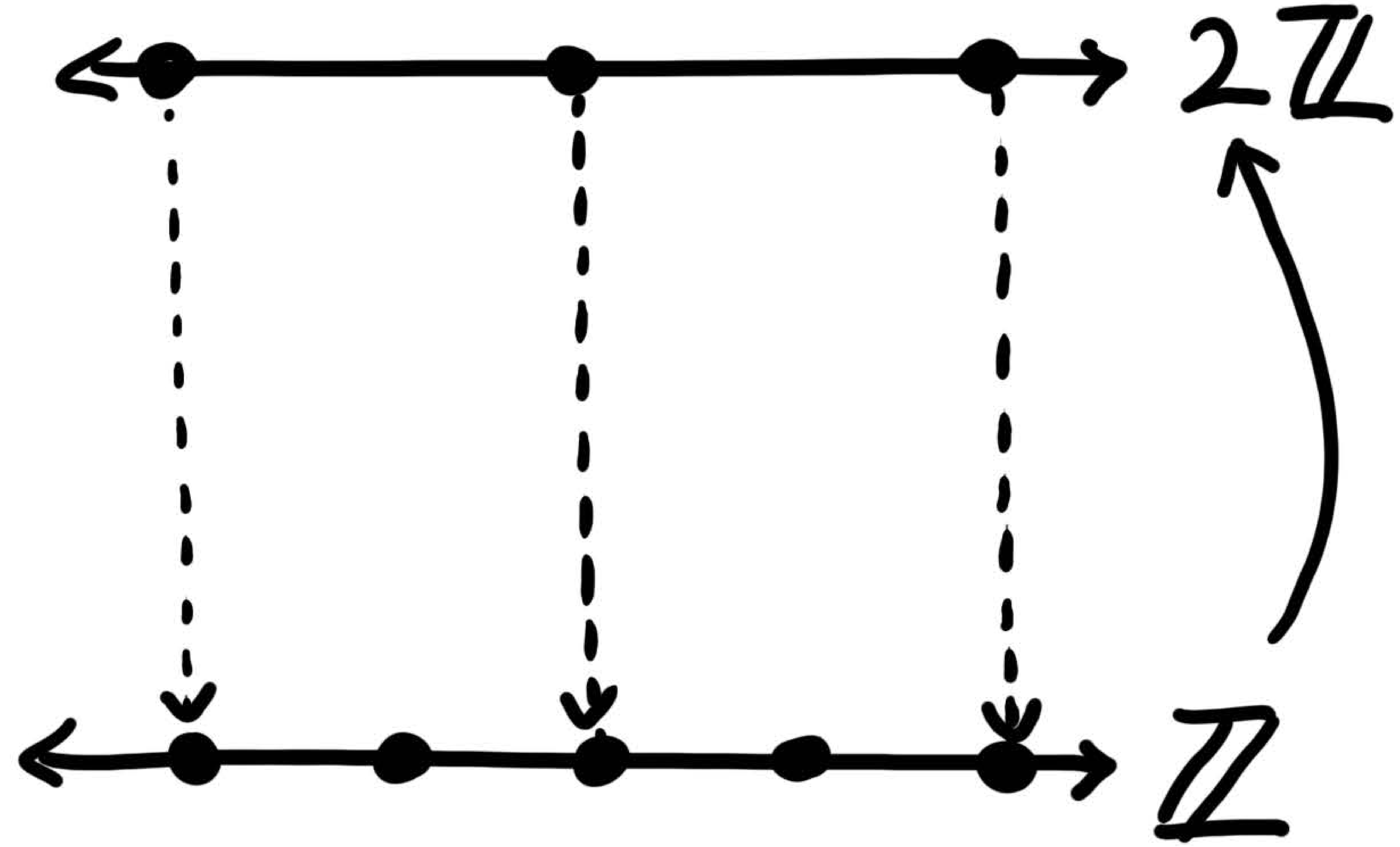
똑같습니다.



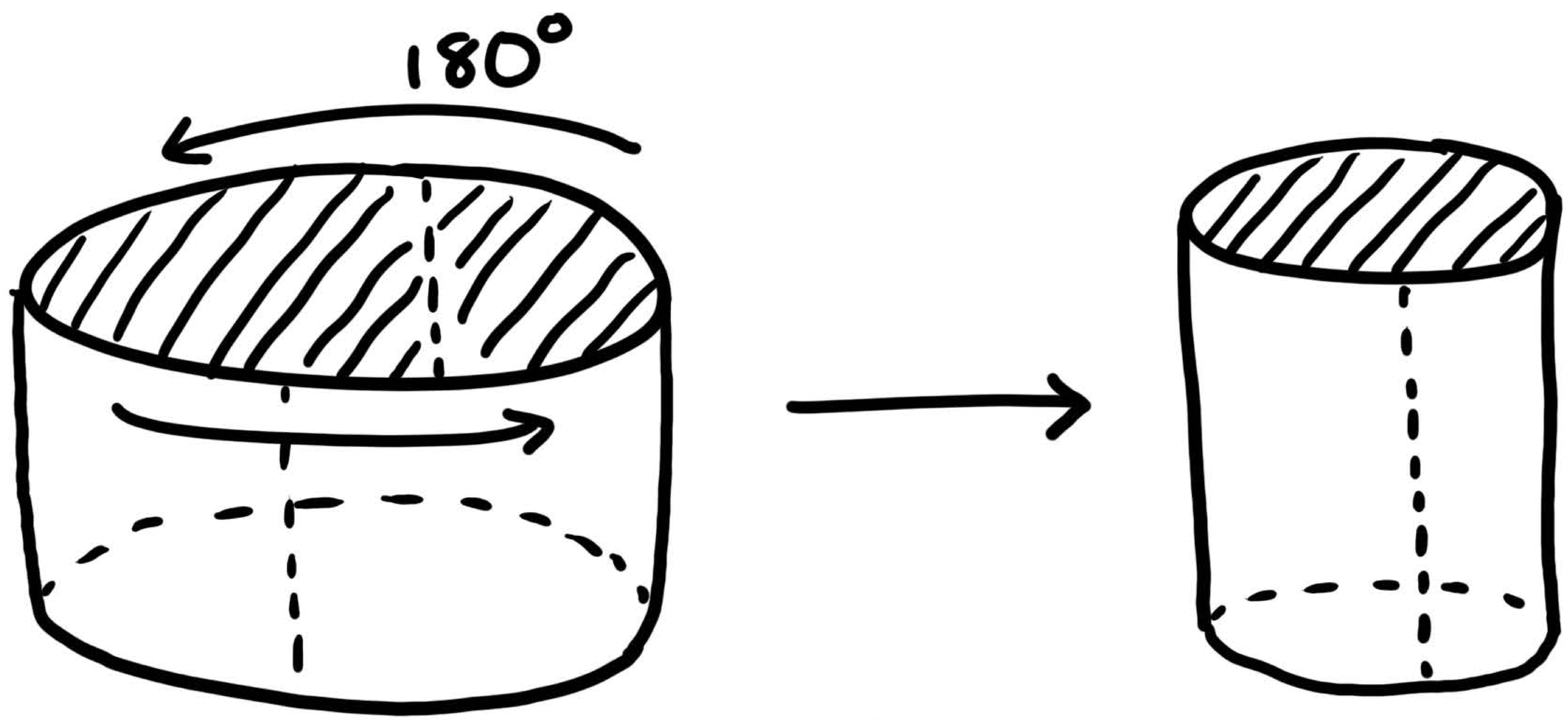


이거나
아래 거나
둘 다 흔한
원통이지만,

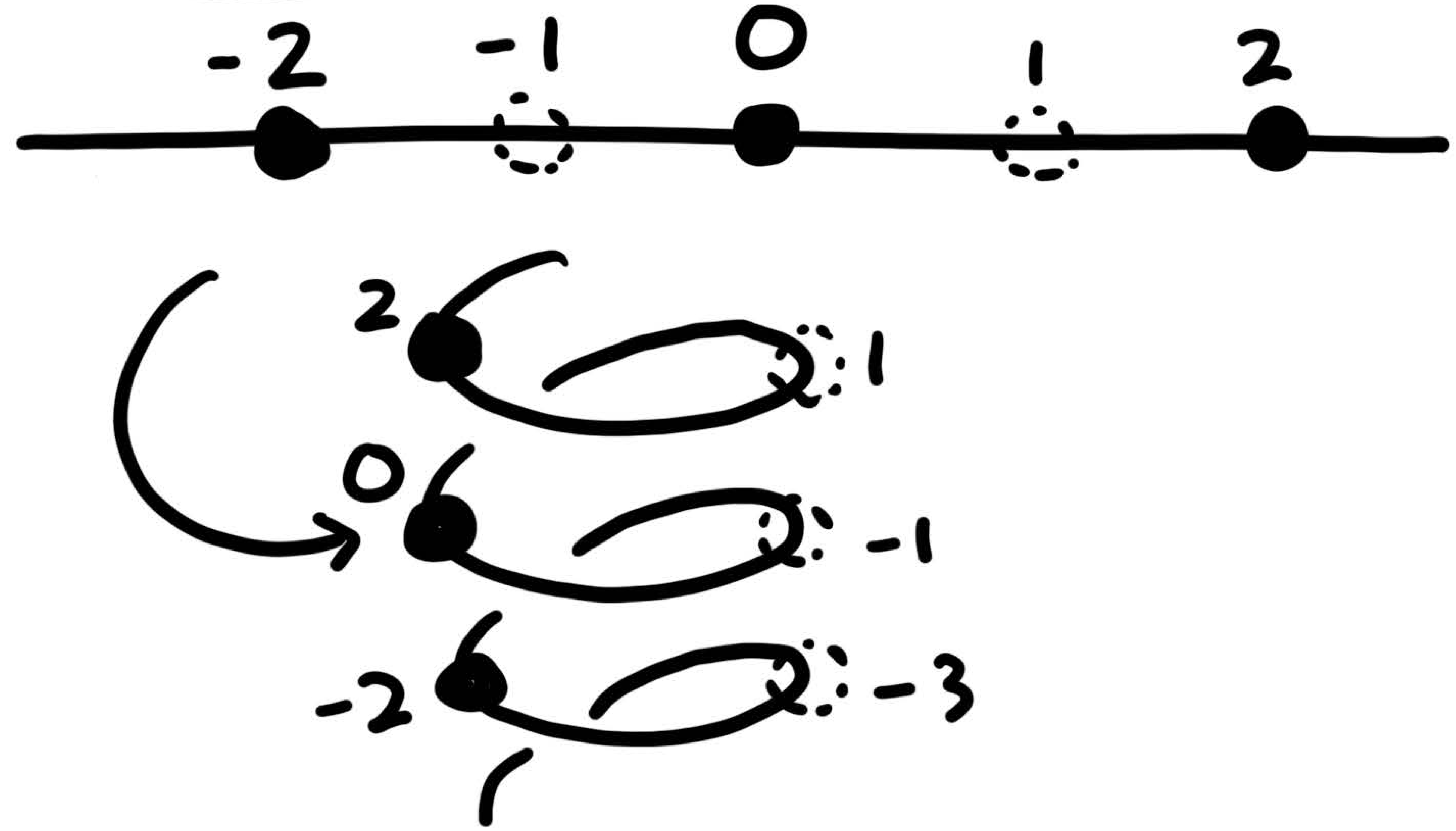
아래 것을 기준으로
보면 위의 것은
"덜 감겨 있는"
원통인거죠.



그러면 아래 것이 $\mathbb{Z}$가 되고,
위의 것이 부분 군인 $2\mathbb{Z}$가 되는 거죠.



그럼 "덜 풀칠한"
중간 단계에서
"더 감는 풀칠" 군도
생각할 수 있지
않을까요?



이는 $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$,
그리고 어떤 새로운
개념과 관련이
있습니다. 다음 시간에
같이 공부해보죠!

<참고문헌>

Primary Source

- K. F. Gauss, Disquisitiones generals circa superficies curvas. Commentationes Societaties Regiae Scientiarum Gottingensis Recentoires, Commentationes Classis Mathematicae, Tom. VI. Gottingae, 1828, 99-146. (consulted the translated version by J. C. Morehead, A. M. Hiltebeitel: General Investigations of Curved Surfacees of 1827 and 1825, 2015, Leopold Classic Library.)
- E. Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Ann. Mat. Pura Appl. 1868, Vol. 2, Issue 1, 232-255.

Secondary Source

E. Scholz, The Concept of Manifold, 1850-1950. (Chapter 2 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).

K. S. Sarkaria, The Topological Work of Henri Poincaré (Chapter 6 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).

J. Stillwell, Poincaré amd the early history of 3-manifolds, 2012. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 49, No. 4, 555-576

J. Munkres, Topology (2nd ed). 2000, Pearson.

M. A. Armstrong, Basic Topology. 1983, Springer.

D. W. Kahn, Topology: An Introduction to the Point-Set and Algebraic Area. 1995, Dover Publications.

M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces. (Revised version) 2016, Dover Publications.

F. Bonahon, Low-Dimensional Geometry – From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots. 2009, AMS.