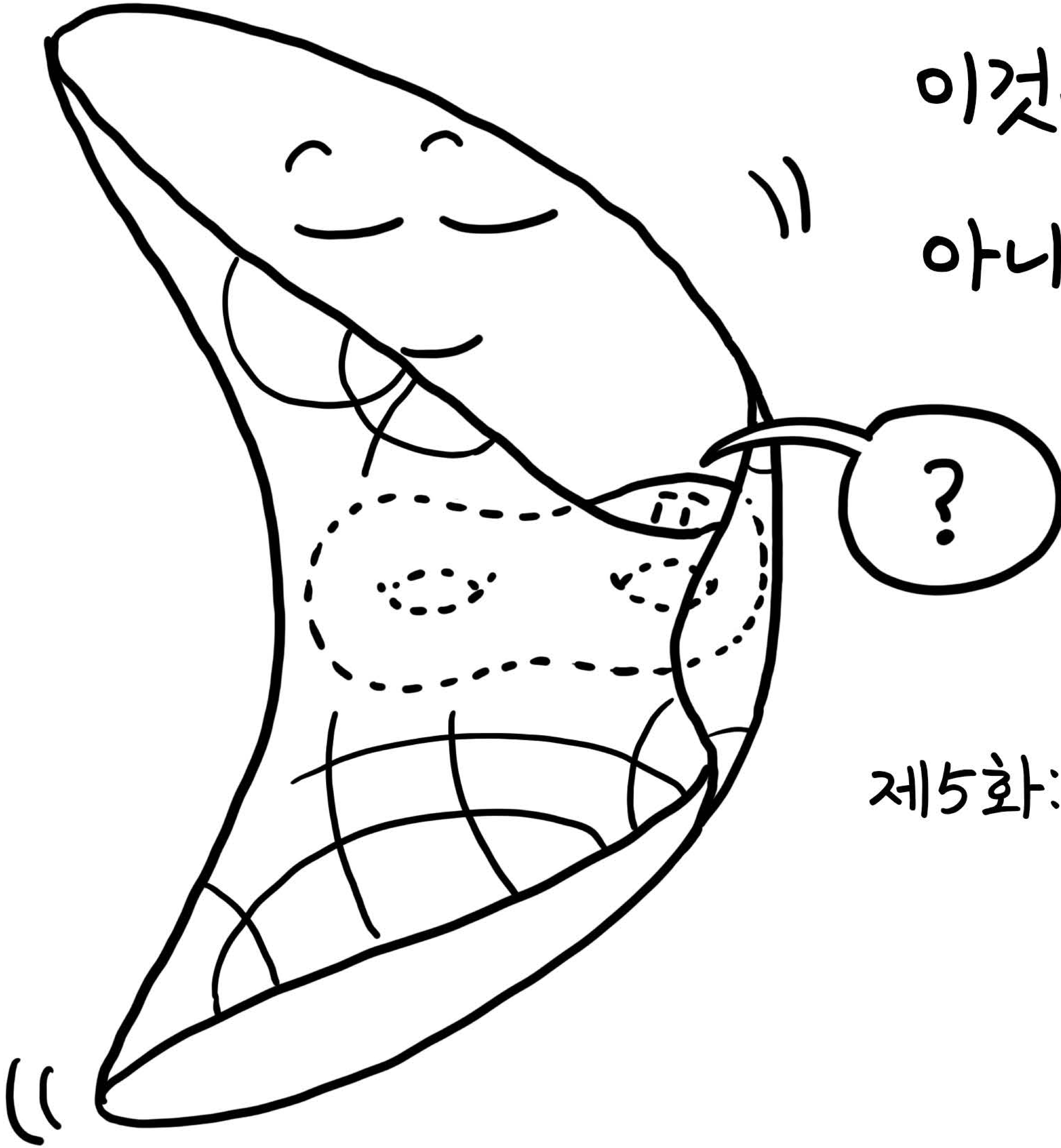


이것은 기하학인가

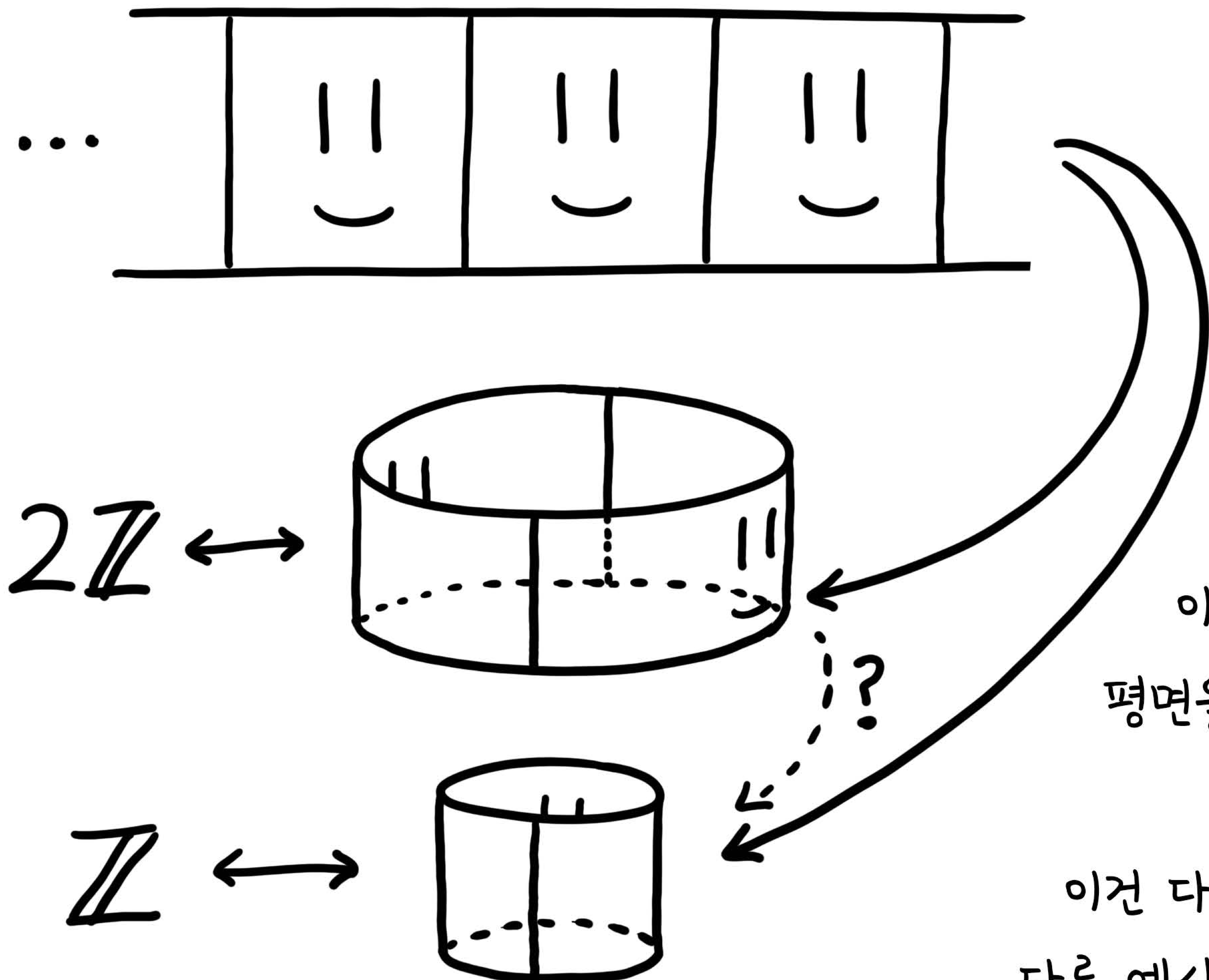
아니면 위상수학인가

제5화: 쌍곡면, 너의 한계는

어디까지인가!

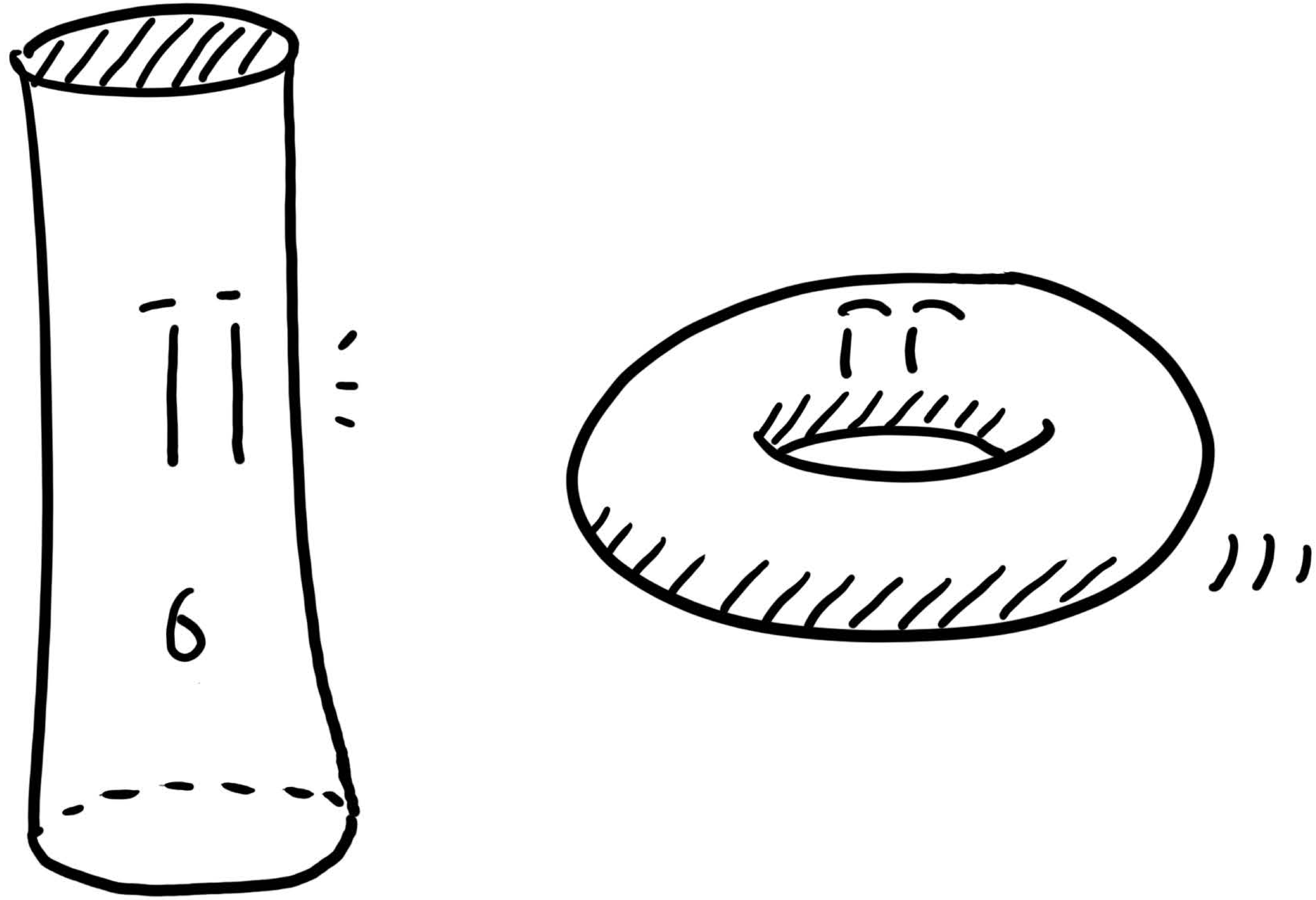

지난 시간에는,
평면을 감아 원통을 만드는
작업을 살펴봤어요.

사실은 (크기가 다른) 원통을 감아서도 원통을 만들 수 있었고,



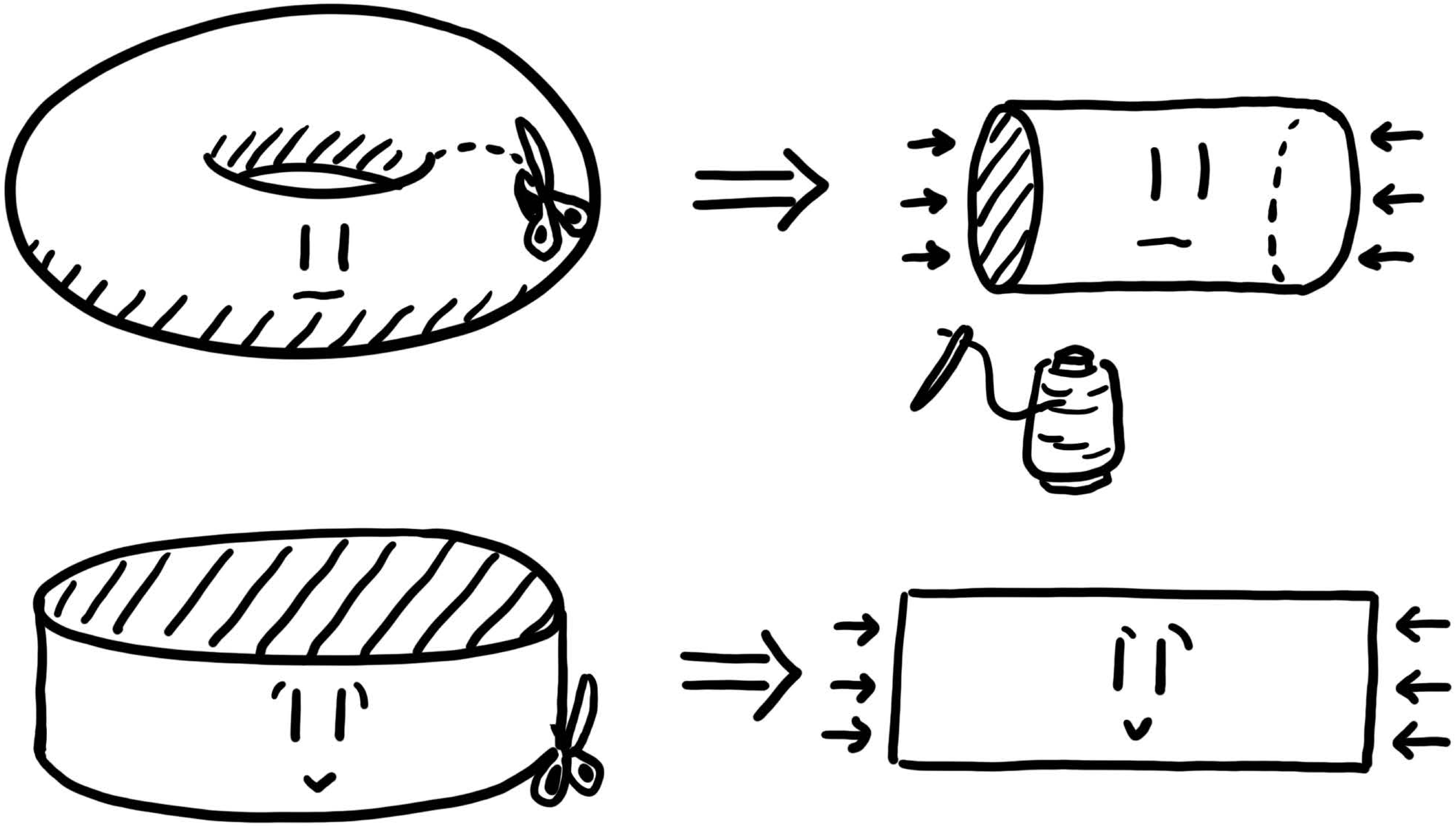
이런 "어중간한" 감는 법과
평면을 감는 법 사이의 관계를
공부하기로 했었는데요,
이건 다음 시간으로 잠깐 넘기고
다른 예시를 좀 더 살펴보겠습니다.

원통 다음으로 다뤄 볼 곡면은.. 바로 토러스입니다.



원통보다는 조금은 더 복잡한 구조를 가지고 있는 녀석인데요,

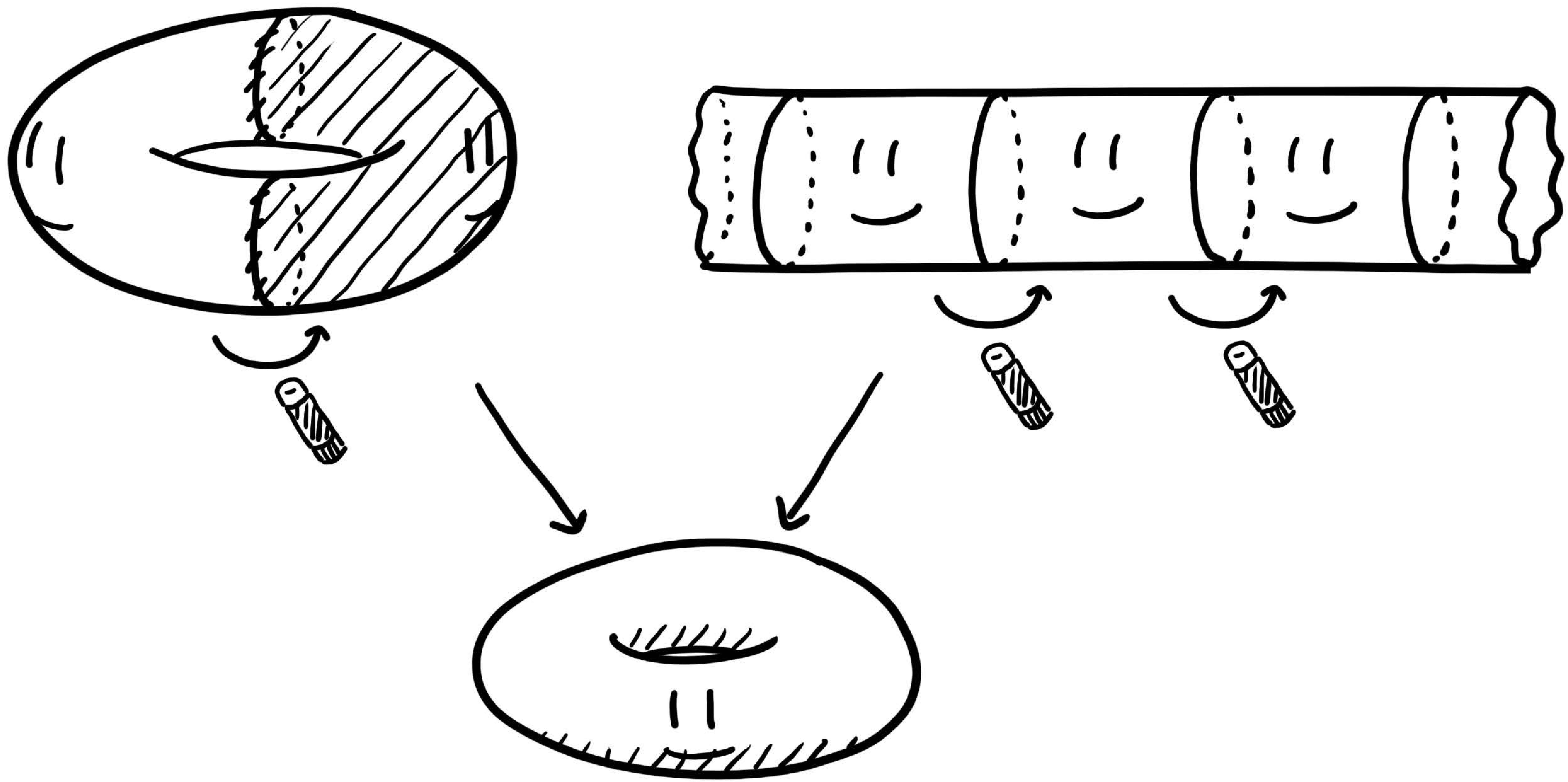
시작은 비슷합니다. 가운데를 잘라 이어 붙일 준비를 하는거죠.



원통에 했던 작업과 크게 다르지 않죠.

원통때와 마찬가지로, 두세 개로 이어붙일 수도 있고,

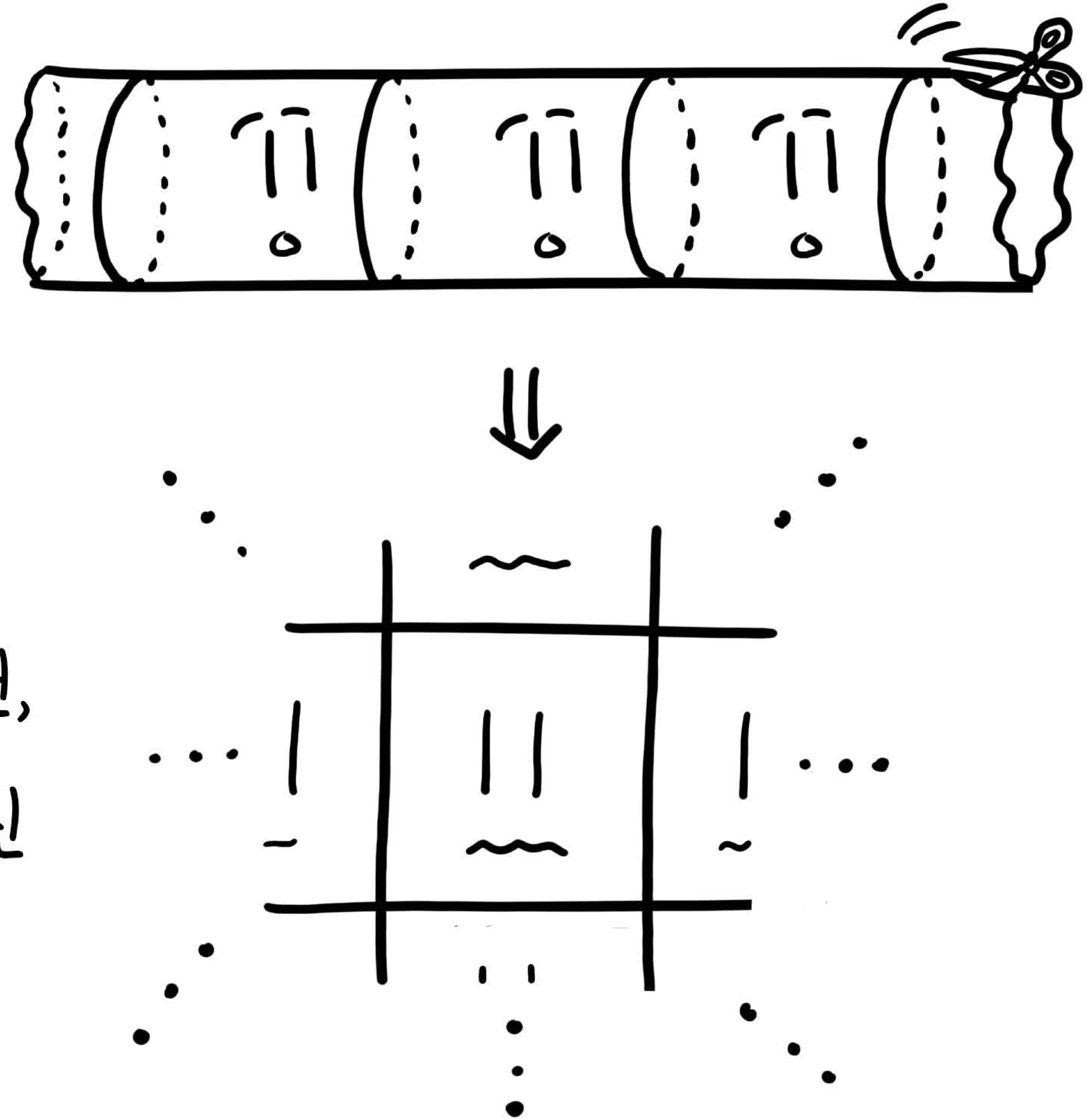
무한히 많이 이어붙이는 것도 가능하겠죠.



그런데 아직

펼 방향이 더

남아있네요!

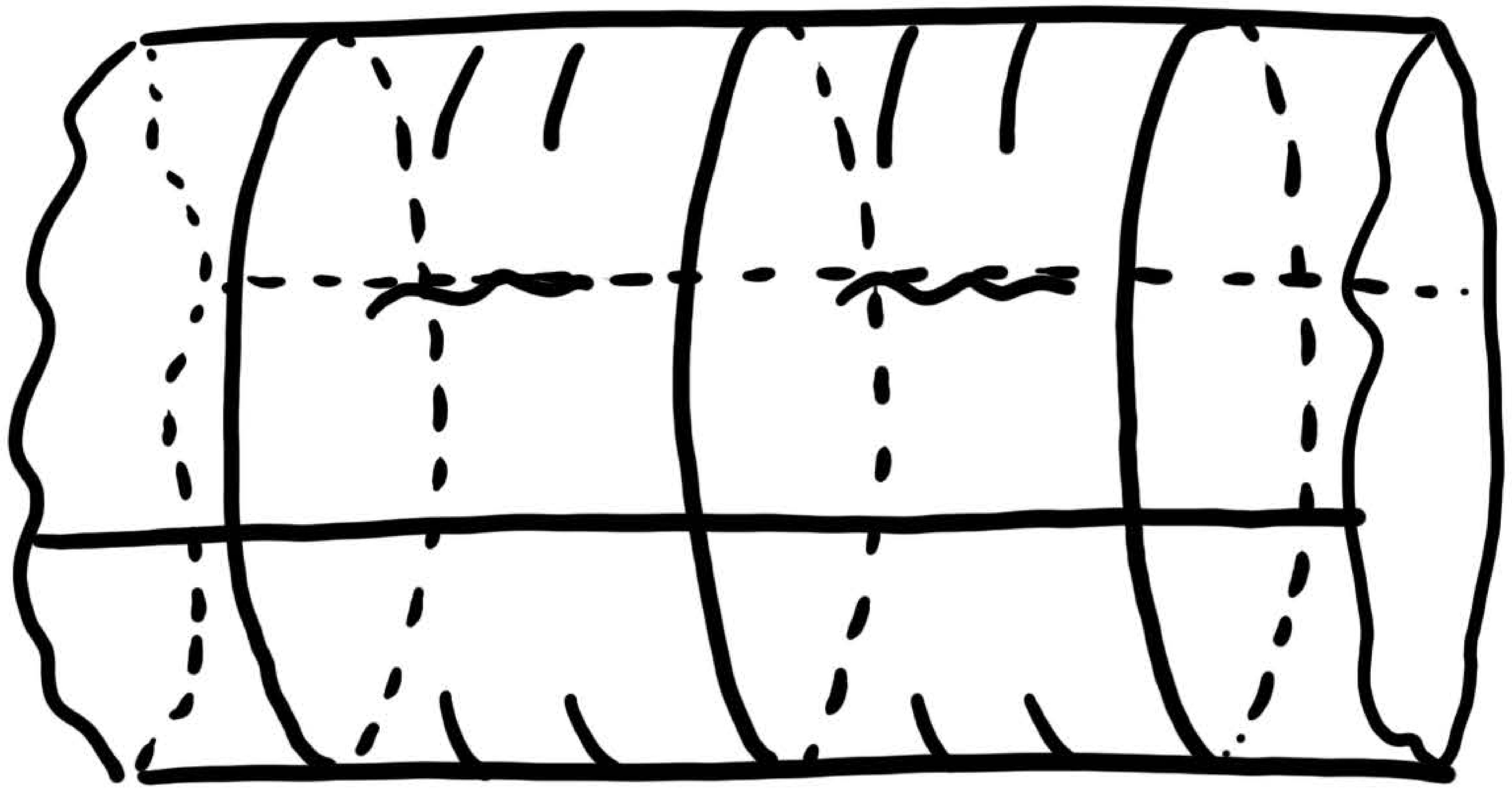


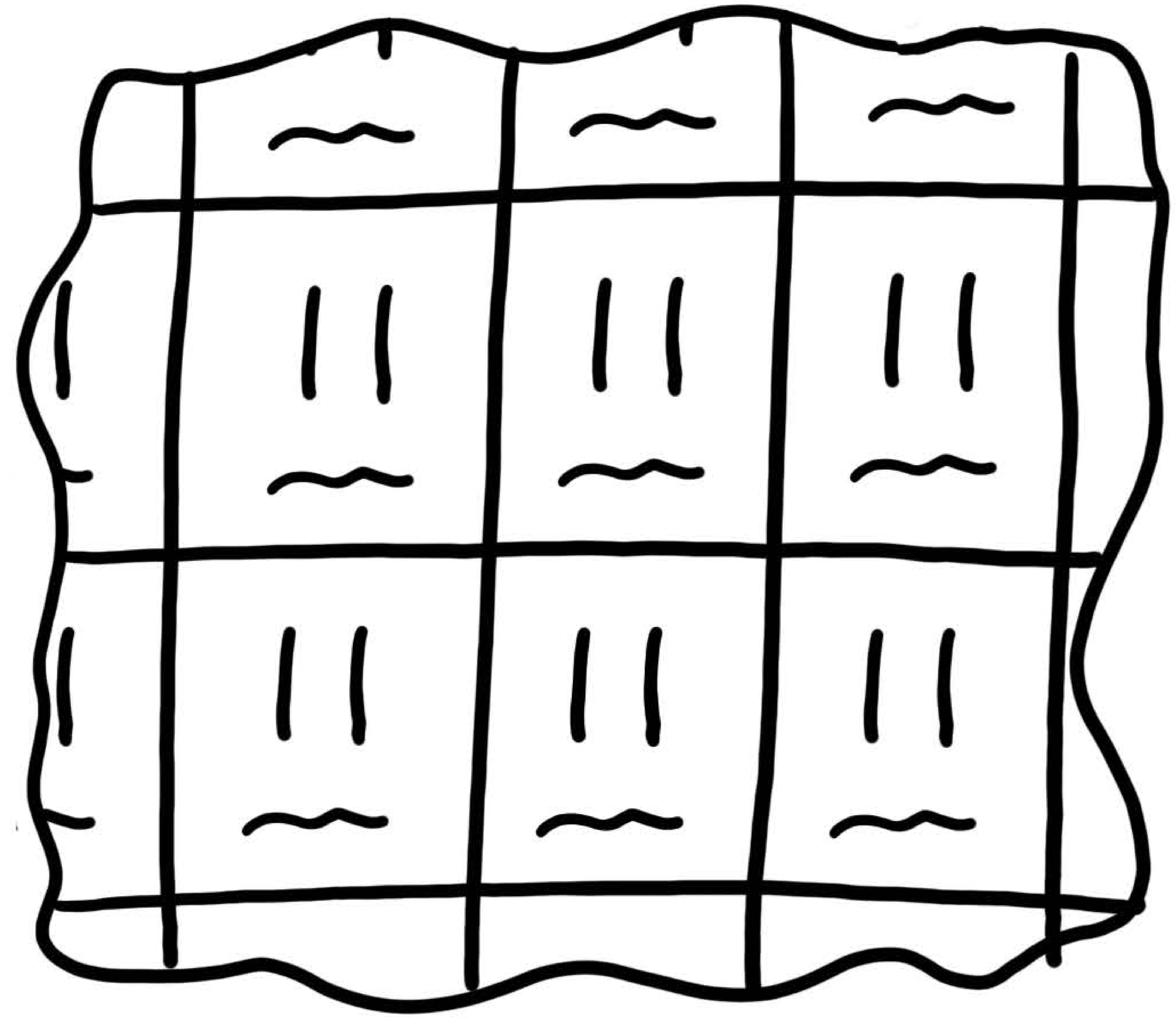
이것까지 다 펴 보면,

사방팔방으로 펼쳐진

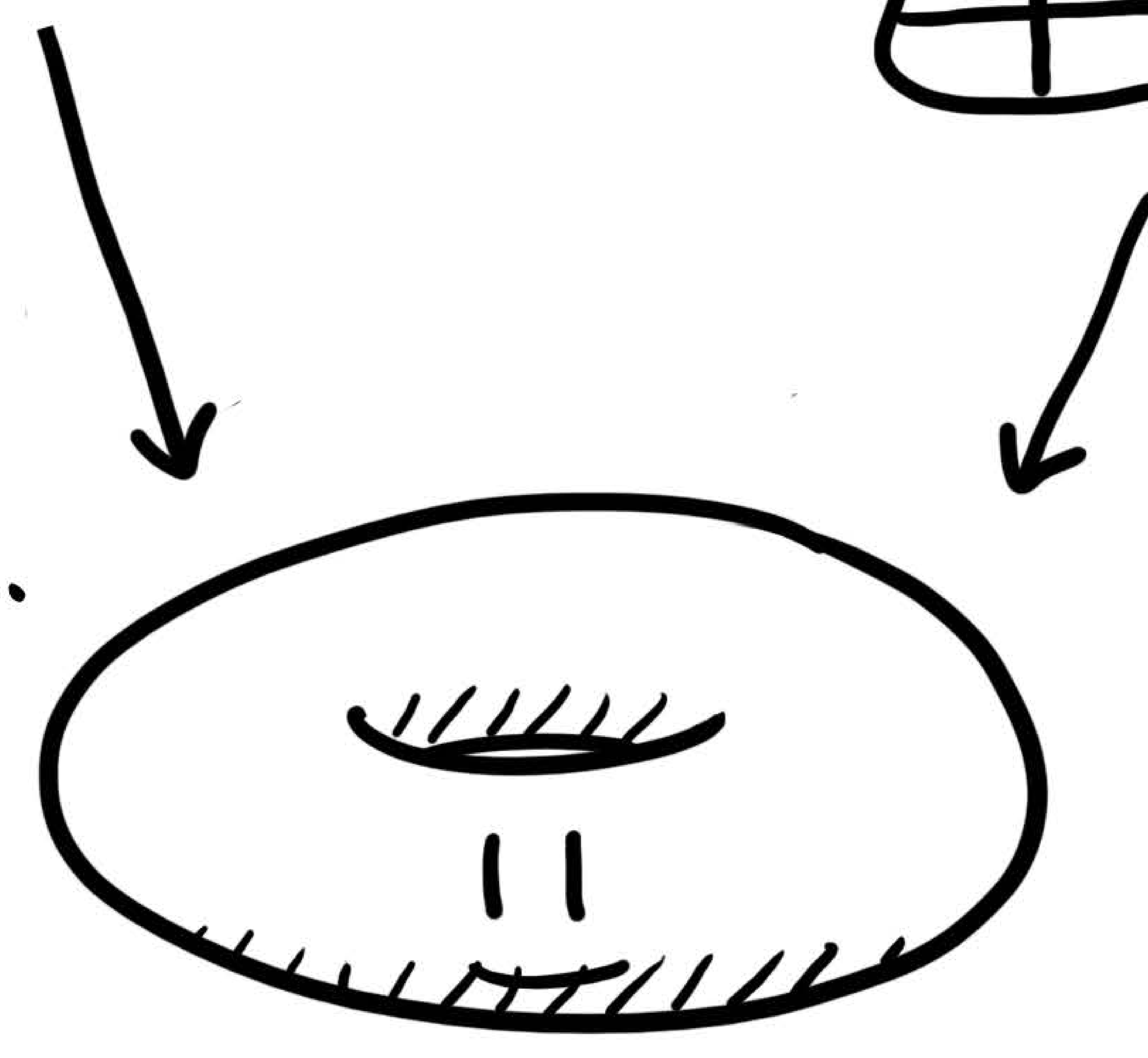
모양이 되겠군요.

물론 이번에도 "어중간하게" 편 상태도 있겠죠.

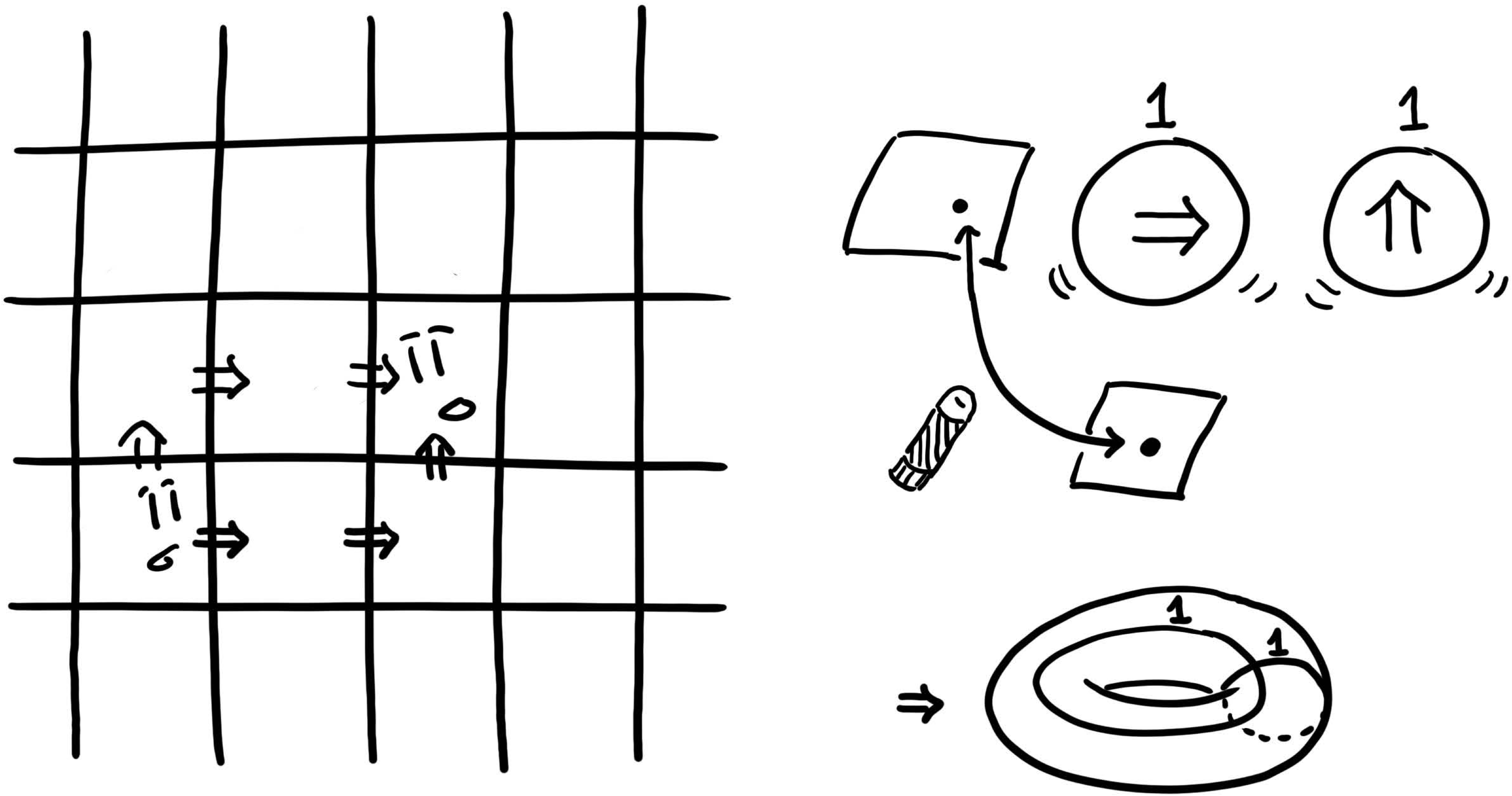




이것들 사이 관계도
나중에 공부해 볼게요.

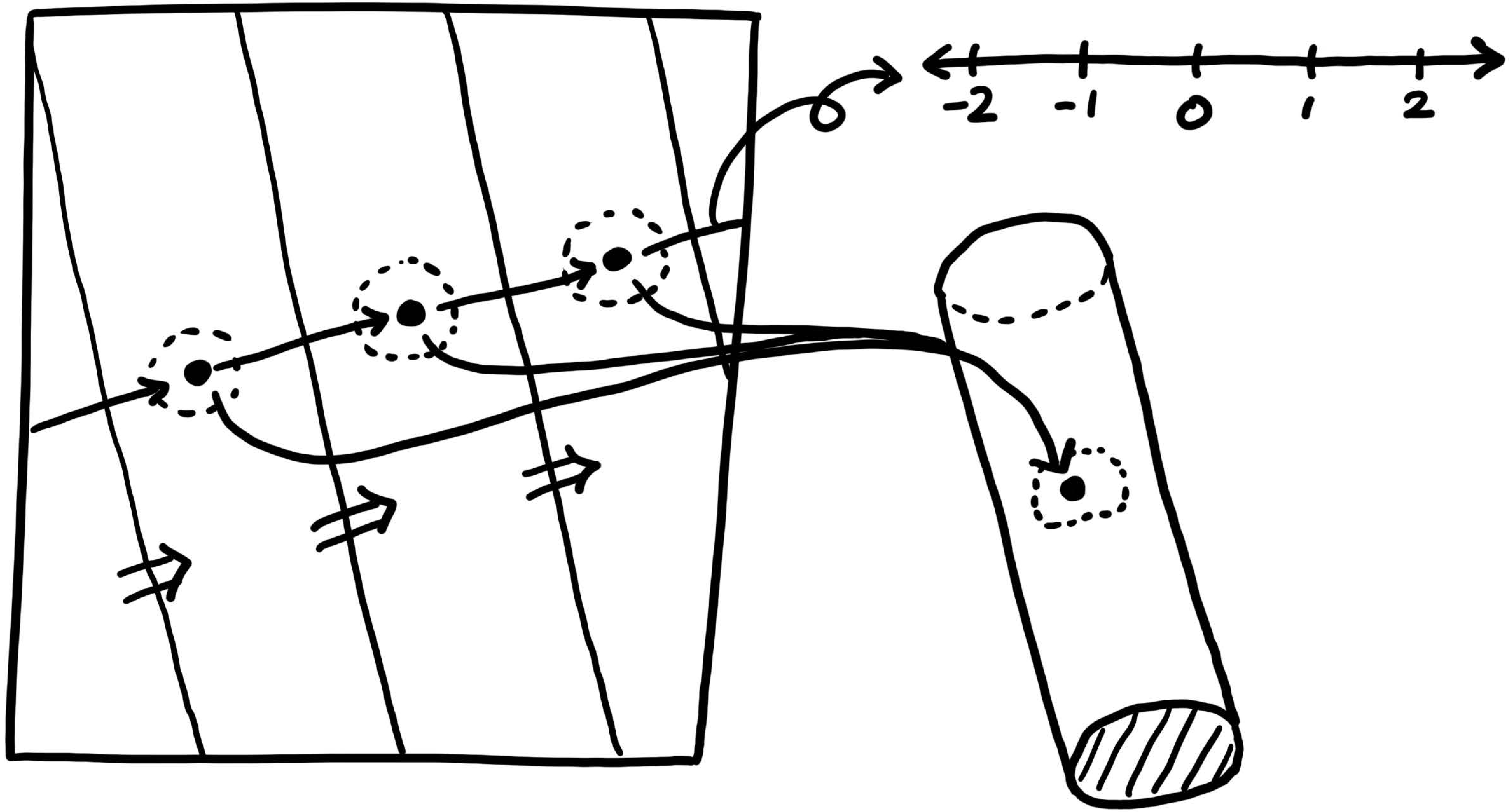


지금 궁금한 건, "가장 많이 편" 상태가 어떤 모양인지예요.



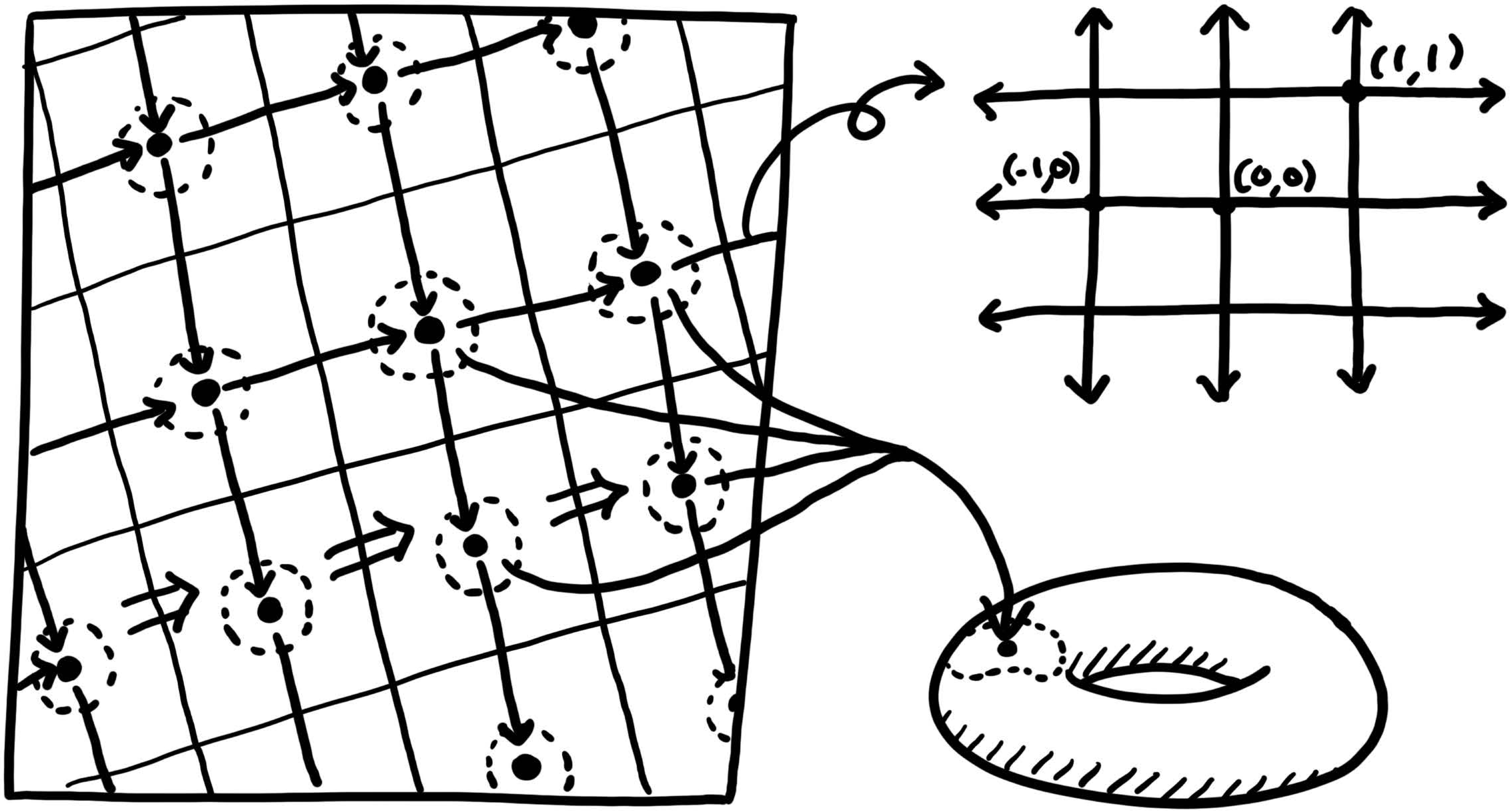
토러스의 경우도 이렇게 평면을 말아 만든 거라고 볼 수 있네요.

여기서 같은 평면이라는 재료를 가지고 다른 곡면을 만들었는데,



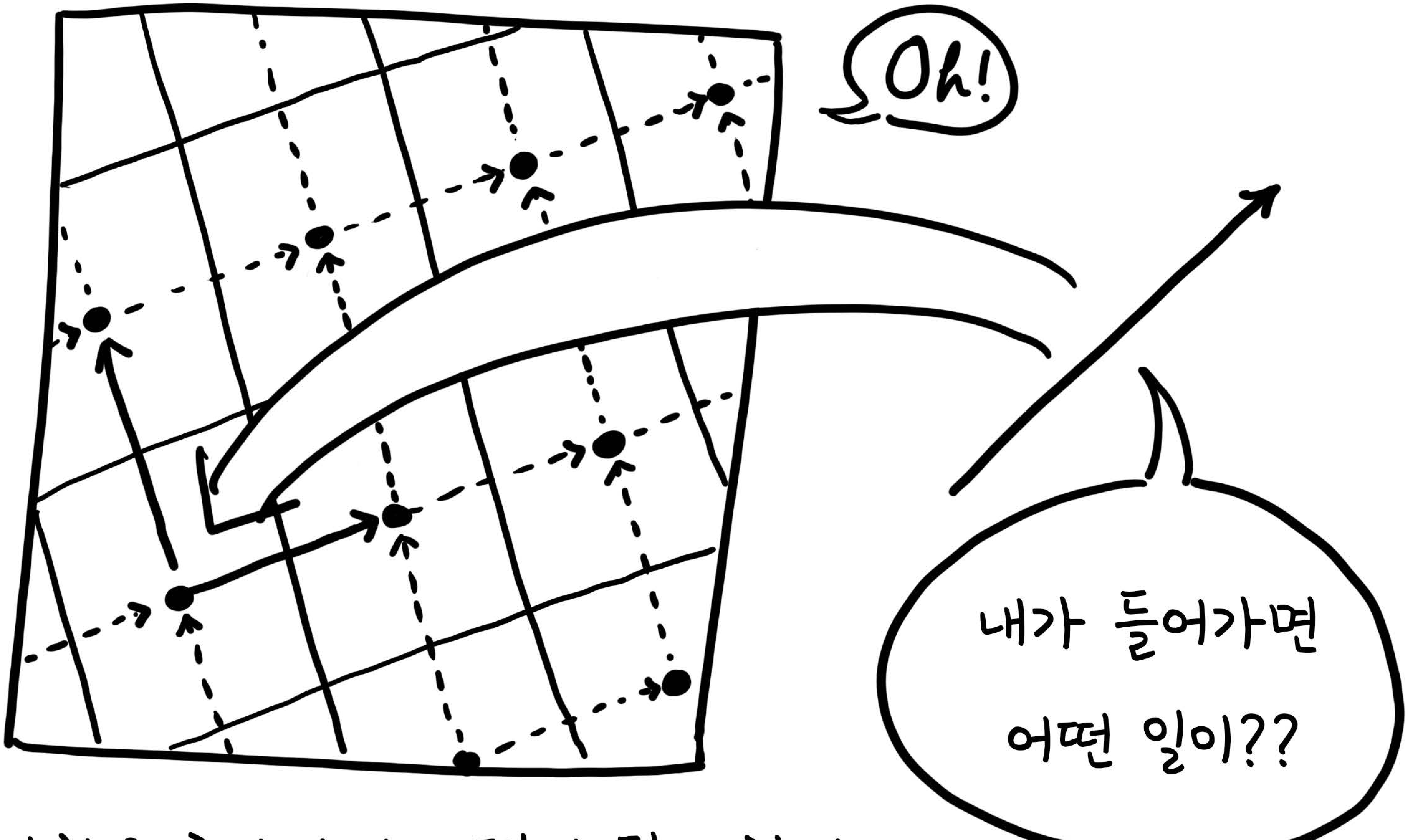
원통의 경우 이렇게 한 방향으로 미는 "붙이는 법"으로 붙였고,

이렇게 두 개의 독립된 방향으로 밀어서 붙이면,



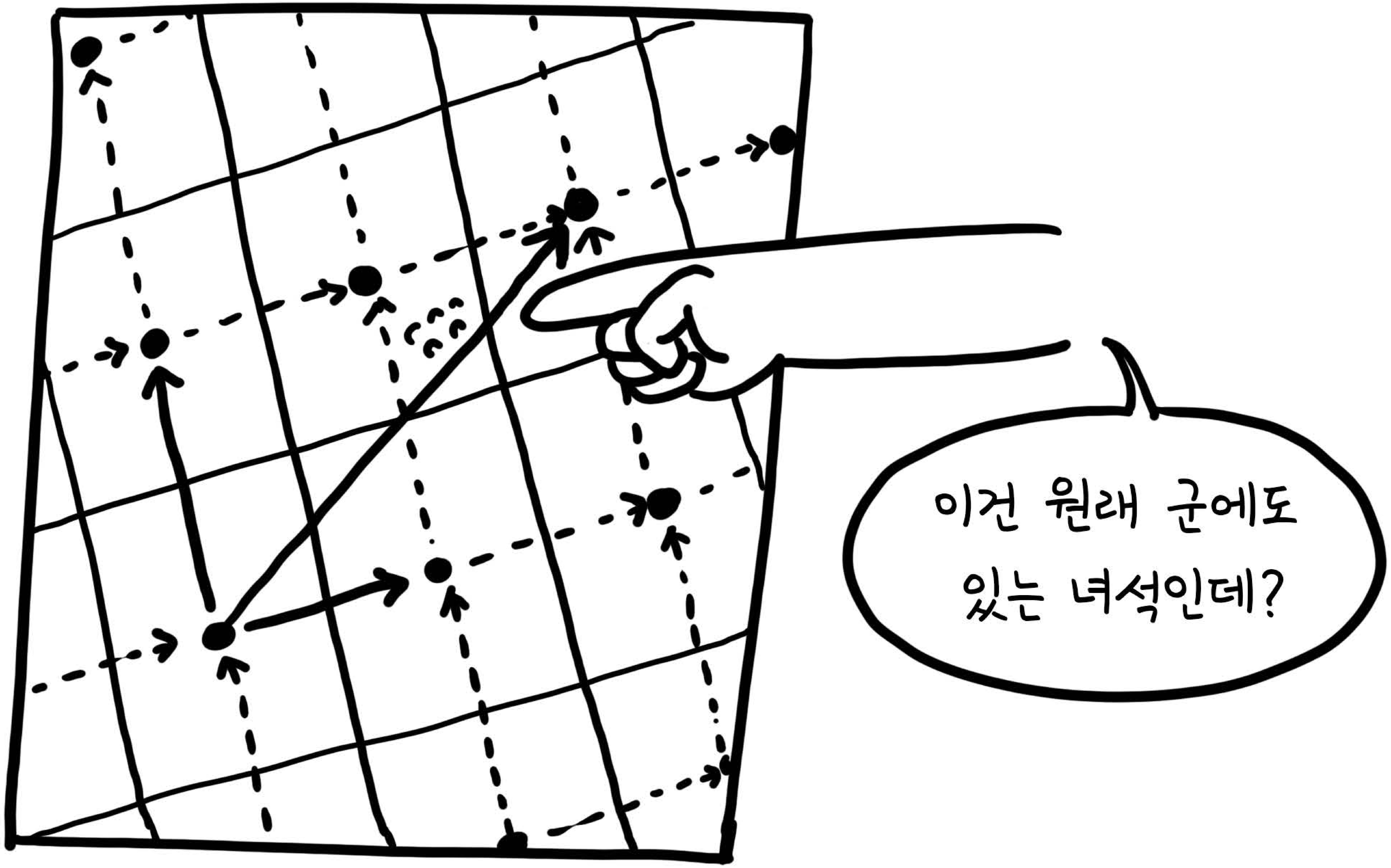
정수 격자점들이 이어붙으면서, 토러스가 만들어지겠죠.

그럼 이것 외에 다른 것은 없을까요? 한번 “붙이는 방법” 군에다,



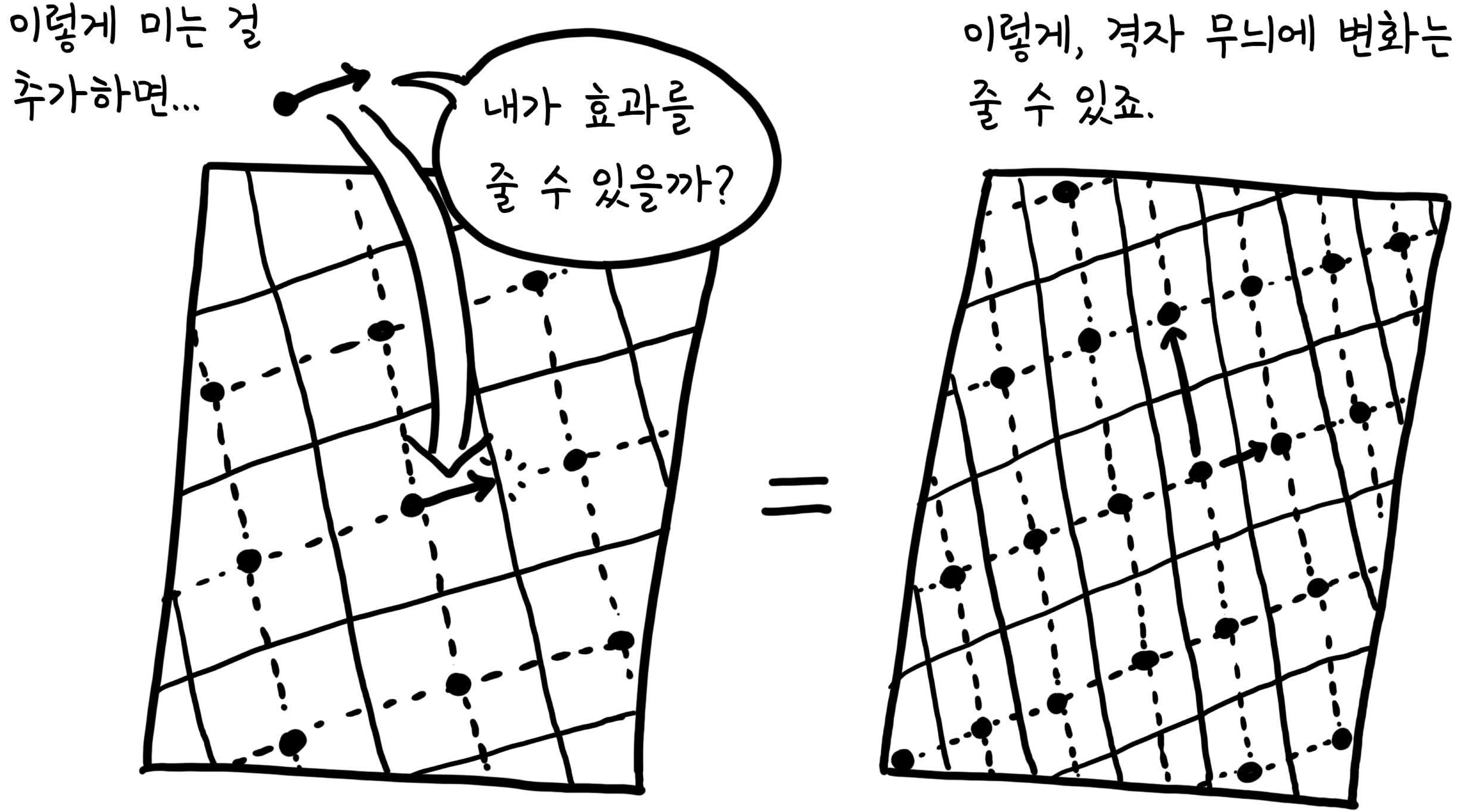
새 방향을 추가하면 어떻게 될지 한번 보죠.

생각보다 싱겁게 끝날 수 있어요. 이렇게 이미 예견된 방향이라면요.



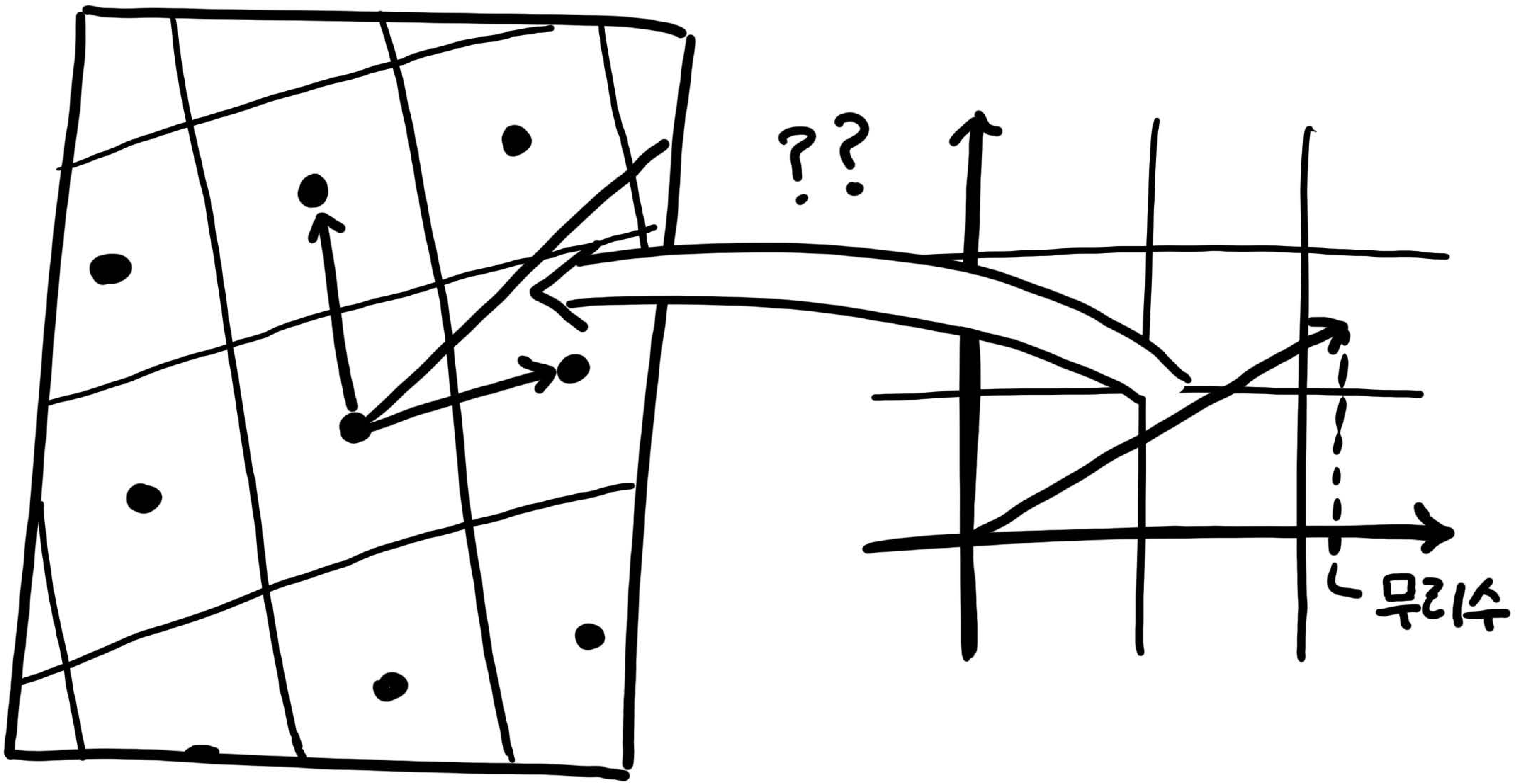
화살표 끝점이 이미 정수 격자점에 들어있는 경우가 그래요.

이것보다는 더 효과가 있는 경우는 다음과 같아요. 예를 들어,




일반적으로, 정수 격자 기준으로 “유리수점”에 새 화살표가 찍히면,
유리수
유리수
이렇게 만들어지는 “감긴 곡면”도
조금 달라지긴 하는데요..
그래도 어차피
크기 다른 토러스
흠, 그건 그렇죠.

그럼 진짜로 다른 "모양"을 만들어 내려면, 무리수 화살표를...?

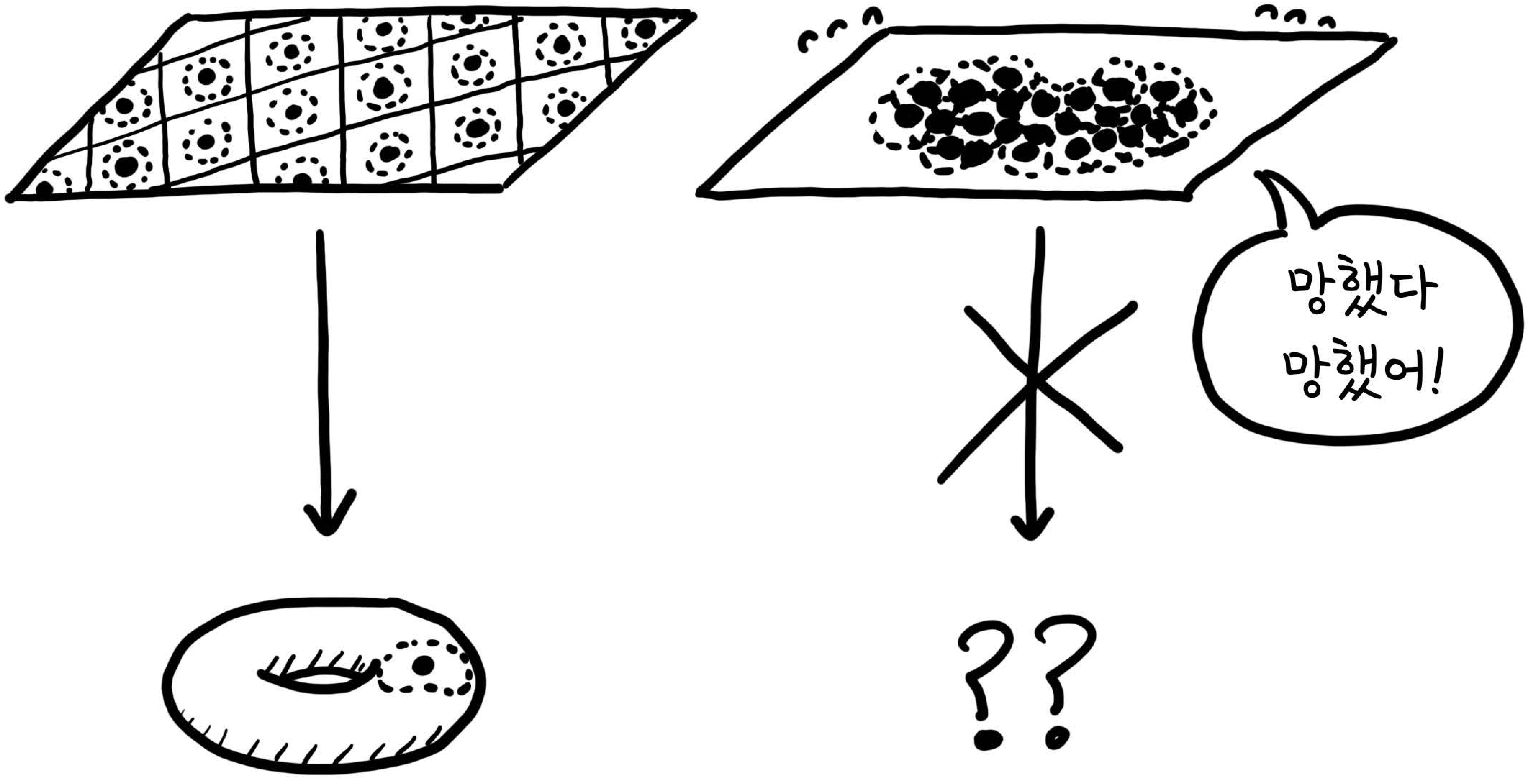


글쎄, 그렇게 쉽게 될까요? 한번 봅시다.


유리수 화살표와 무리수 화살표의 가장 큰 차이점은,
여기는 이렇게 주기를 가지고
돌아오는 반면,
이곳에서는 어긋난다는 겁니다.
결국 이렇게
와글와글, 엉망진창이
된다는 거지! 하하!

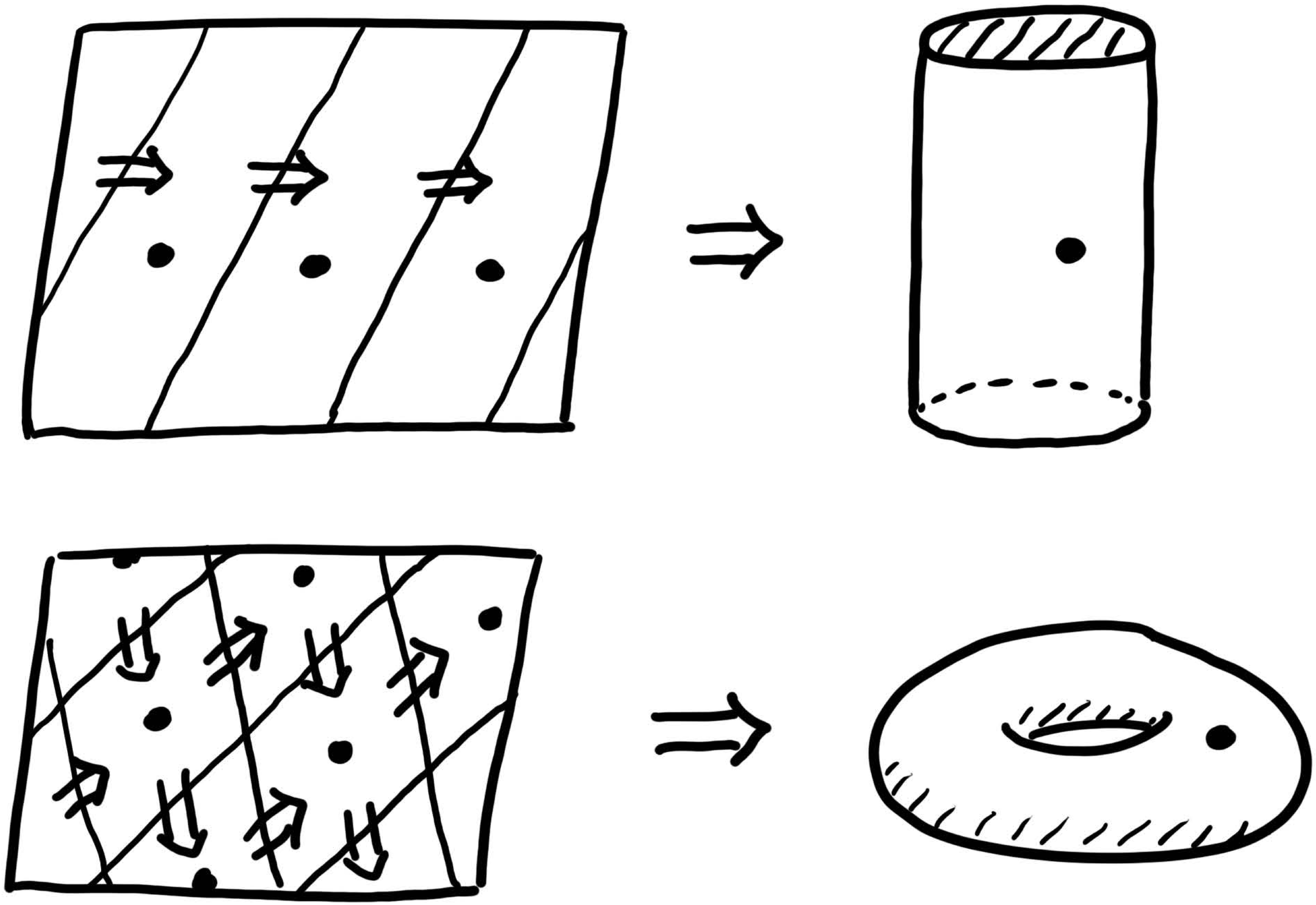
그럼 이렇게 질서정연하게 말아져
예쁜 곡면이 나오는 경우랑 정반대로,

이 경우에는... 모두 혼란이어서
곡면이 나오지가 않습니다.



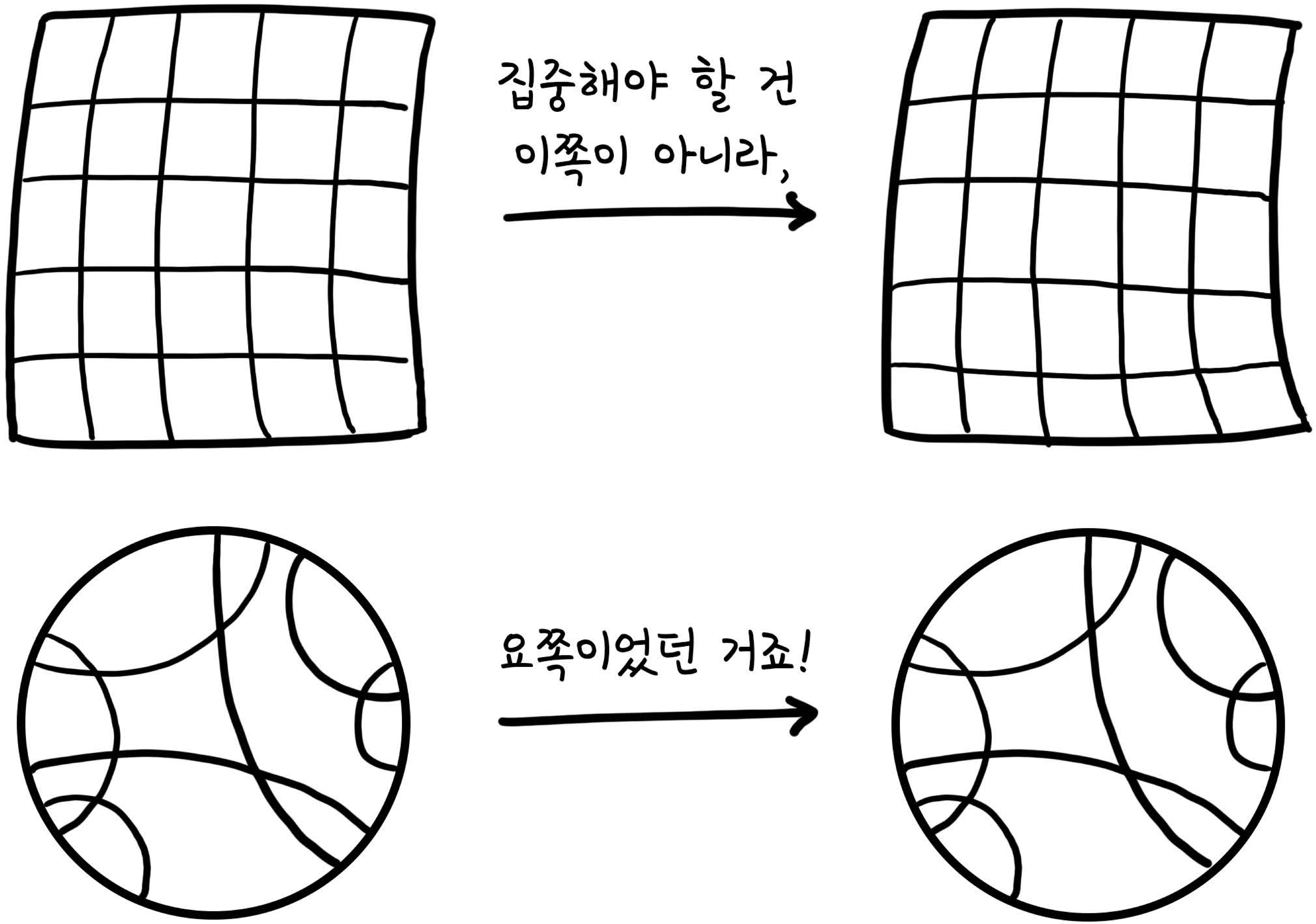
즉, 토러스 이상으로 더 잘 말아서 곡면을 만들 방법은 없어요.

그러니 평면을 말아서 만들 수 있는 곡면은 딱 두 종류,

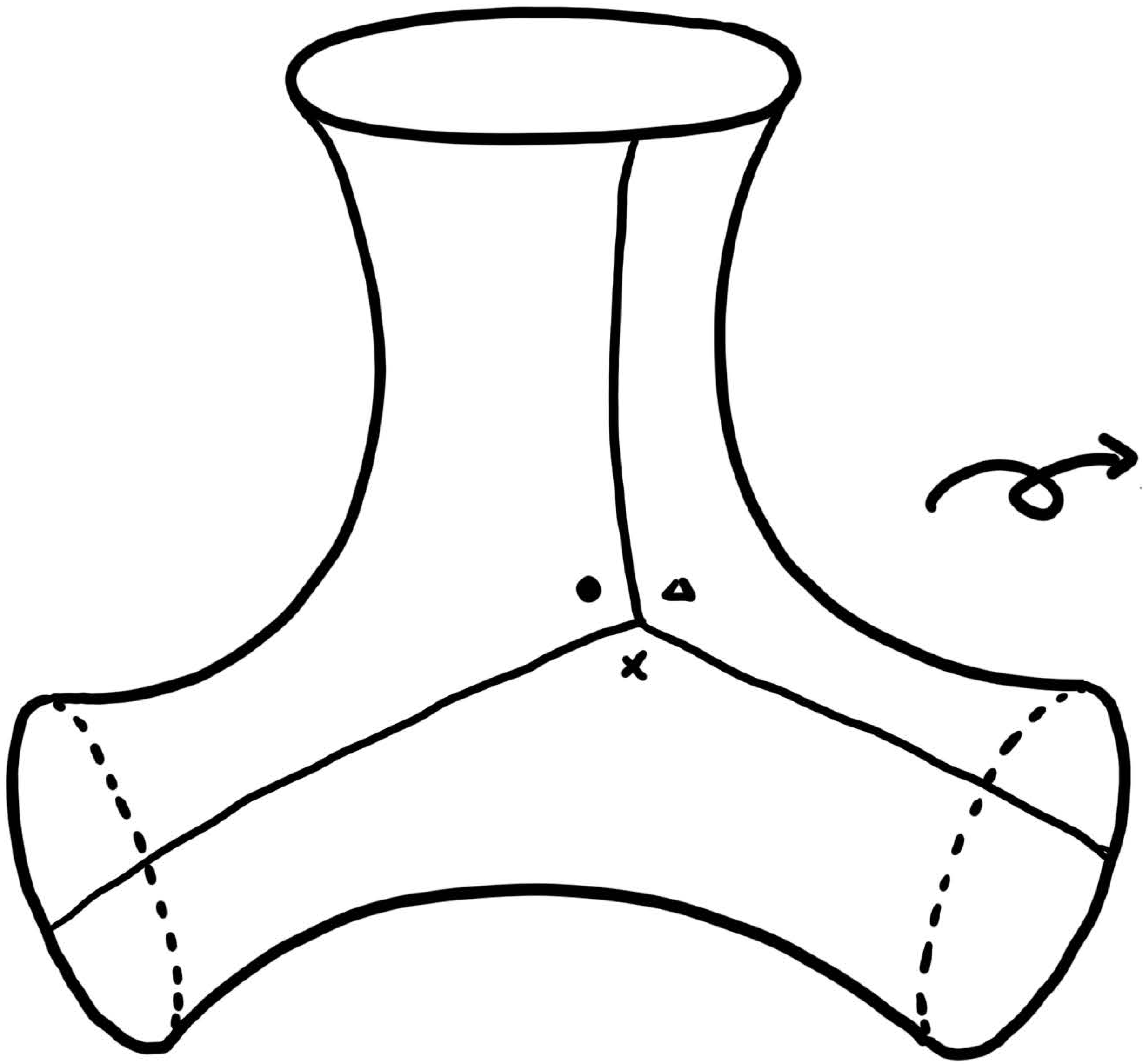


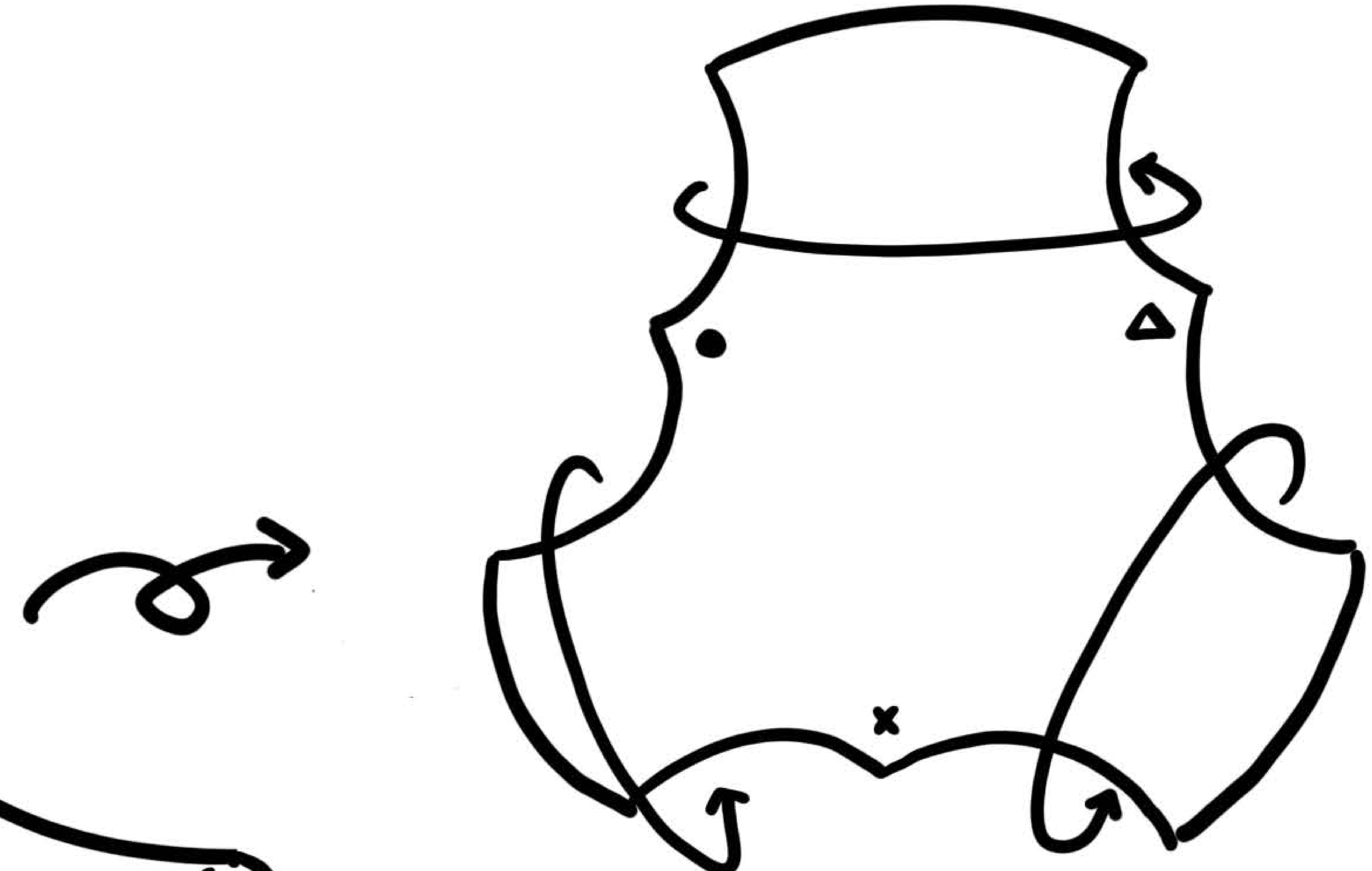
원통과 토러스뿐이라는 걸 관찰할 수 있습니다.

어 그럼 평면으로는 의외로 할 게 별로 없군요...?



실제로, 어떤 곡면이 쌍곡면을 말아서 나오는지 예시를 봅시다.

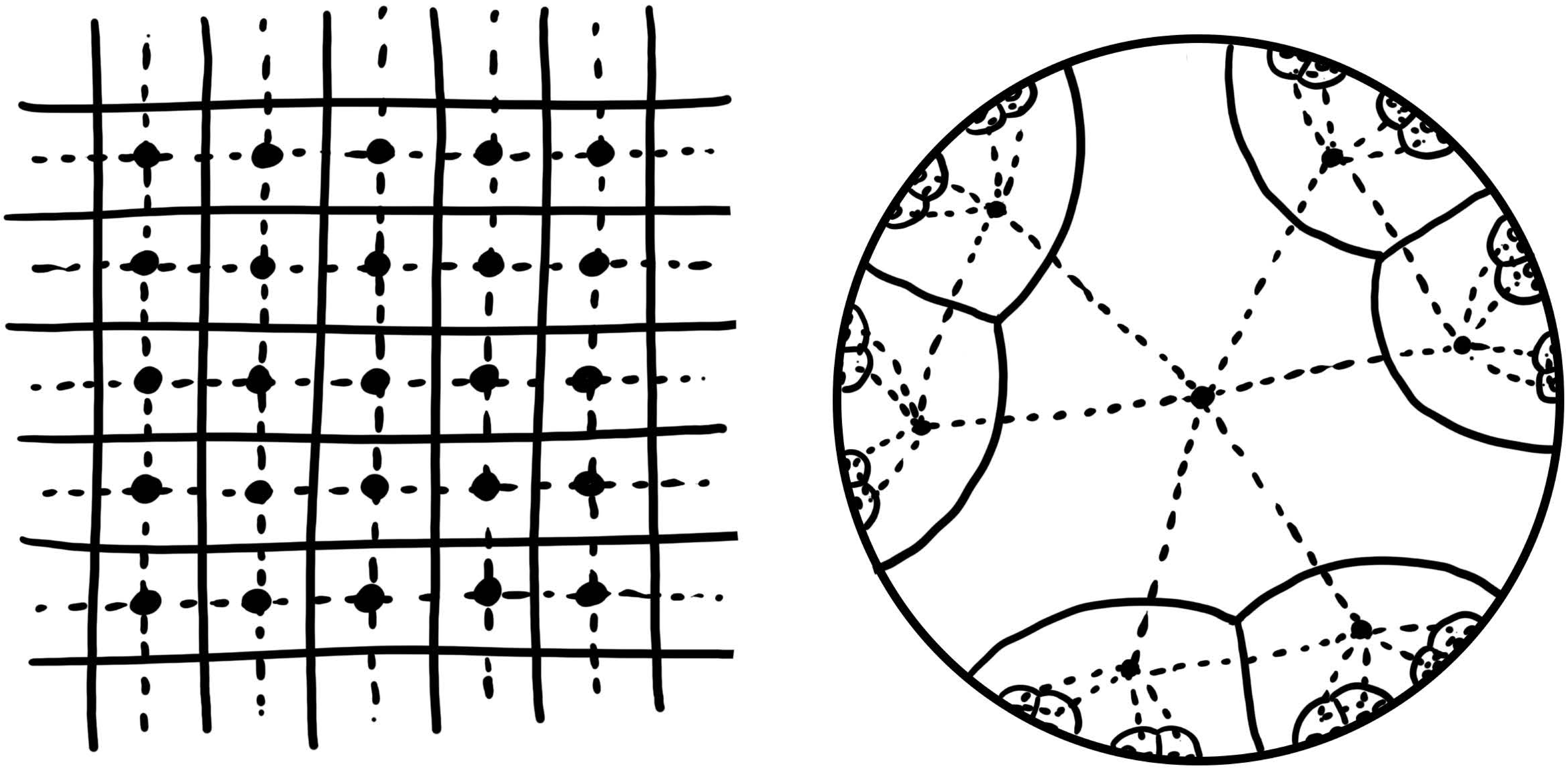




이런 조각의 변들을 이어 붙여
만들 수 있겠죠.

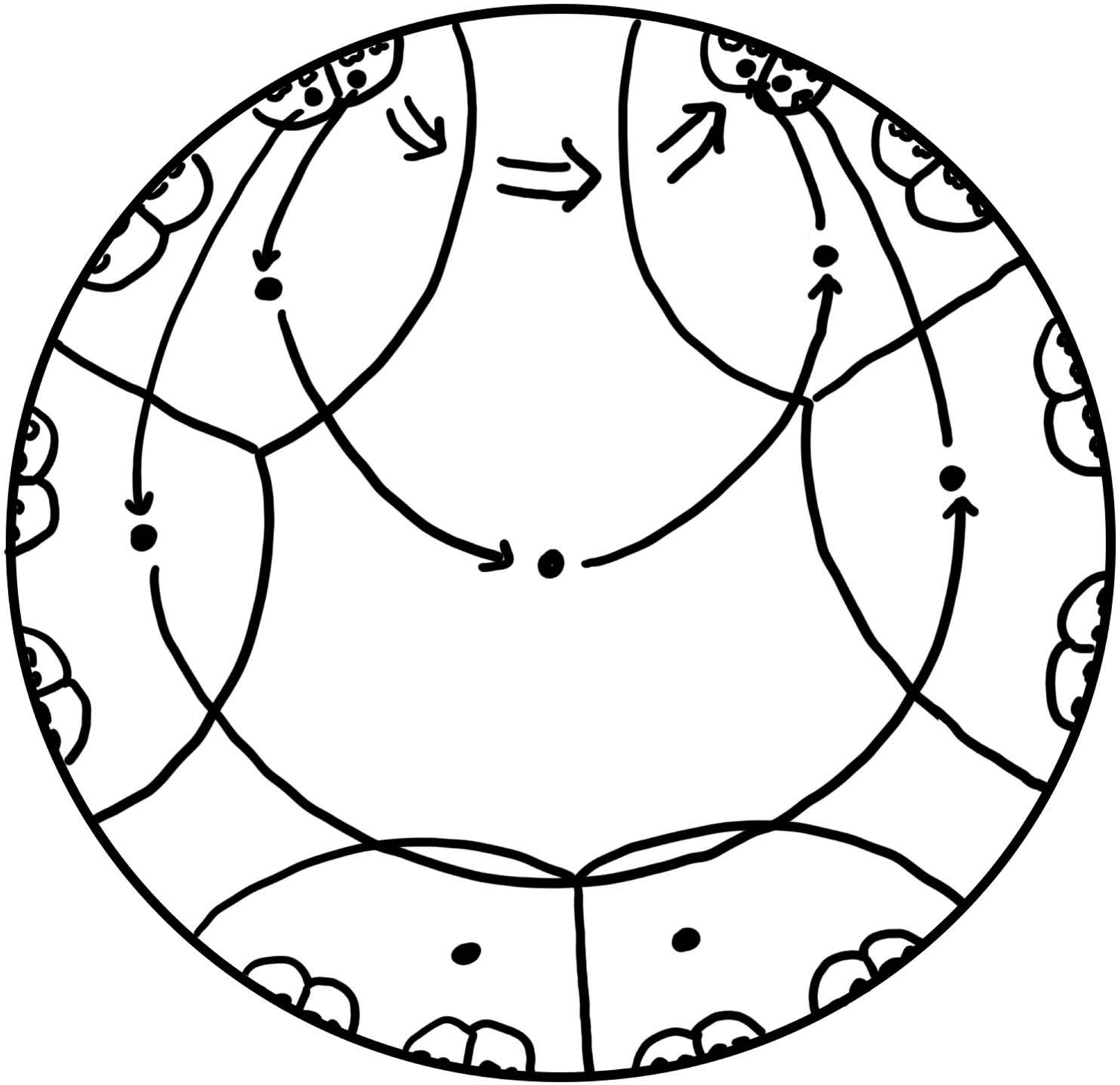
이 방파제 같은 쌍곡 곡면은,

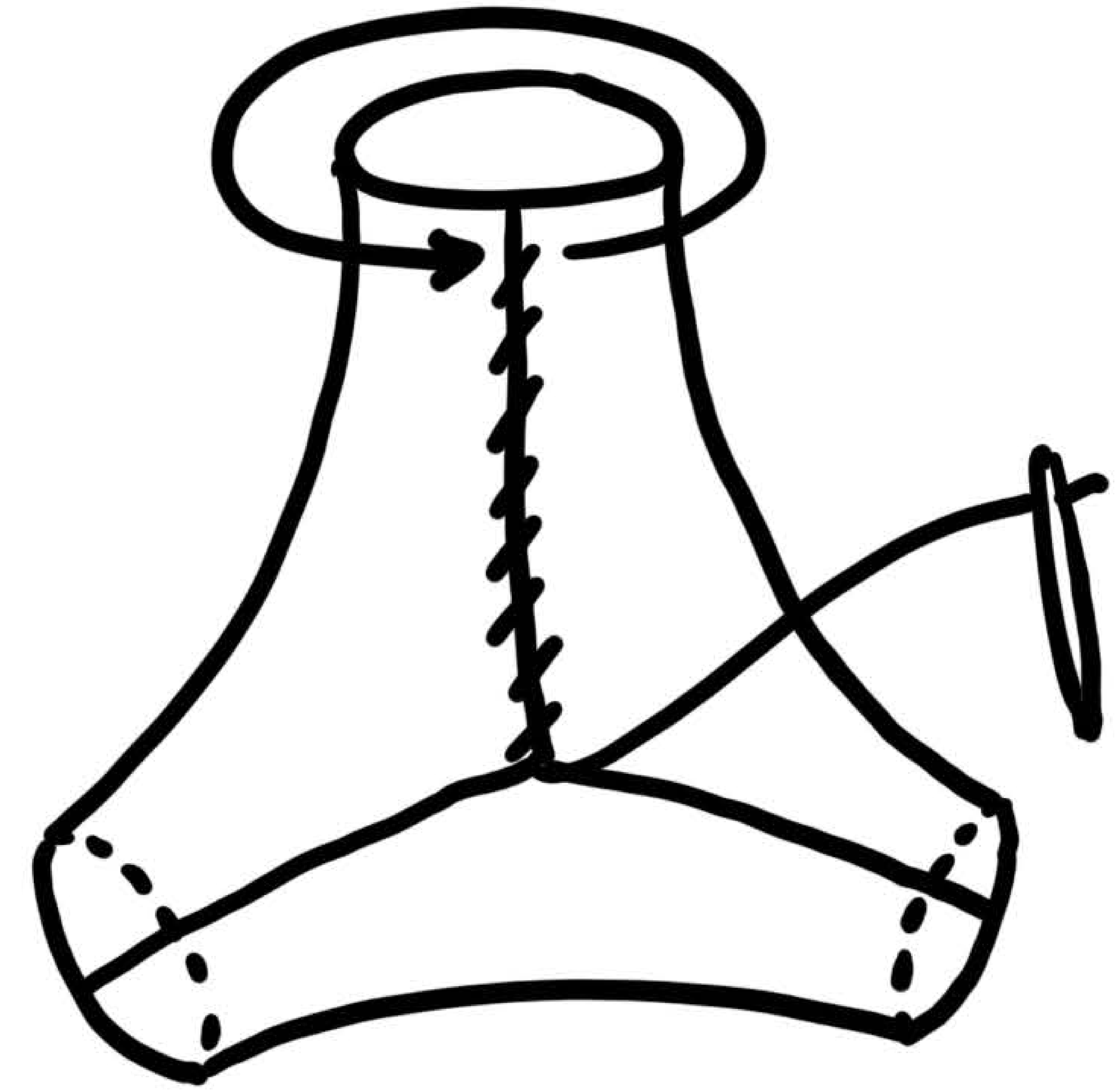
그럼 원통, 토러스 때와 마찬가지로 조각을 끝없이 이어 붙이면....



쌍곡면을 덮는 예쁜 타일 무늬가 만들어집니다.

물론 이 쌍곡면을 타일 결대로 말아 곡면을 다시 만들 수 있죠.





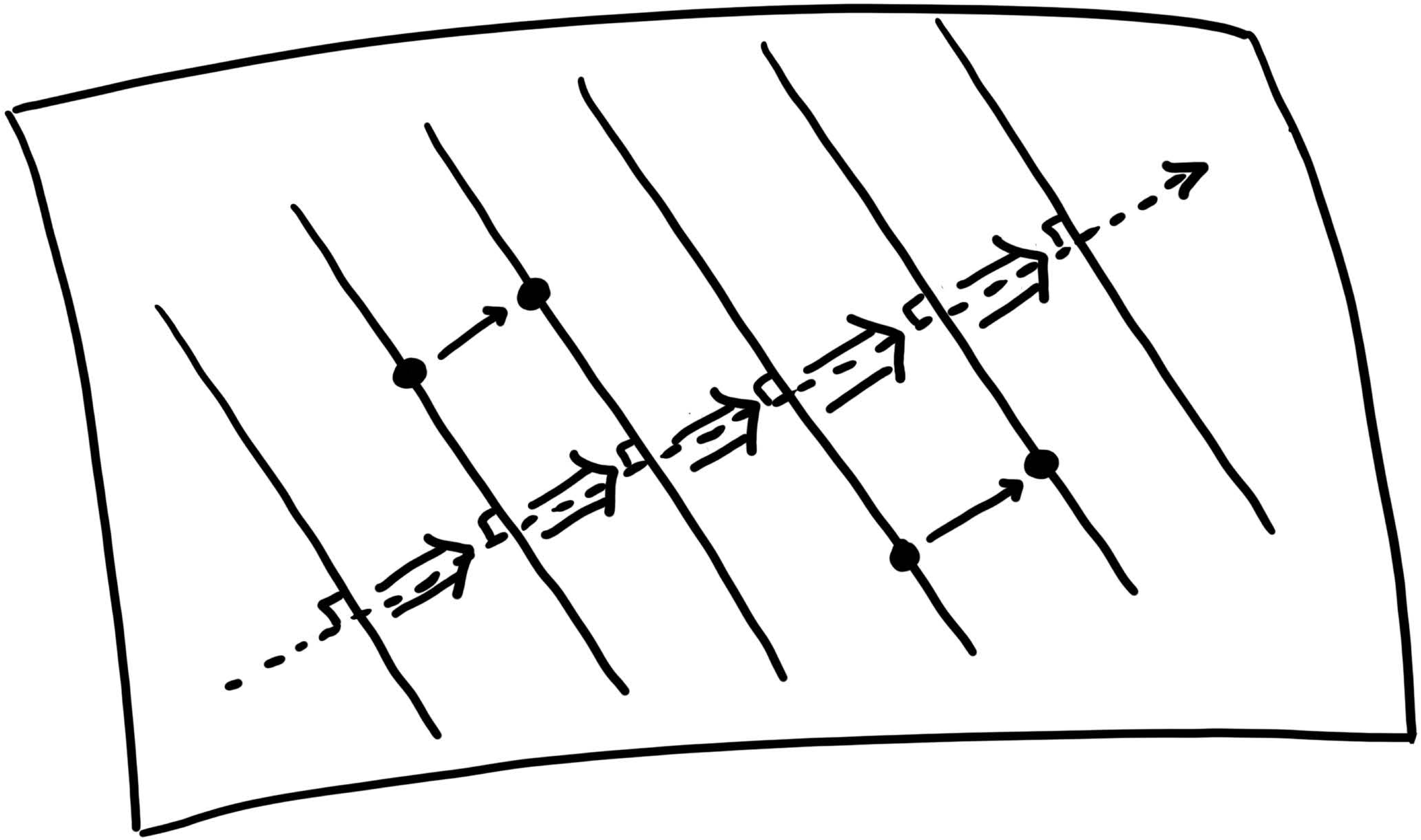
예를 들면, 왼쪽과 같이

쌍곡면을 풀칠해 이어 붙이면

오른쪽에서의 바느질과 같은

효과가 있습니다.

그렇다면 역시, 공간에 알맞는 "풀칠 방법"을 잘 이해해야겠군요.



평면의 경우에는, 이렇게 일정한 방향으로 미는 것이 풀칠이었습니다.

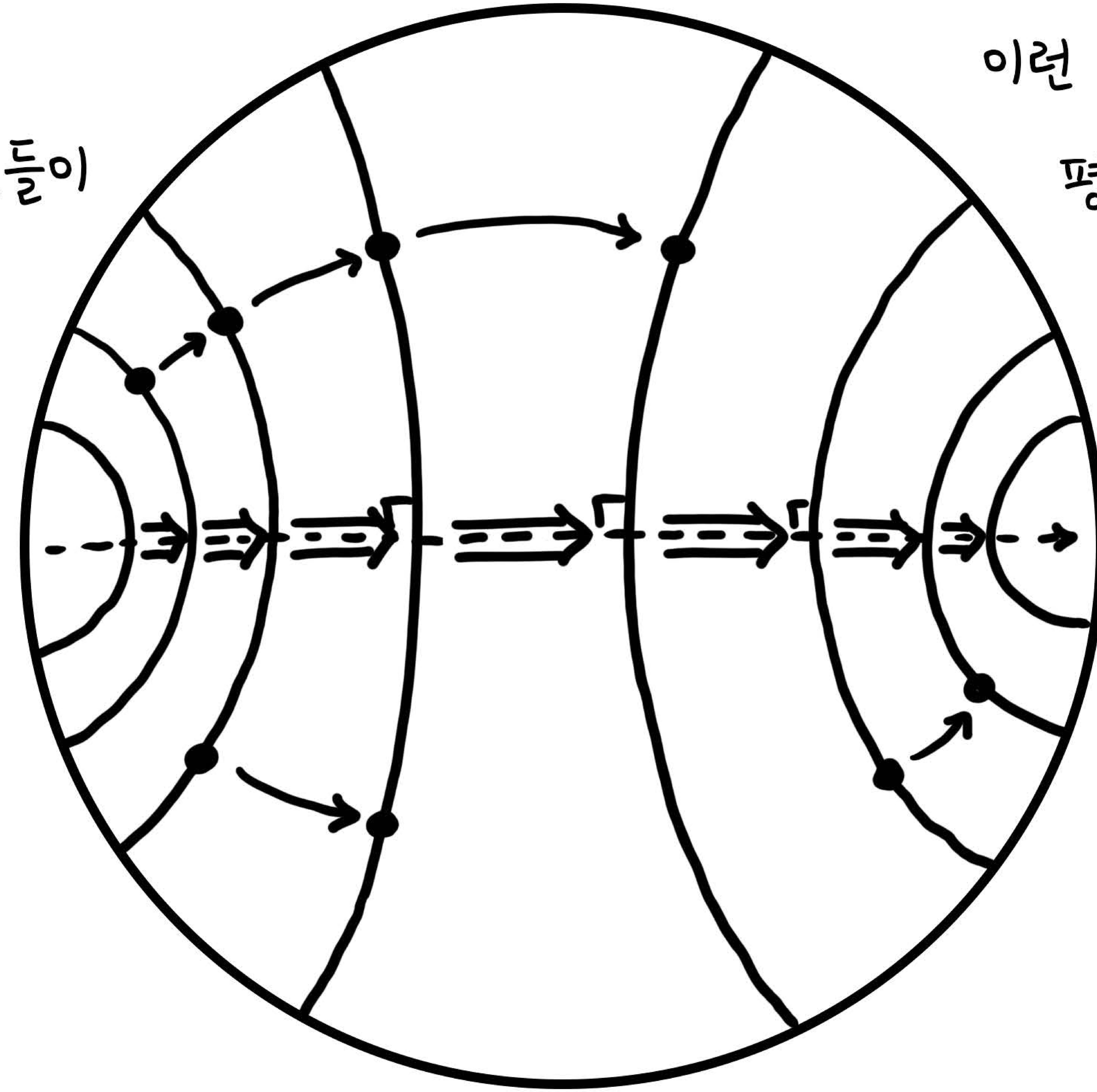
사실 쌍곡면에서도 크게 다르지 않습니다. 한 방향으로 미는거죠.

다만 기억하시듯,

쌍곡면에서는 직선들이

조금 이상하게

행동하기에,

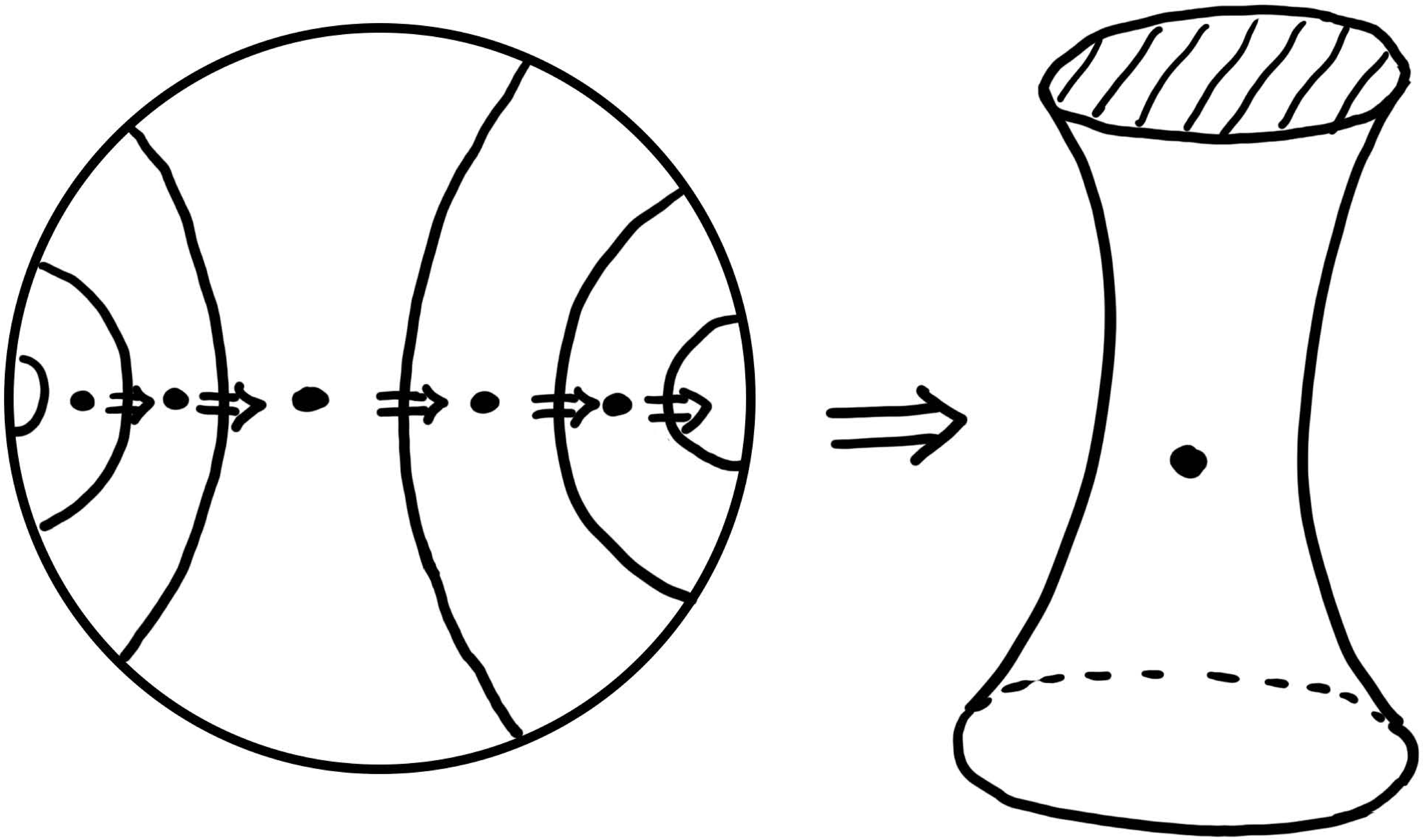


이런 심플한 조작마저도

평면과는 크게 다른

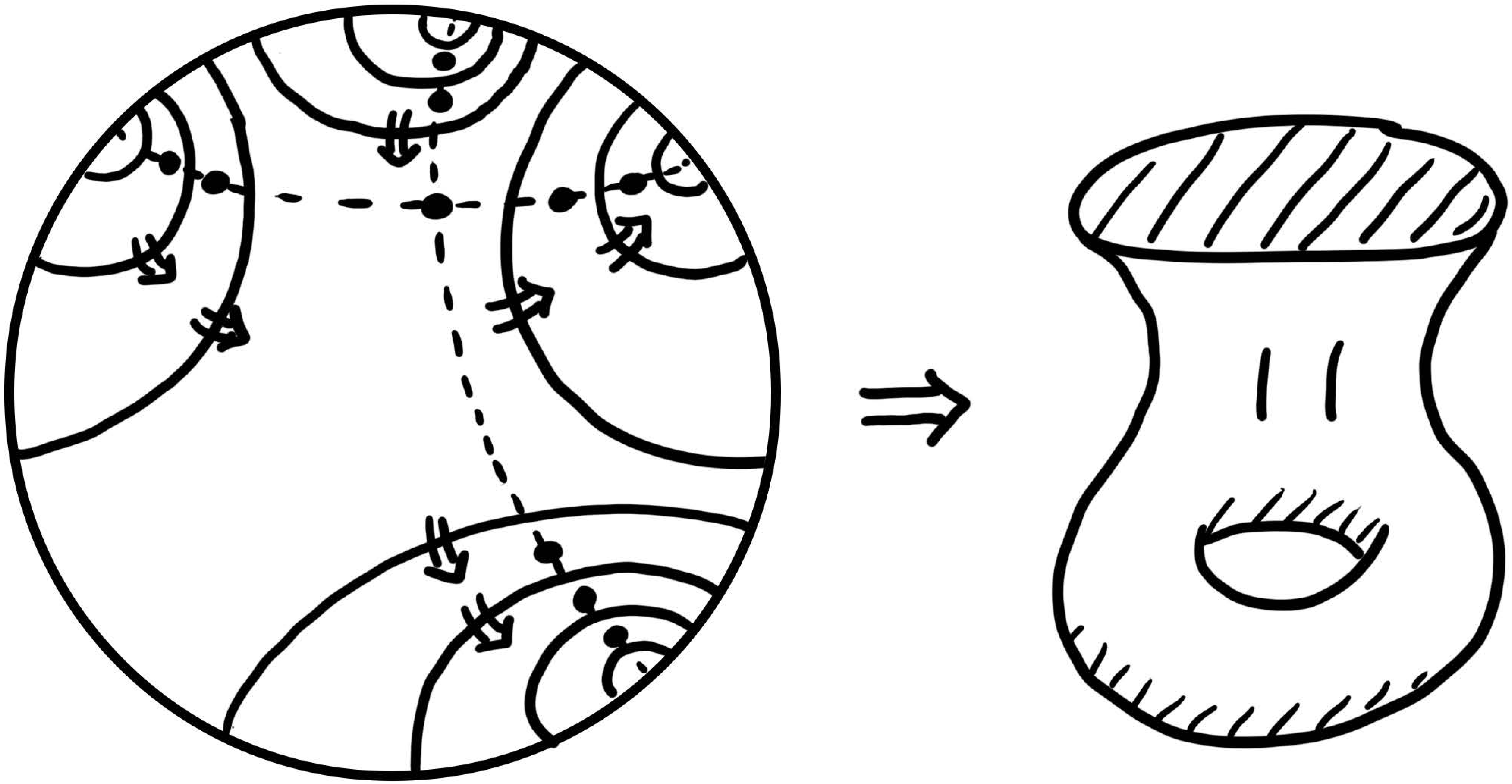
효과를 줄 수 있죠.

예를 들자면, 그냥 한 방향으로만 마는 거야 어렵지 않죠.



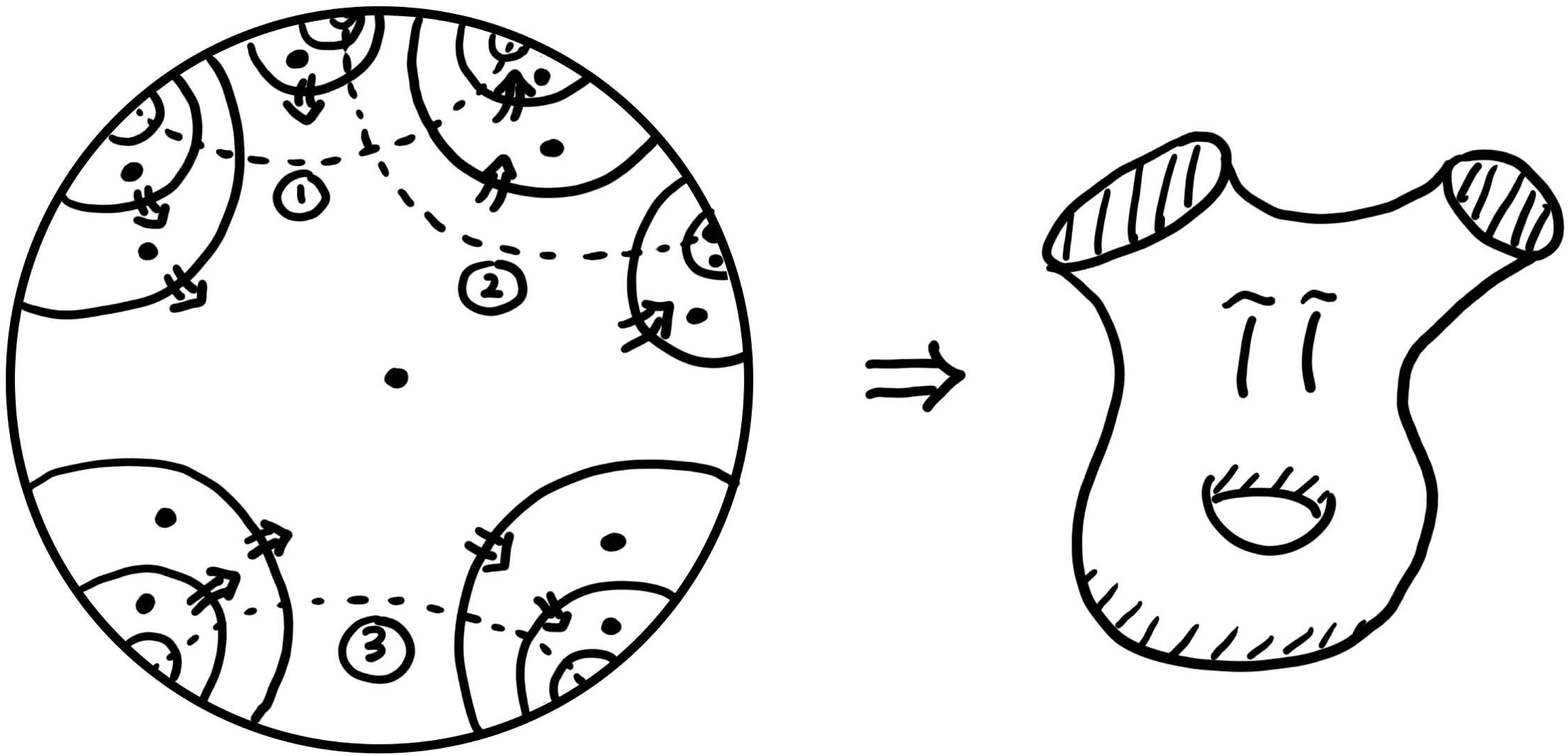
이 경우에는 (조금 잘록하게 생긴) 원통이 나옵니다.

평면에서처럼, 독립된 두 방향으로 동시에 마는 것도 가능합니다.



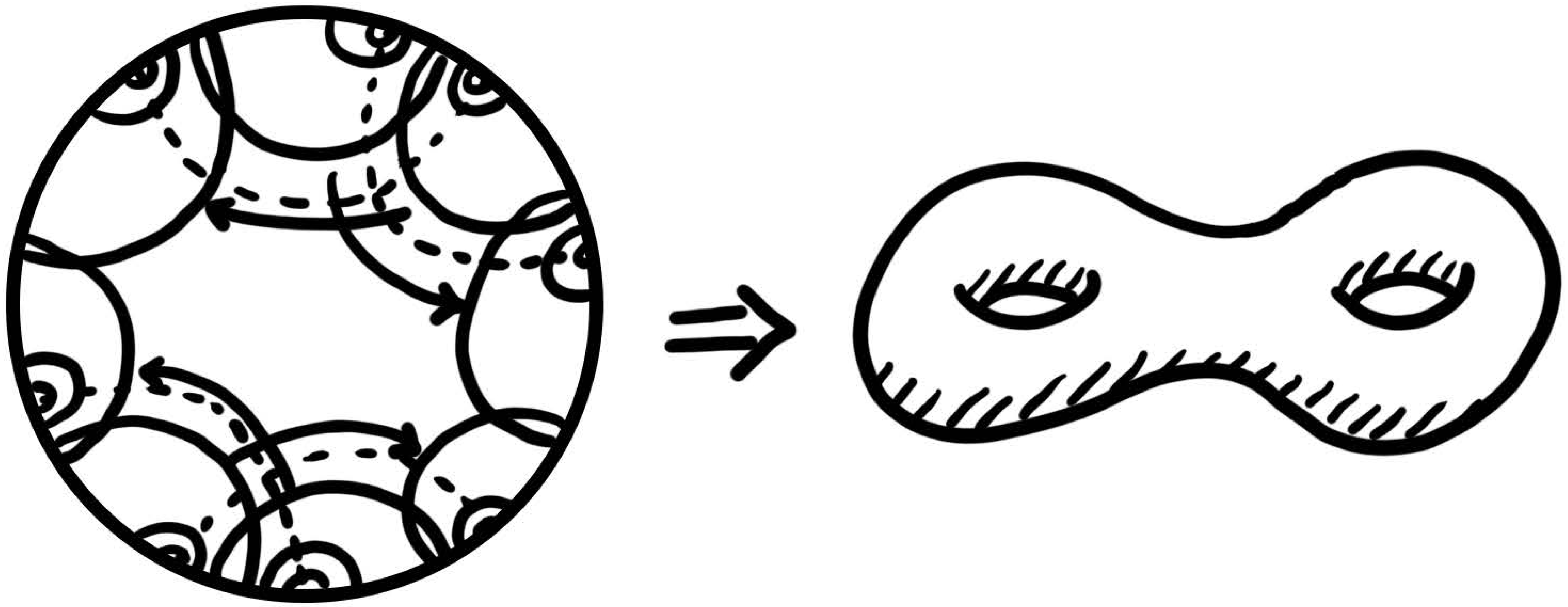
그러면 머리가 뚫린 토러스가 나온다네요. 여기까진 좋습니다.

그런데 이제 좀 이상합니다. 평면과 다르게, 쌍곡면에서는
“독립인 방향 세 개”를 잡을 수 있기 때문에, 그렇게 말면...

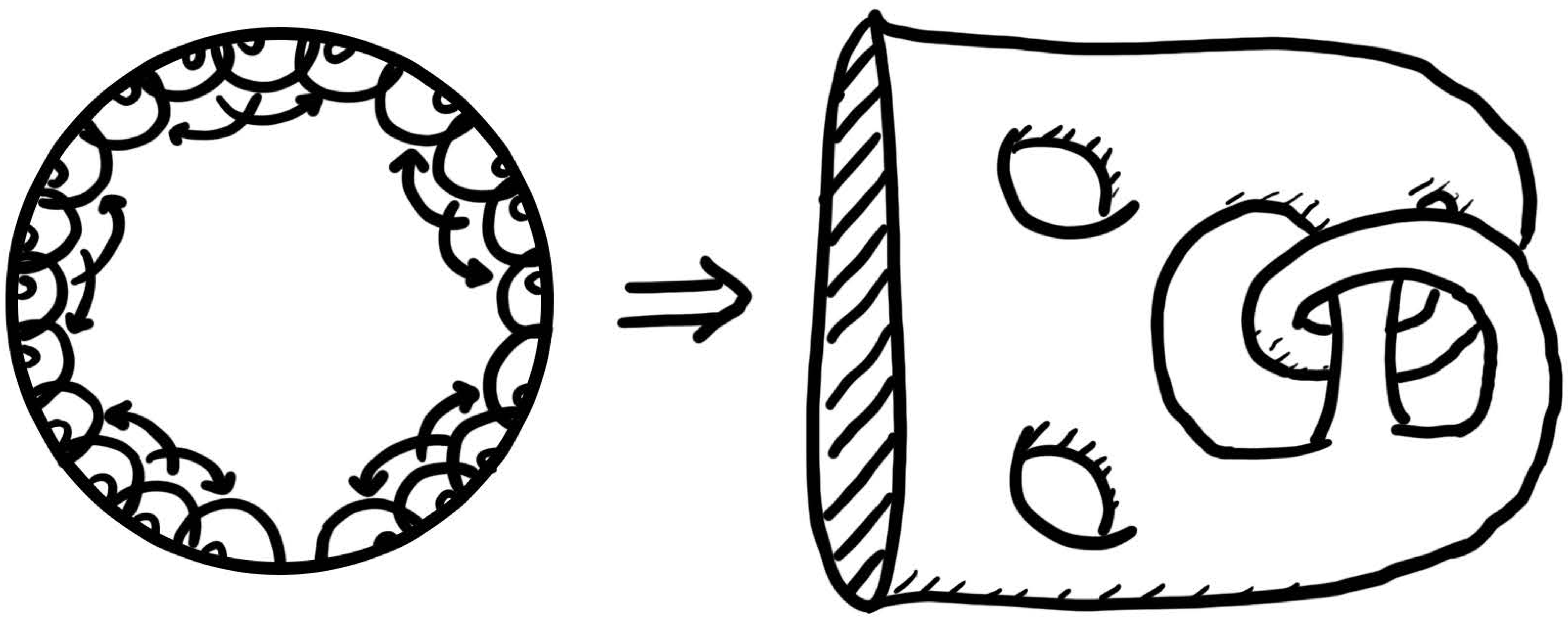


또 새로운 모양을 만들 수 있죠. 두 곳이 뻥 뚫린 난 토러스입니다.

이런 걸 얼마든지 할 수 있기 때문에, 더 복잡한 모양도 가능합니다.



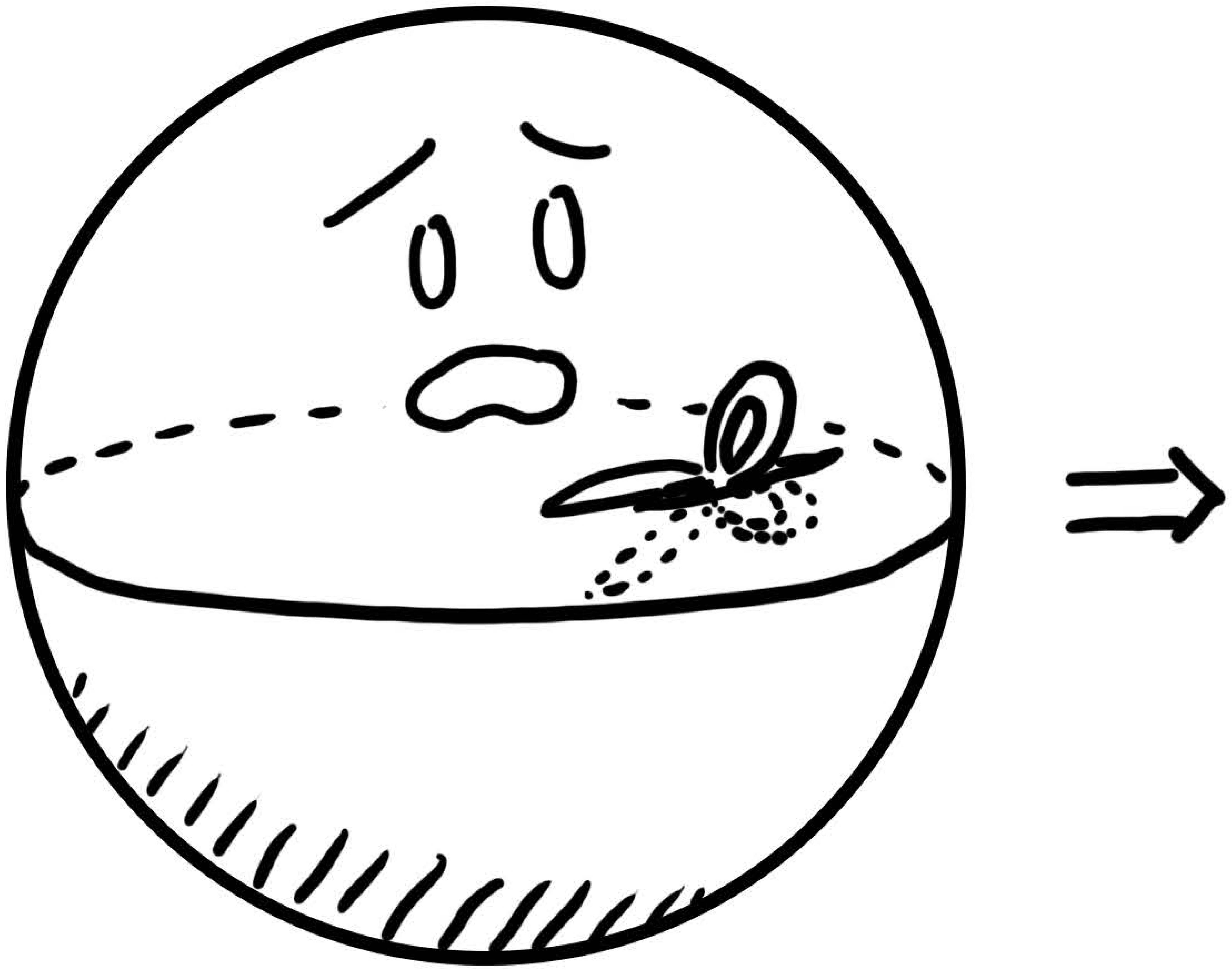
이런 구멍 두 개
곡면도 가능하고,

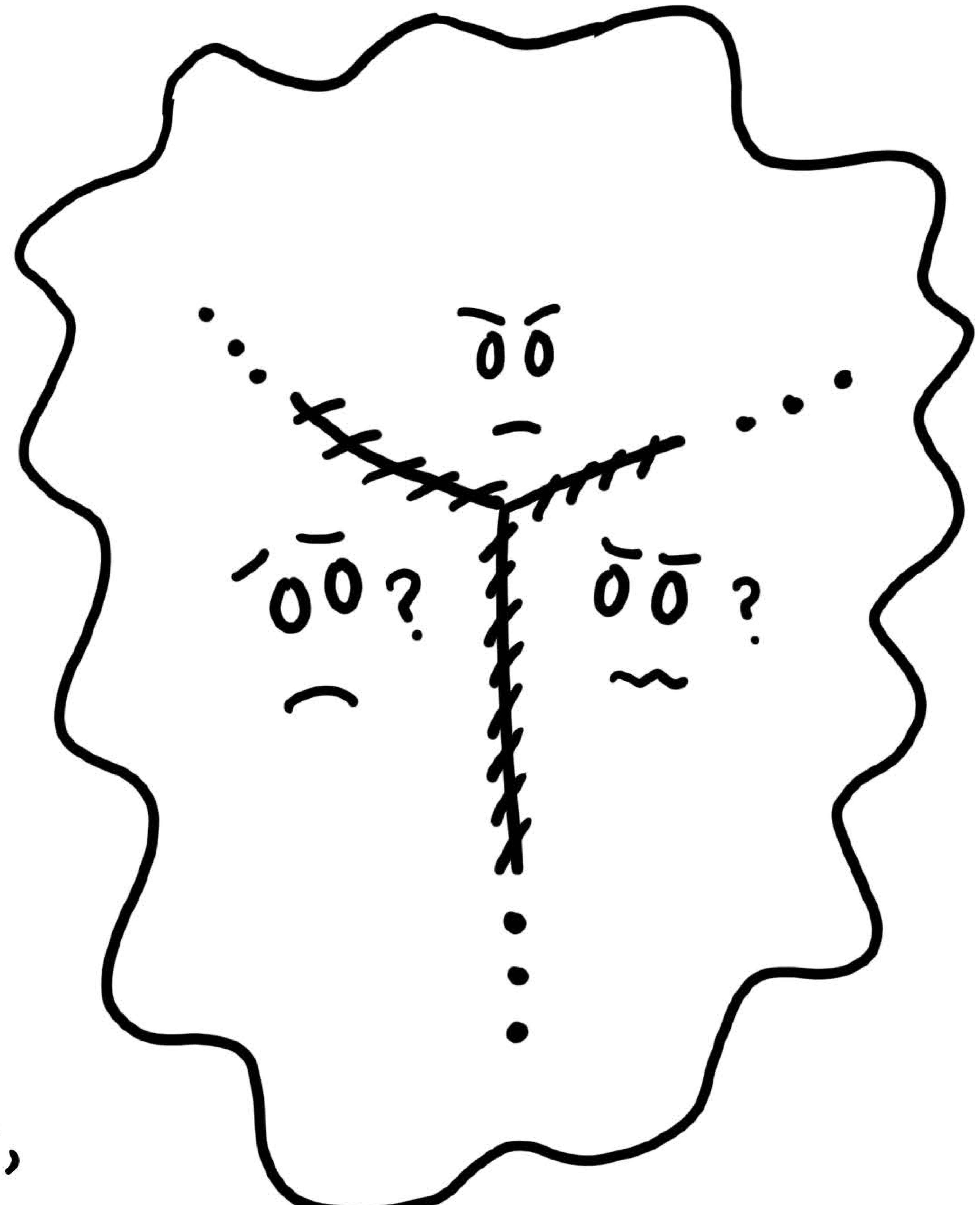


요런 모양도
가능하죠.


하지만 저렇게 다재
다능한 쌍곡면도 못
만드는 게 구면입니다.
?

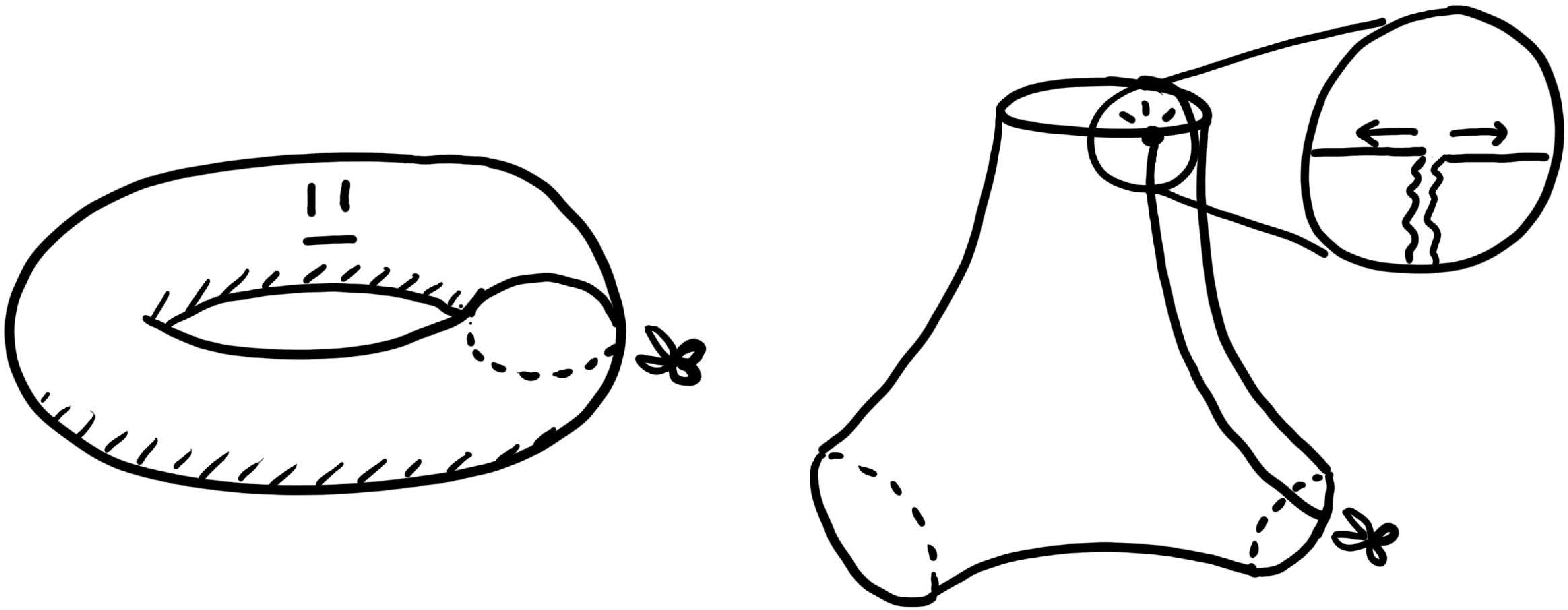
아니 왜, 구면도 원통이나
토러스처럼 잘라서,





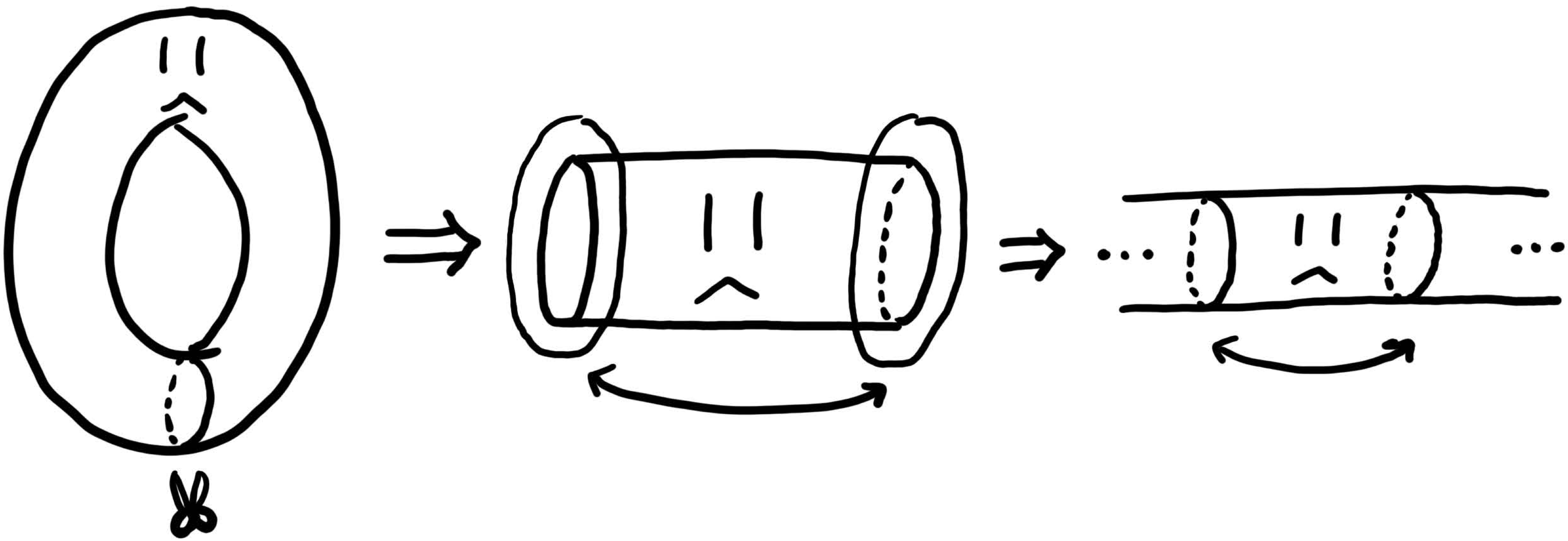
이어 붙이면 평면이든 쌍곡면이든,
아니면 다른 그 무언가라도 되지 않을까요?

그게 말이죠, 원통이든 토러스든, 아니면 방파제 모양이든,



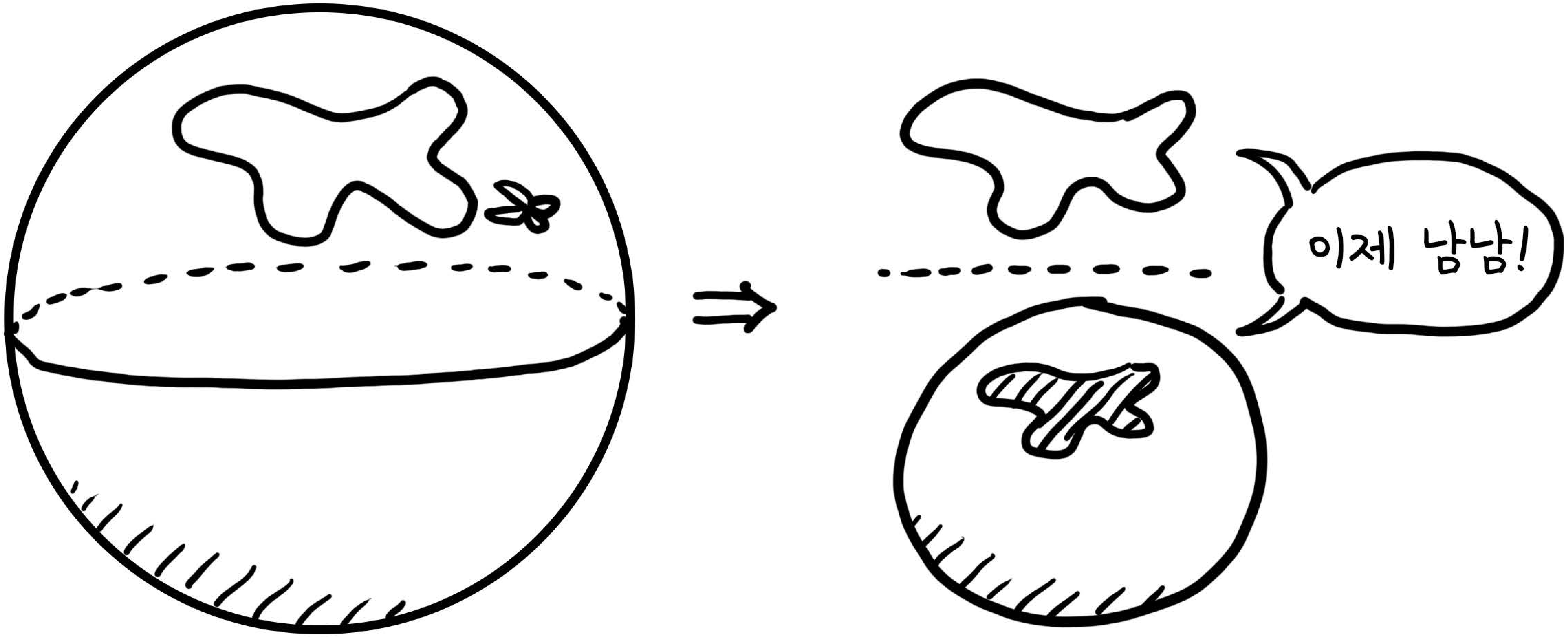
정해진 변을 따라 깔끔하게 잘라내서 조각을 만들 수 있는데요.

그렇게 잘라내고 나면, 이 변 양쪽은 이제 분리가 되니까,



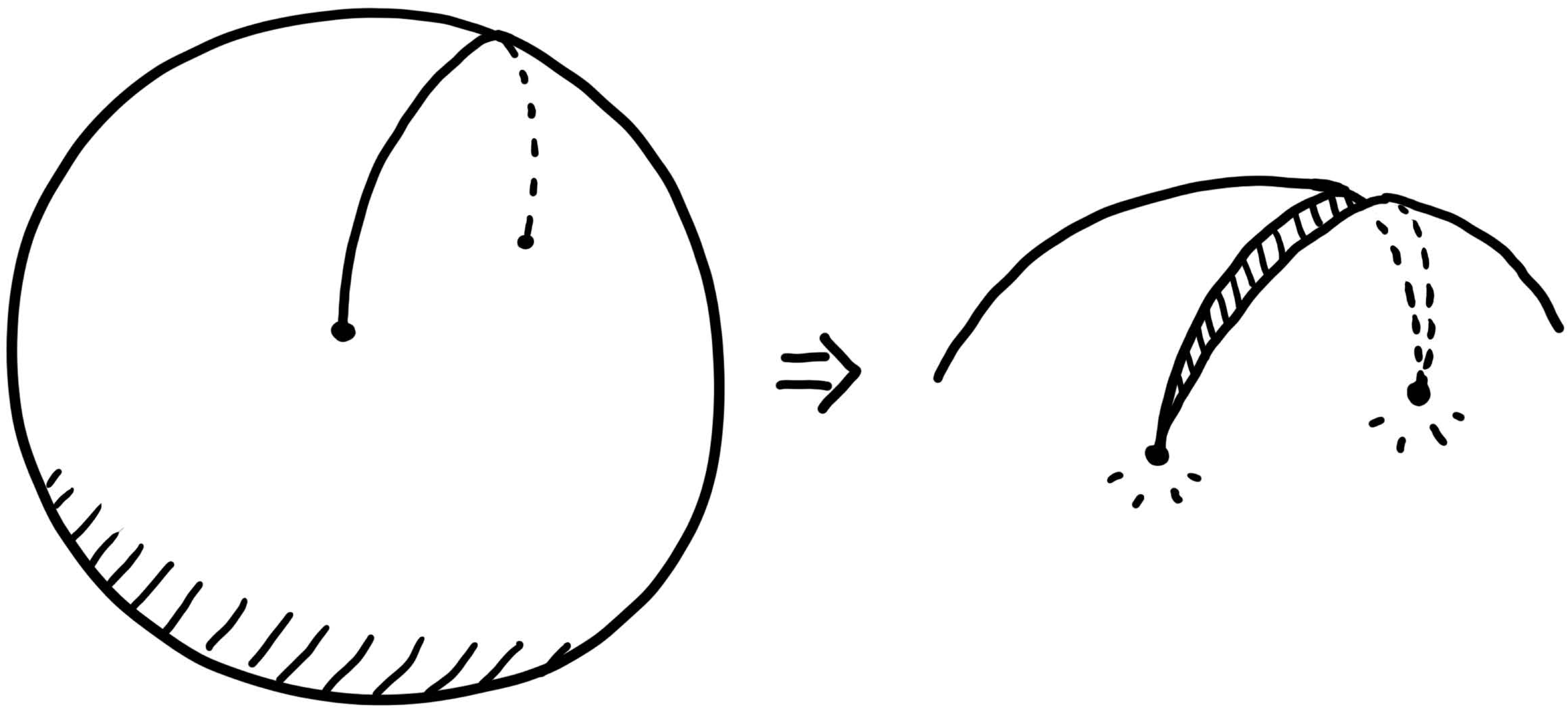
다른 조각을 가져다가 이어 붙여도 별 문제 없지 않겠어요?

근데 그거 있잖아요. 구면에서 닫힌 곡선을 잘라내면,



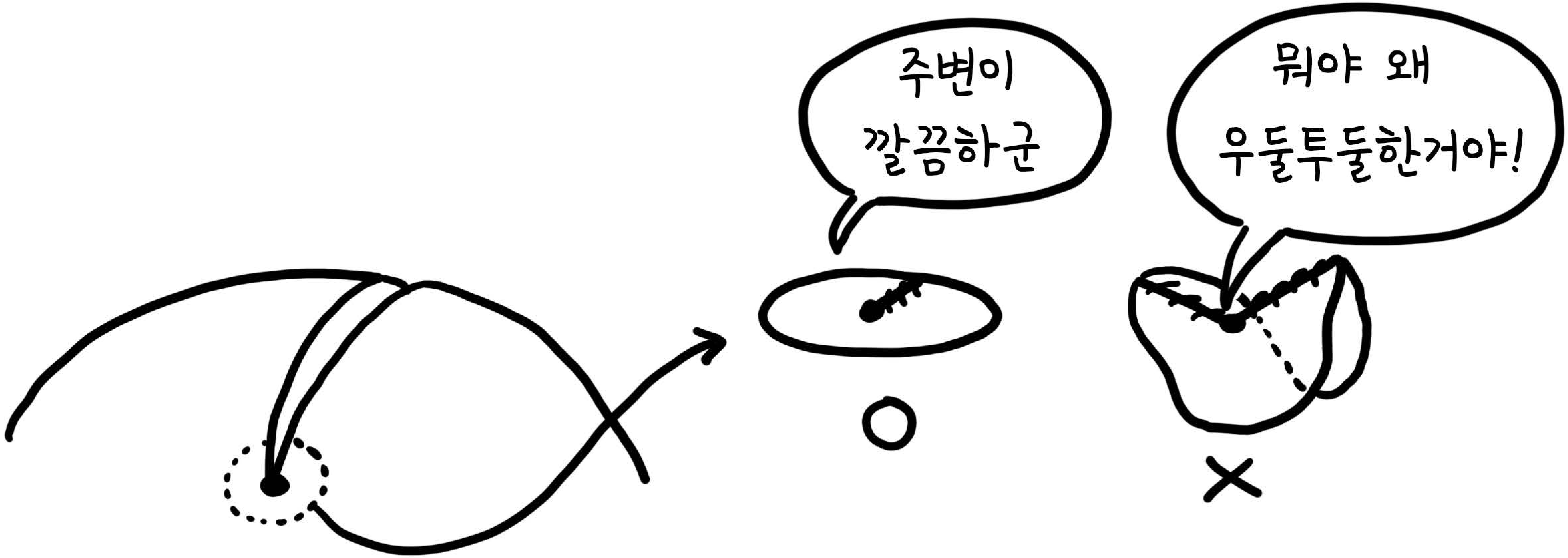
반드시 이렇게 두 조각으로 분리된다는 사실이요.

그렇기 때문에, 구면에서 조각을 분리하지 않고 가위질을 하려면...



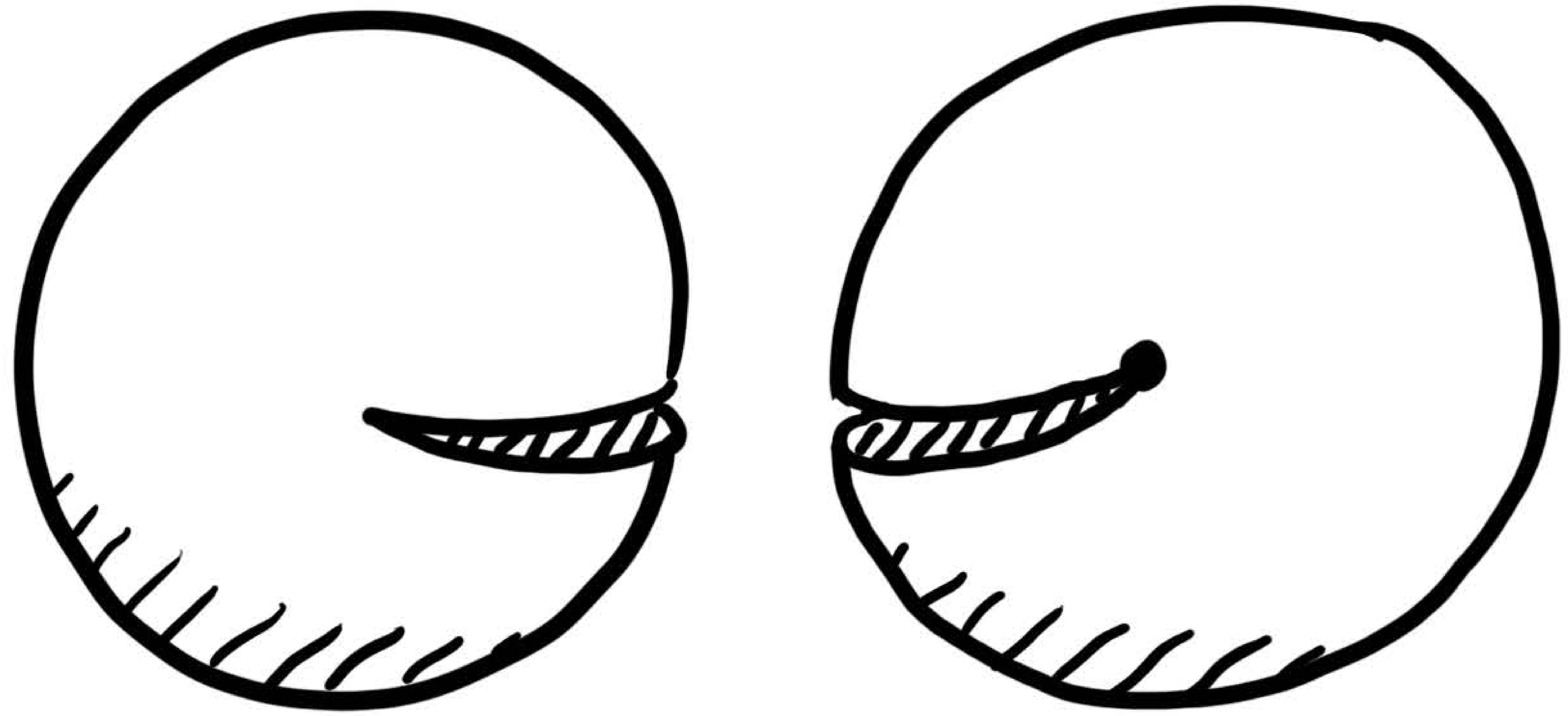
이렇게 호 형태로 잘라낼 수밖에 없습니다. 끝점이 눈에 띄는군요!

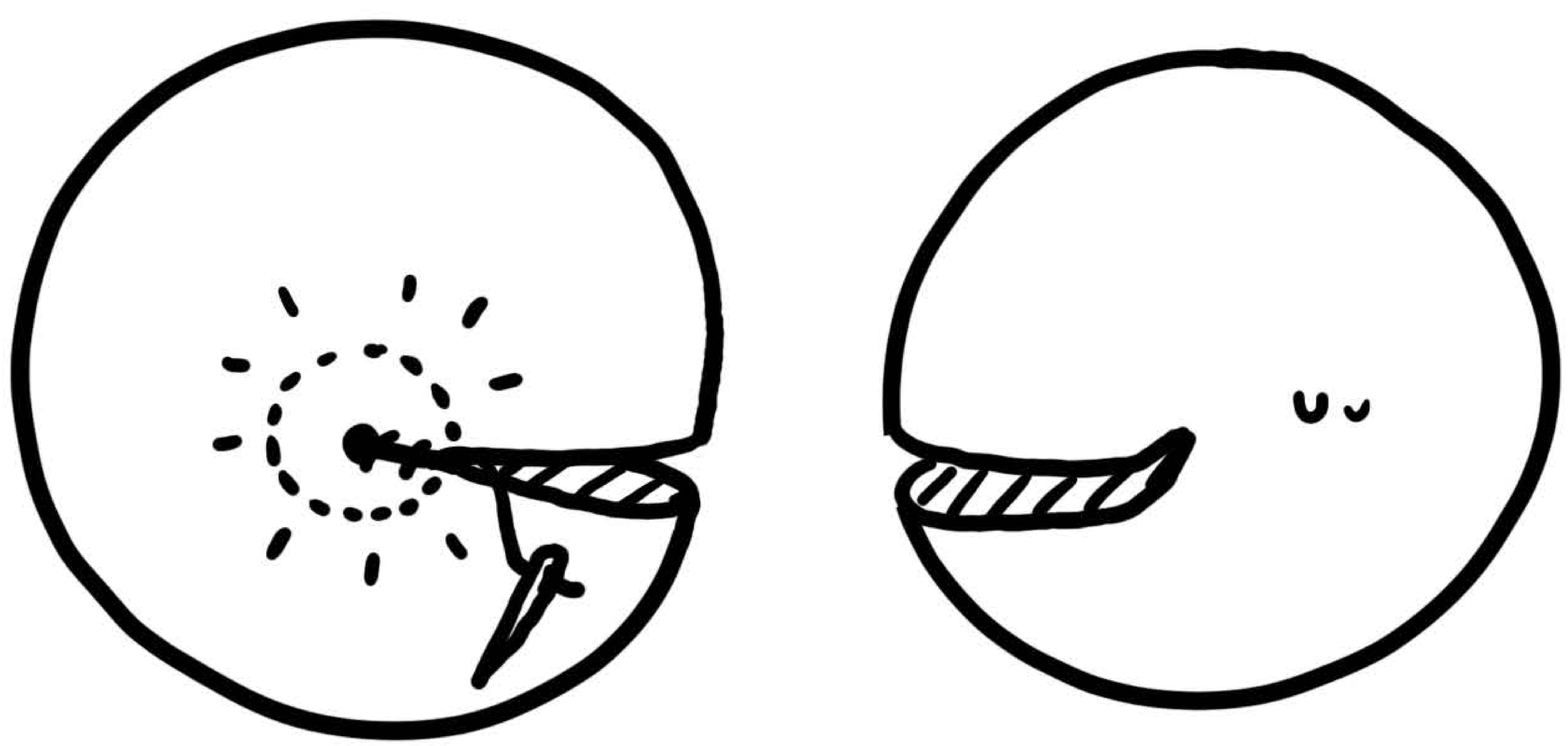
그리고 우리가 이전에 본 "풀칠의 특징"을 잘 되새겨 보면,
로컬하게 봤을 때 곡면의 성질을 보존해야 했죠.



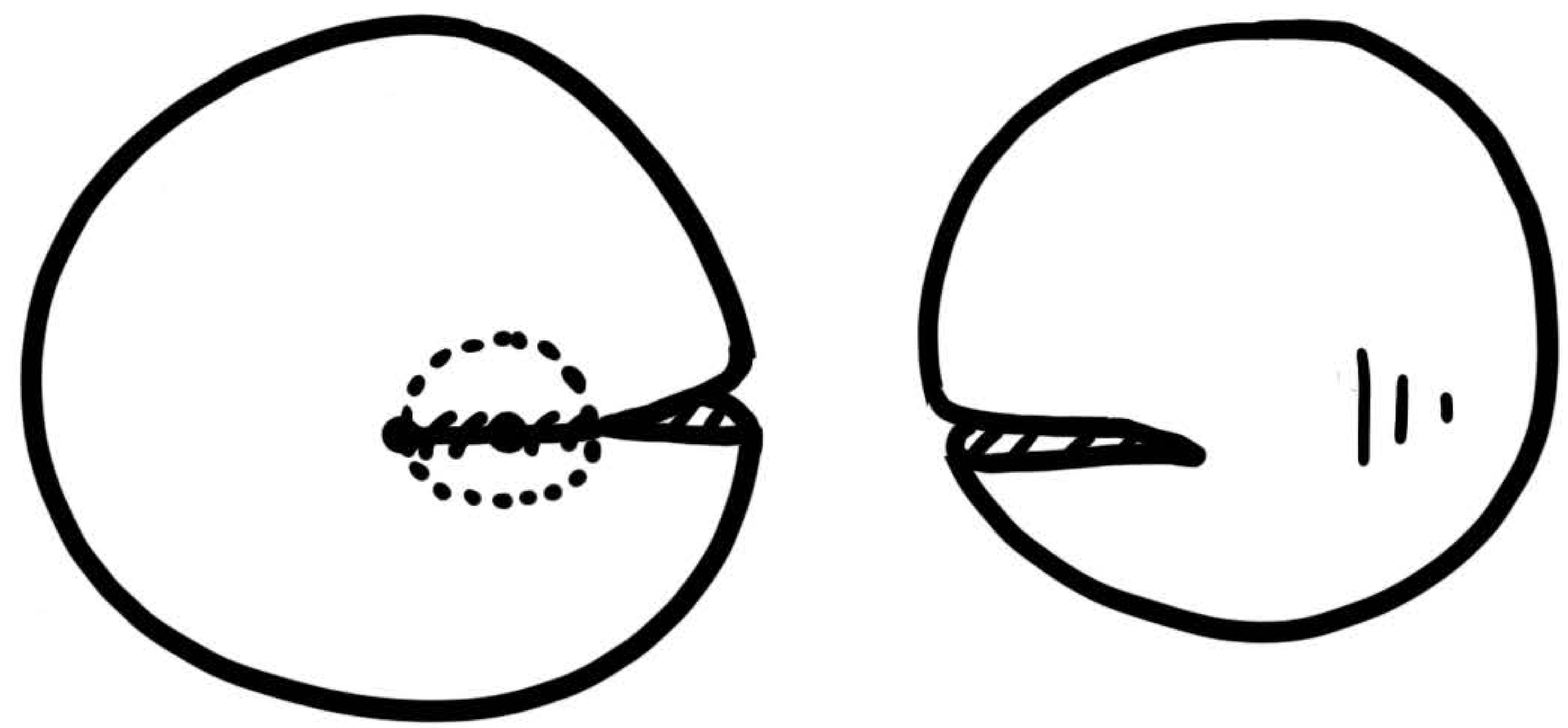
그렇기 때문에, 이런 점 주변에는 여러 조각을 함부로
이어 붙이지 못합니다.

그러니 이런 셈이죠.
만약 조각 둘이서
서로 이어붙으려고 해도,



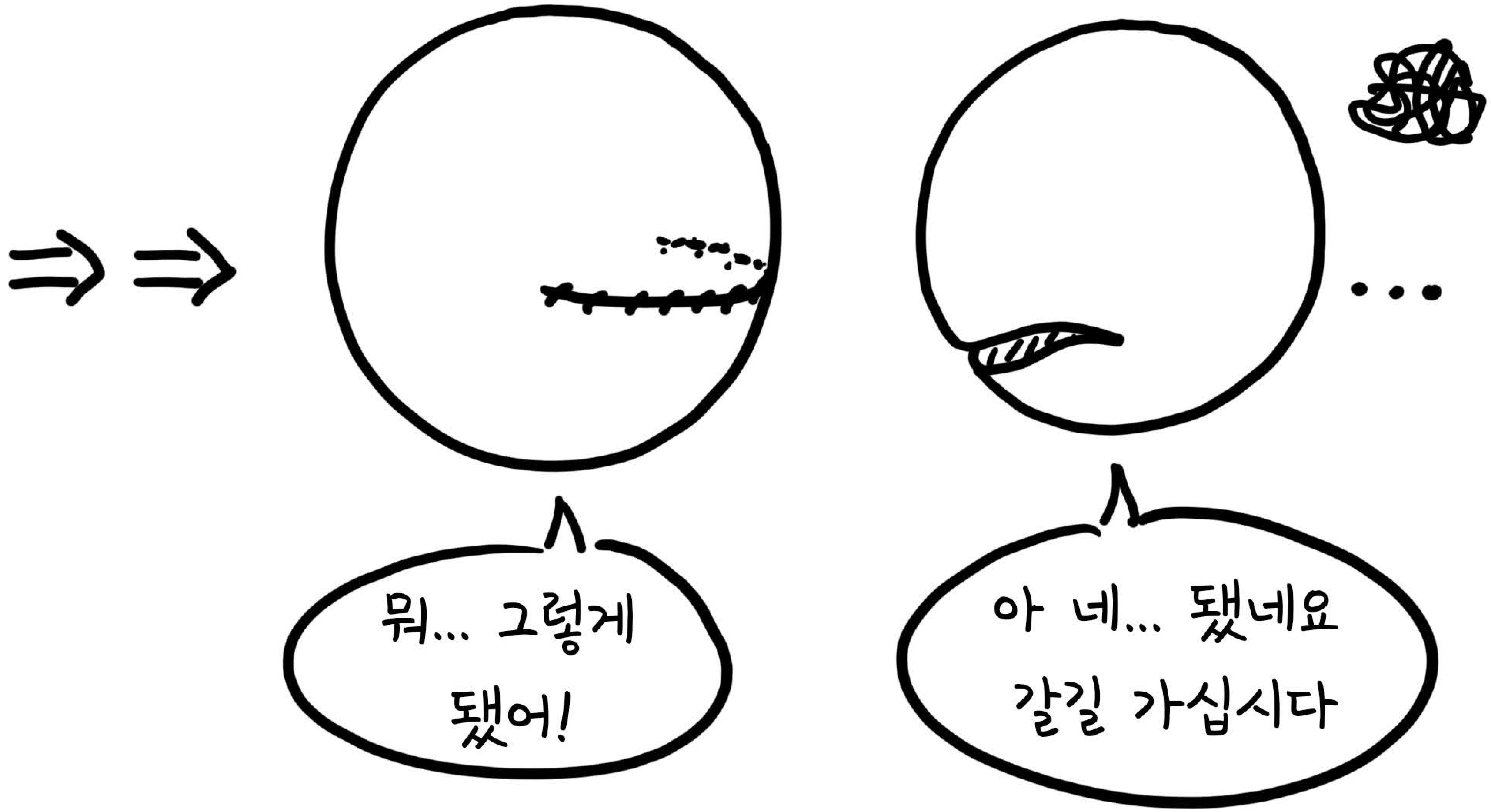


호의 꼭짓점 근처에서는 혼자 아물고,



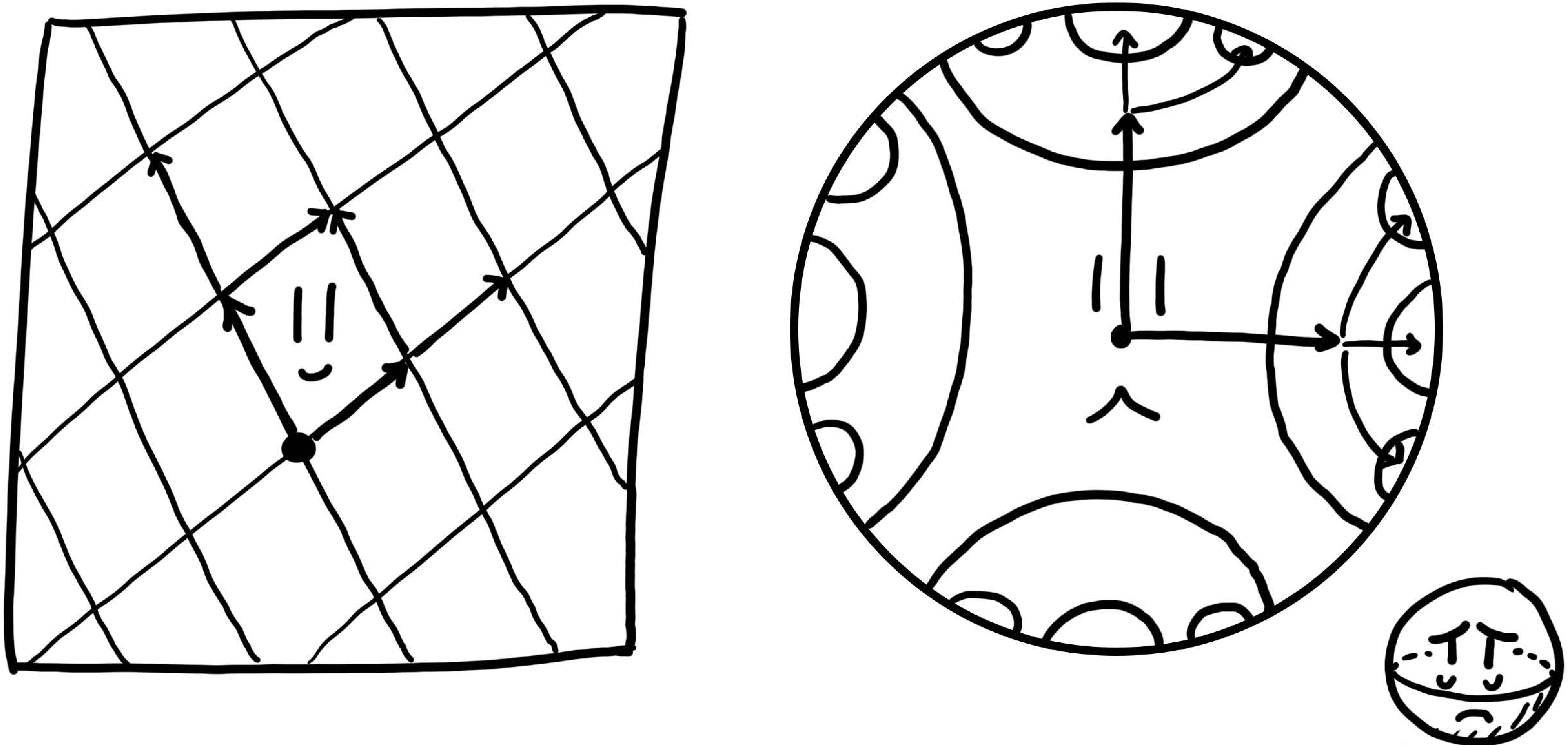
살짝 더 나아간 지점에서도
혼자 아물고,

... 그렇게 야금야금 하다 보면 저 혼자 다 아물겠죠.



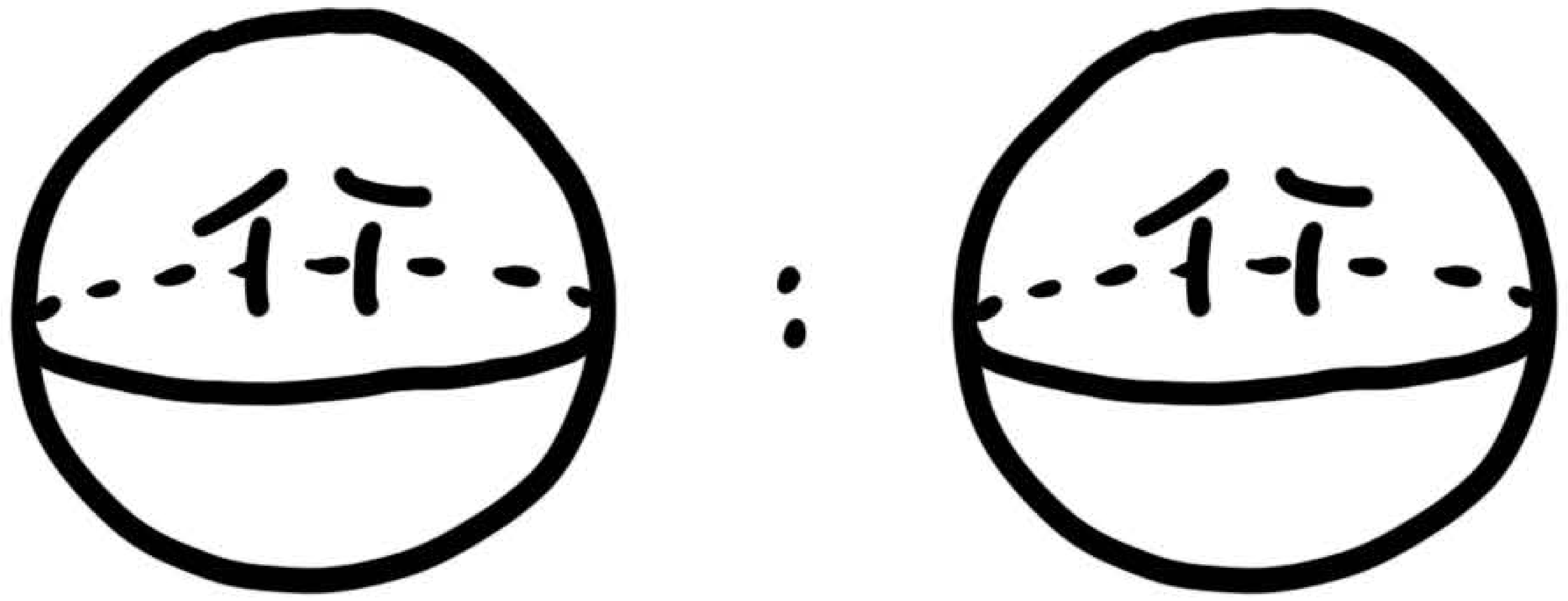
그러니, 구는 여러 조각으로 서로 이어져 더 큰 곡면을 만들 수 없죠.

그렇기 때문에, 구는 "이미 펴져 있는 상태"인 독특한 상태고,

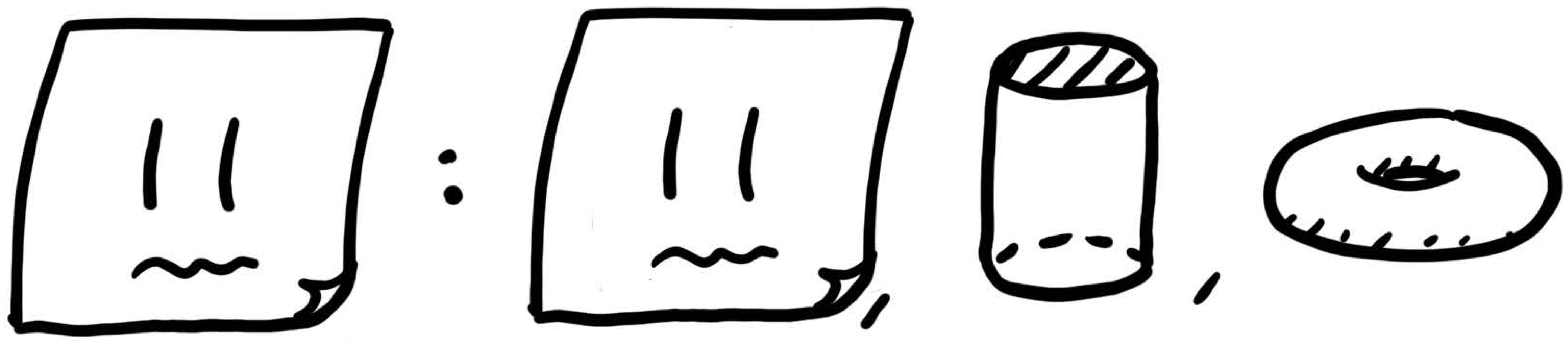


평면이나 쌍곡면 같은 다른 곡면과는 어울리지 않아요.

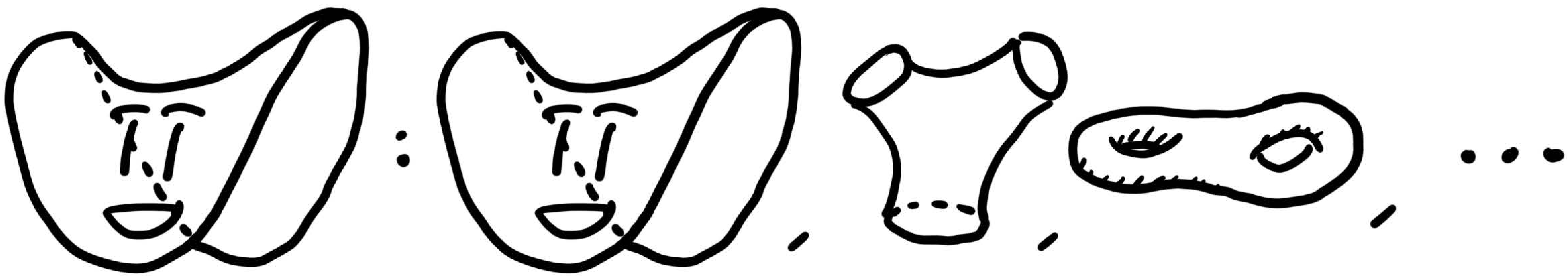
얘기를 정리해 보죠. "최대로 편 상태"에는 세 가지가 있는데,



구면은 혼자서 노는 애고,



평면은 대충
이 정도를
만들 수 있고,



나머지 곡면은 모두 쌍곡면을 말아 만들 수 있습니다.


그러니, 사실상 대부분의 곡면을 공부한다는 것은...
우리들 엄마래
...
⇒, ⇑, ...
쌍곡면에 가능한 "풀칠 방법"-군을
공부한다는 것이나 마찬가지인 거죠!
다음 시간에는 이 얘기와 앞서 못한
얘기를 마저 하겠습니다.

<참고문헌>

Primary Source

- K. F. Gauss, Disquisitiones generals circa superficies curvas. Commentationes Societaties Regiae Scientiarum Gottingensis Recentoires, Commentationes Classis Mathematicae, Tom. VI. Gottingae, 1828, 99-146. (consulted the translated version by J. C. Morehead, A. M. Hiltebeitel: General Investigations of Curved Surfacees of 1827 and 1825, 2015, Leopold Classic Library.)
- E. Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Ann. Mat. Pura Appl. 1868, Vol. 2, Issue 1, 232-255.

Secondary Source

E. Scholz, The Concept of Manifold, 1850-1950. (Chapter 2 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).

K. S. Sarkaria, The Topological Work of Henri Poincaré (Chapter 6 in I. M. James et. al., History of Topology. 1999, North-Holland (Elsevier).

J. Stillwell, Poincaré amd the early history of 3-manifolds, 2012. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 49, No. 4, 555-576

J. Munkres, Topology (2nd ed). 2000, Pearson.

M. A. Armstrong, Basic Topology. 1983, Springer.

D. W. Kahn, Topology: An Introduction to the Point-Set and Algebraic Area. 1995, Dover Publications.

M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces. (Revised version) 2016, Dover Publications.

F. Bonahon, Low-Dimensional Geometry – From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots. 2009, AMS.