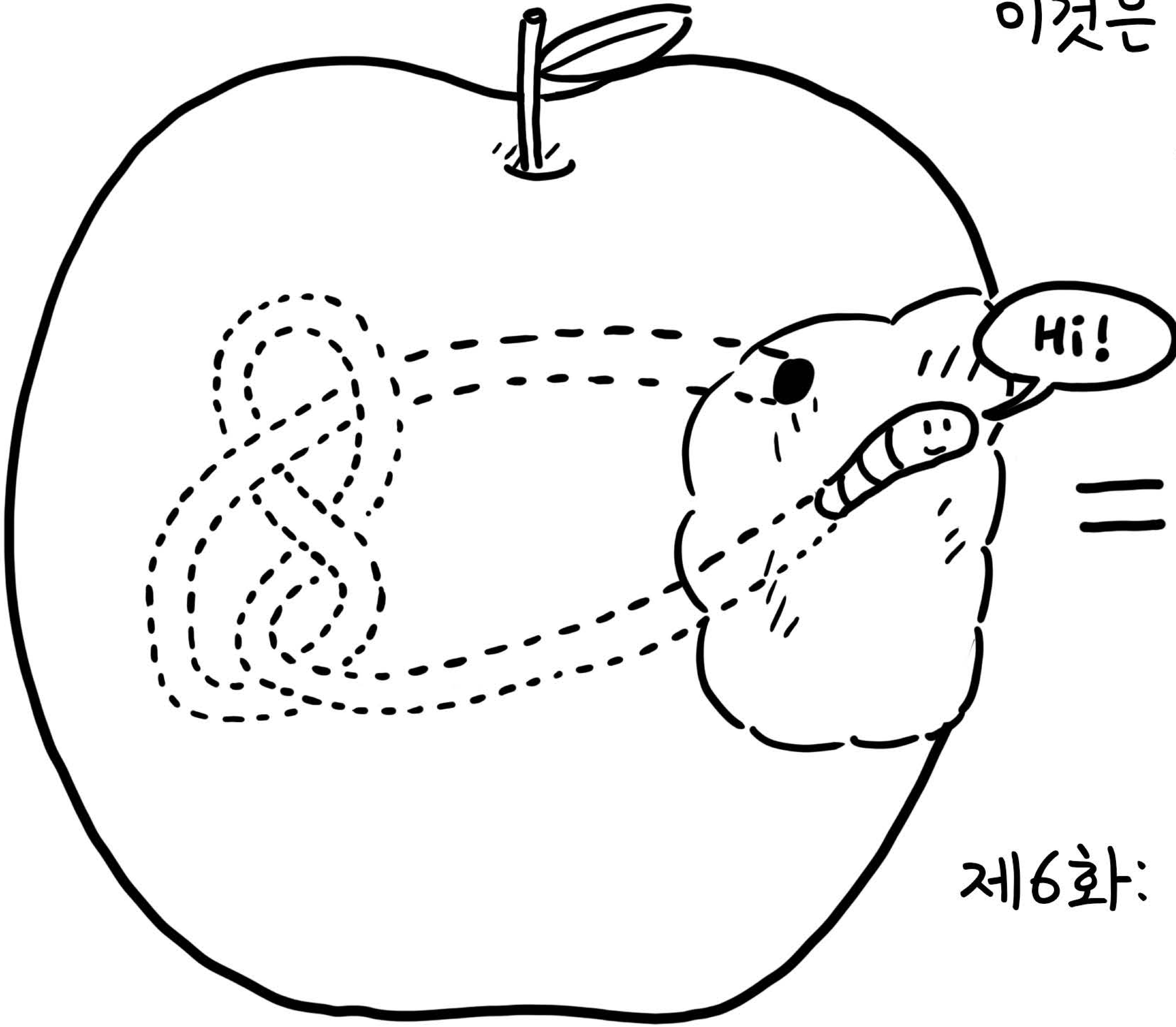
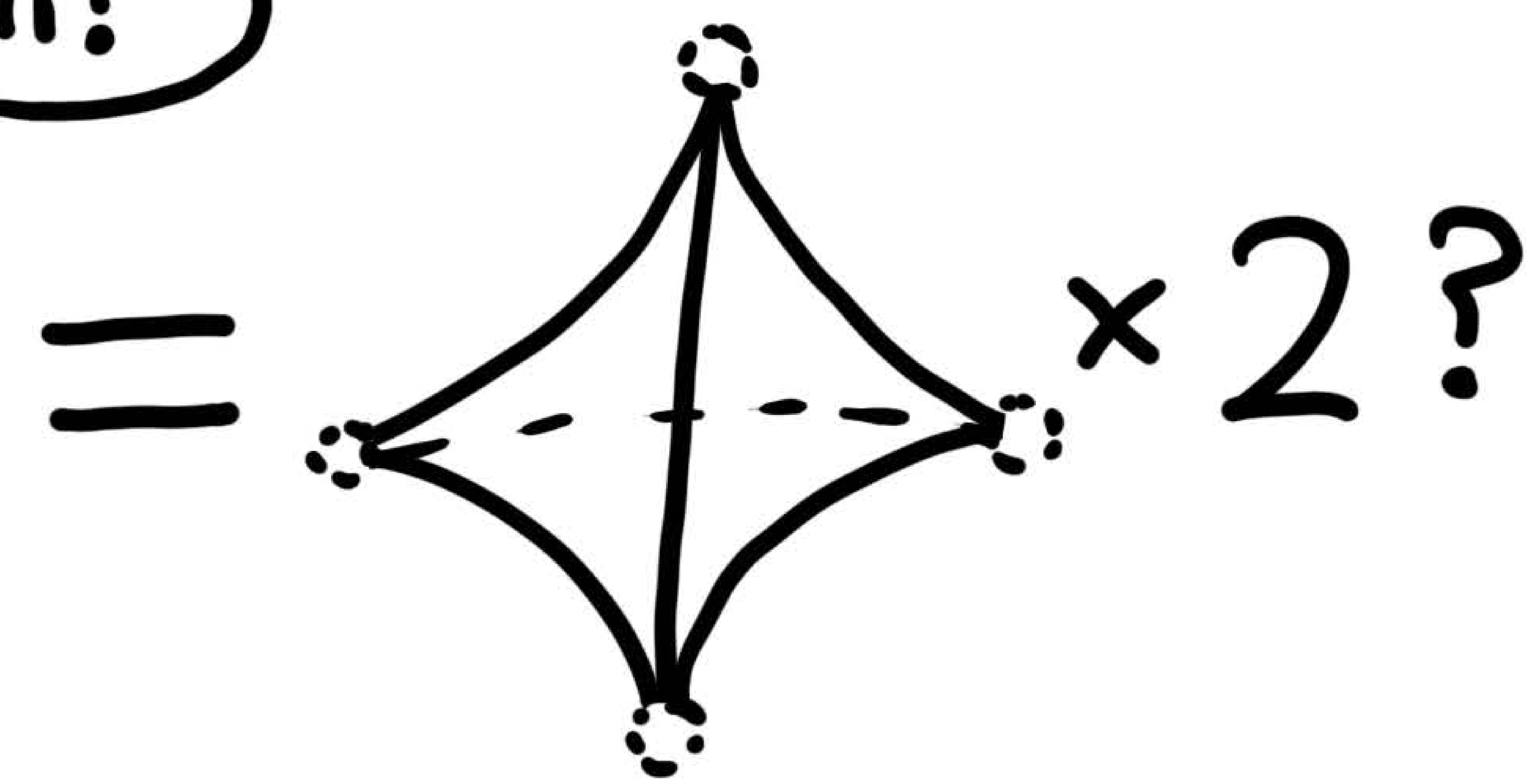
이것은 기하학인가 아니면
위상수학인가

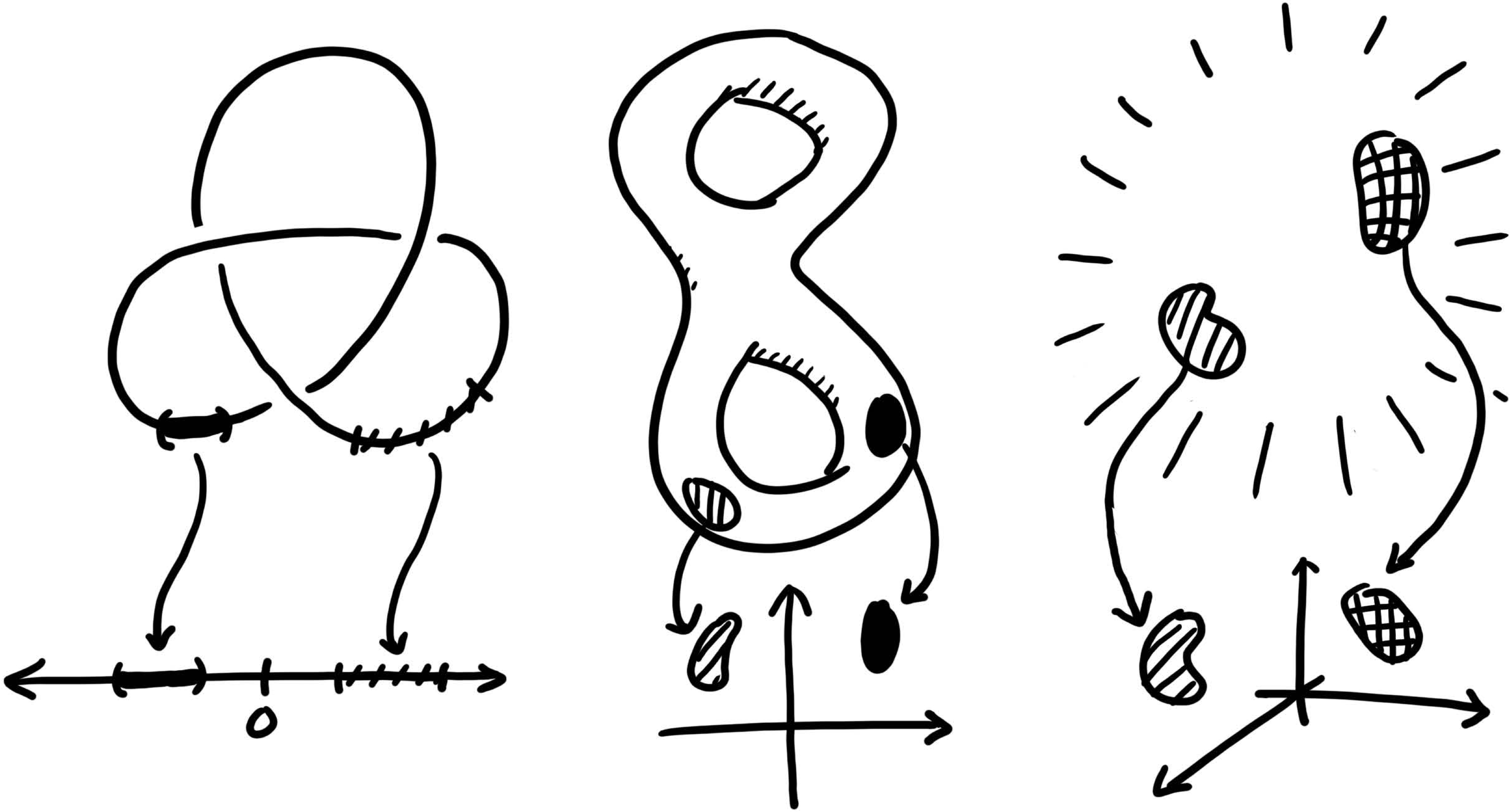




제6화: 3차원, 너란 녀석...

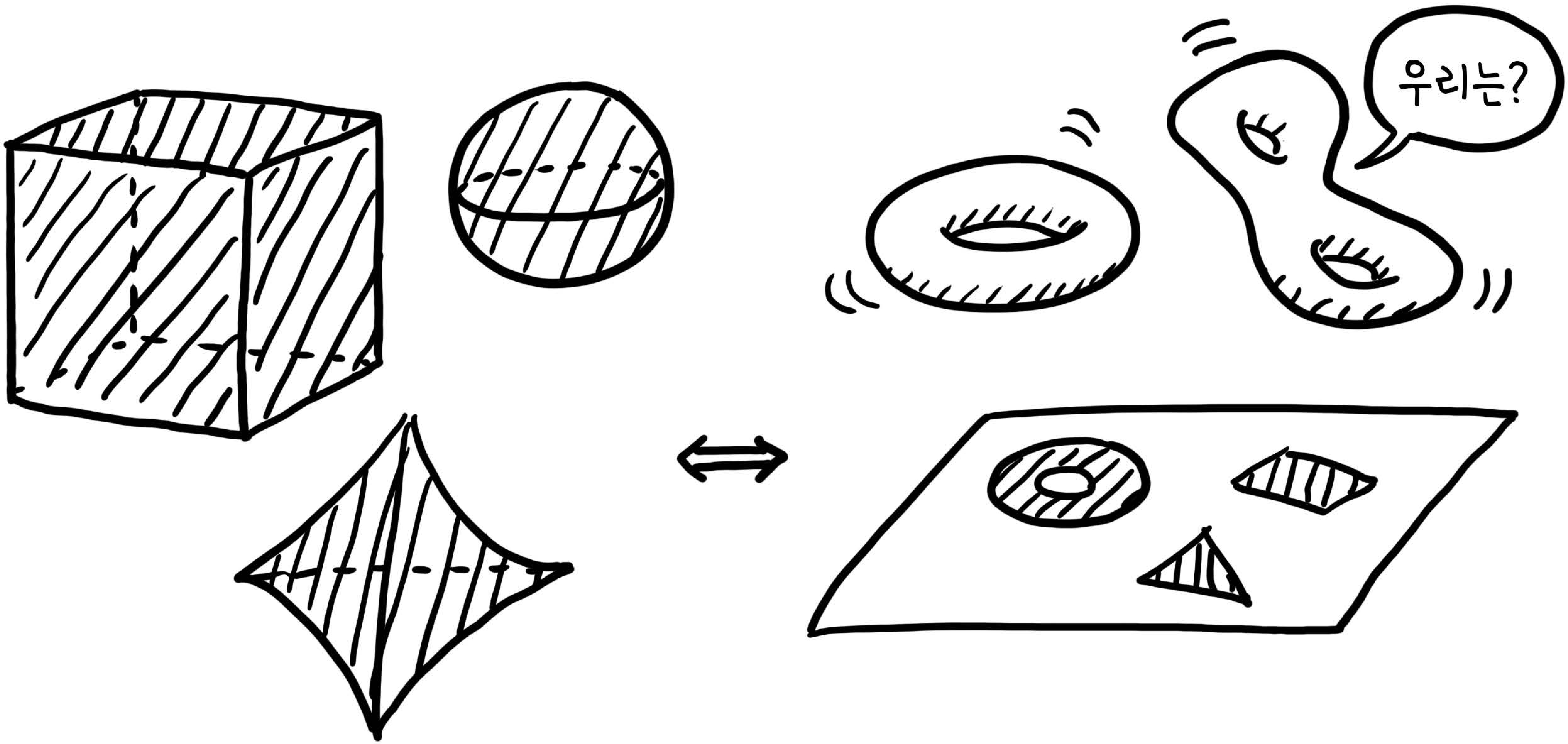

지난 시간까지는 1, 2차원 물체의 기하적인 구조를 탐구해 봤어요.
특히 곡면을 공부할 때 위상적인 특징과 기하적인 특징이 절묘하게 어우러졌죠.

그러면 이제 3차원 물체를 공부할 차례군요! 1, 2차원 때와 같이,



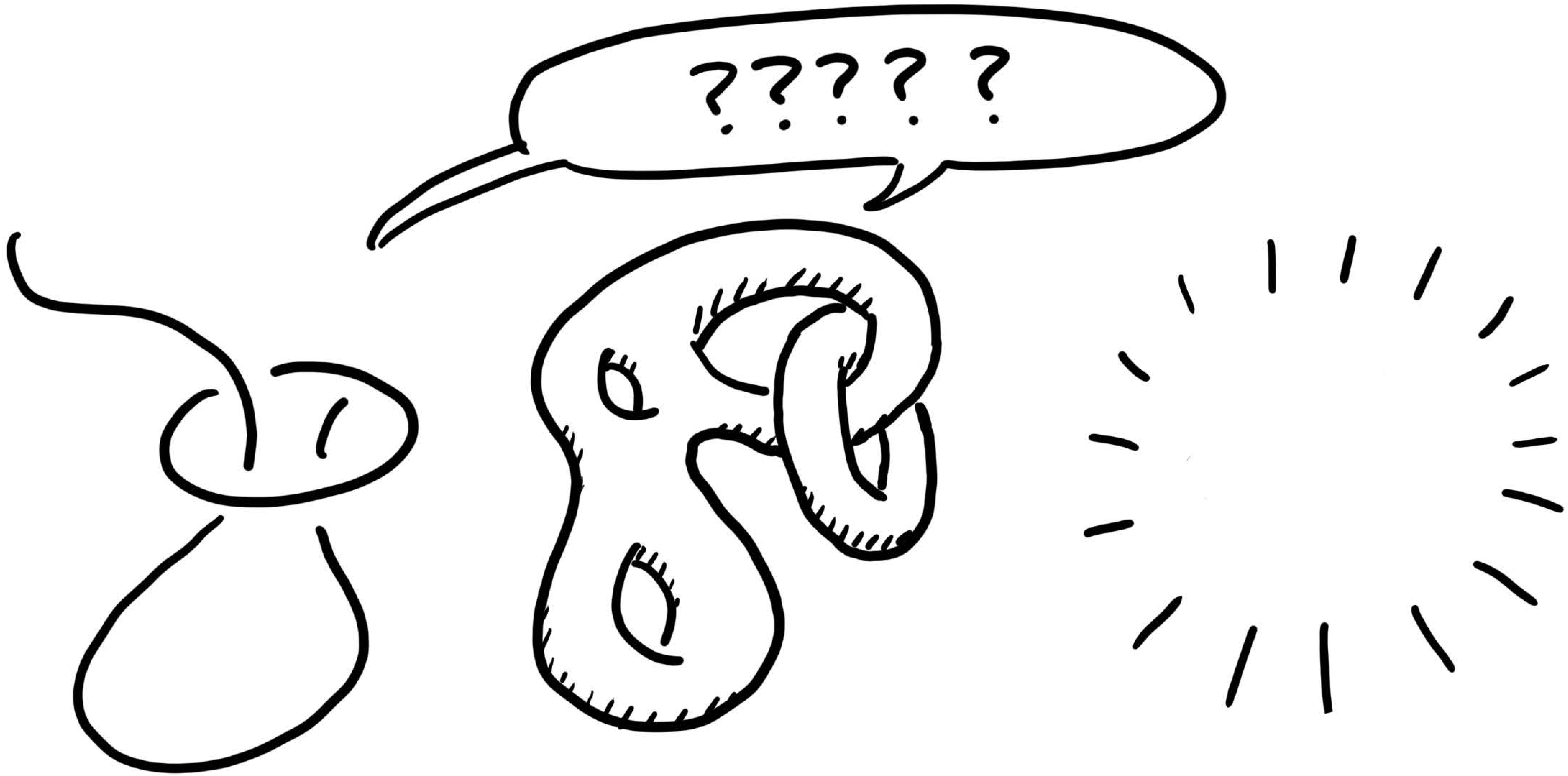
"로컬하게" 3차원 공간처럼 생긴 물체가 바로 3차원 물체겠죠.

대표적인 예시로 3차원 좌표공간 내의 물체들이 있겠죠. 하지만,



그것만 고려하면 마치 평면 안에 박힌 곡면만 상상하는 꼴이에요.

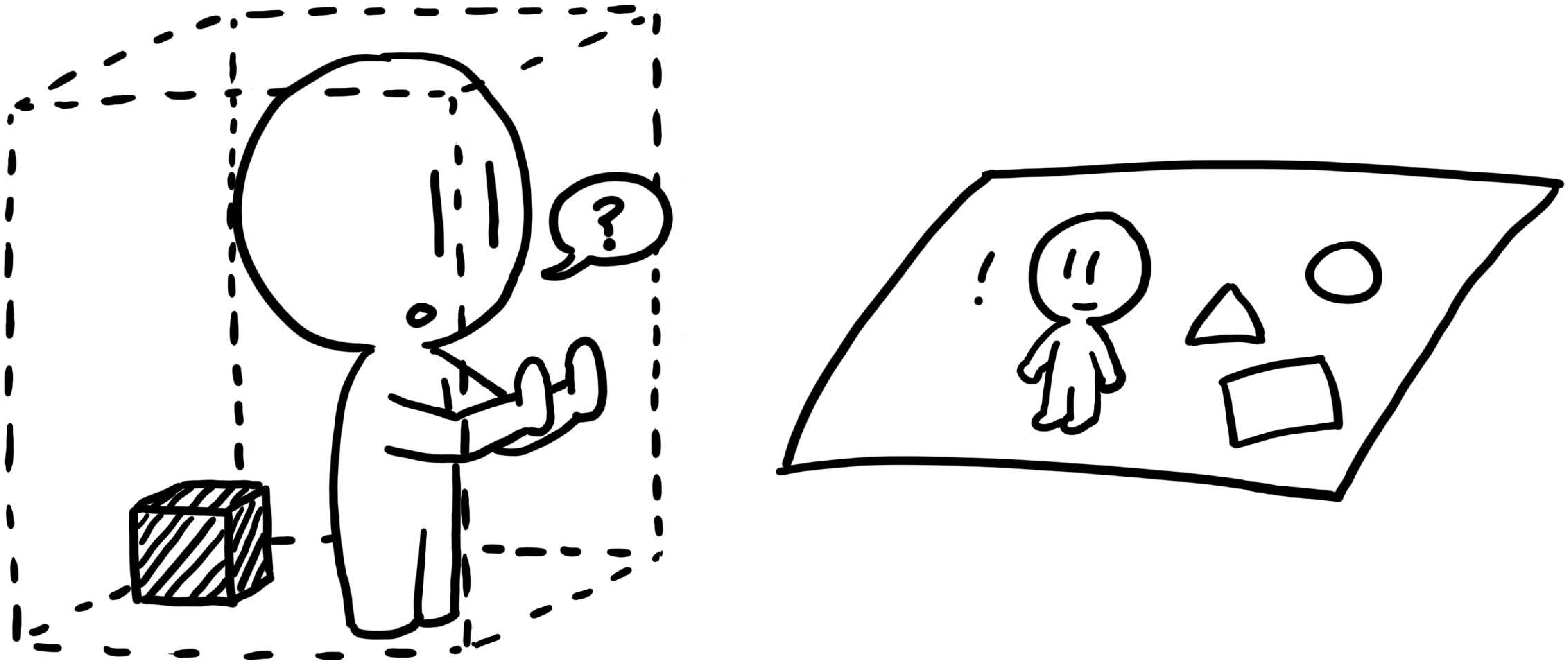
그러면 도대체 일반적인 3차원 물체는 어떻게 생겨먹은 걸까요?



저희는 3차원 좌표공간 바깥의 물체를 본 적이 없는데...

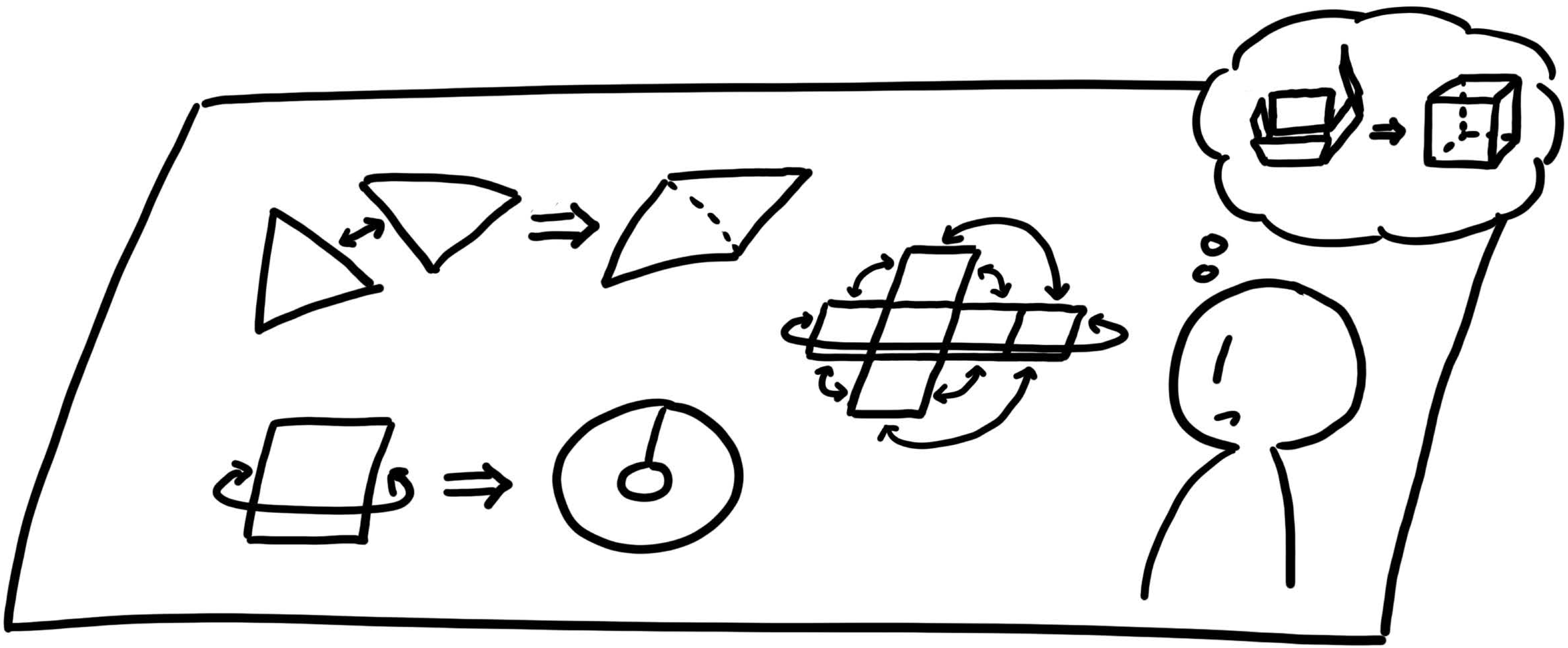
이럴 때는 시선을 달리 해 보는 것도 방법이죠.

우리는 3차원 공간에 갇혀 있어서 고민하는 거니,



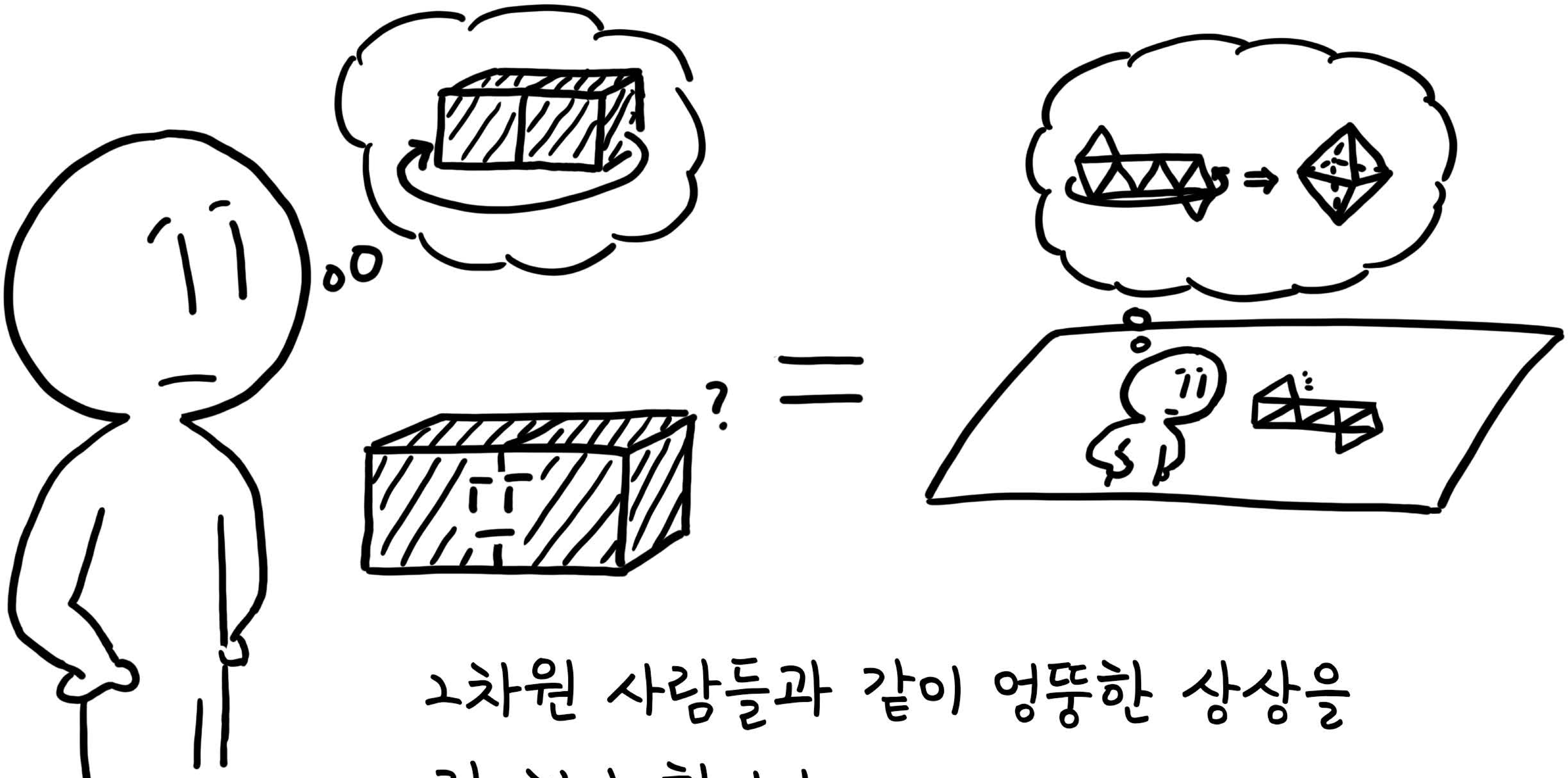
2차원 공간에 갇혀서 곡면을 상상하는 친구한테 물어보죠.

평면 안에서 평면 바깥의 곡면을 상상하는 게 쉽지는 않지만,



평면 조각을 "이어붙이는 규칙"을 명시하면 상상할 수는 있어요.

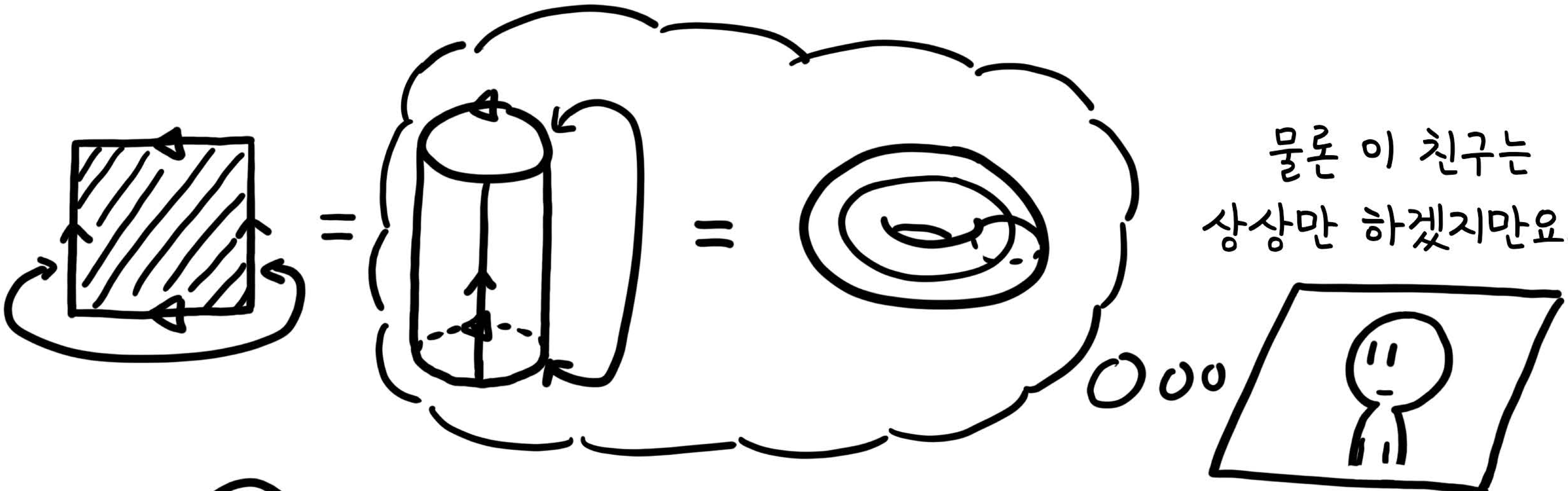
그런 것처럼, 우리들도 3차원 물체를 자유롭게 상상하려면,

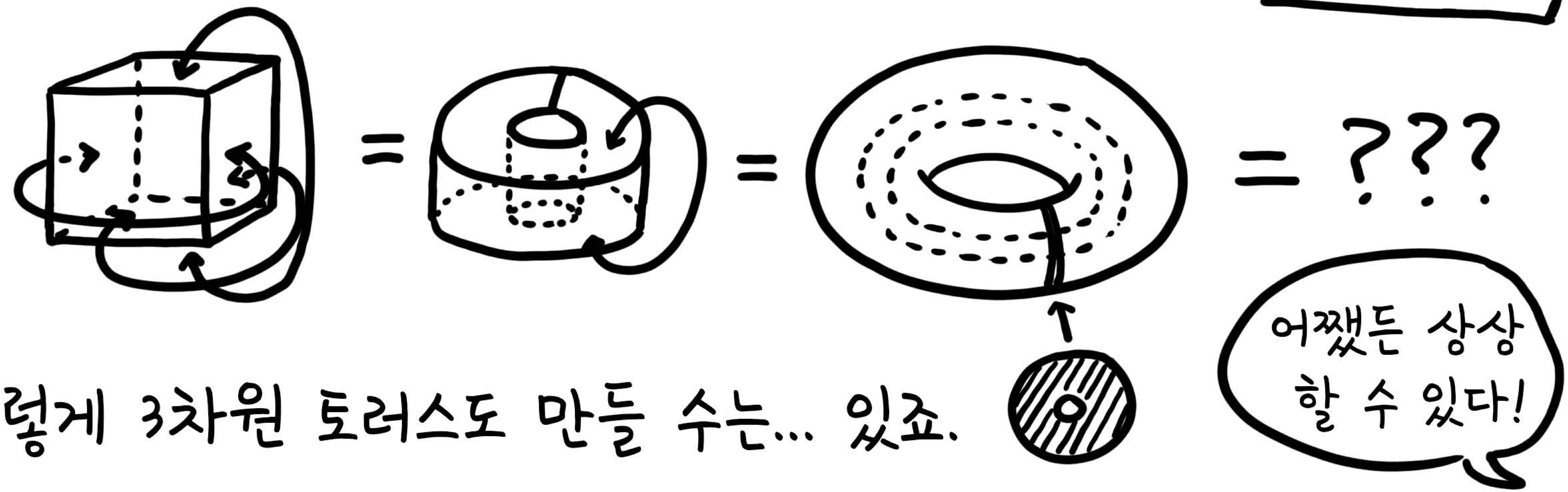


2차원 사람들과 같이 엉뚱한 상상을

잘 해야 합니다.

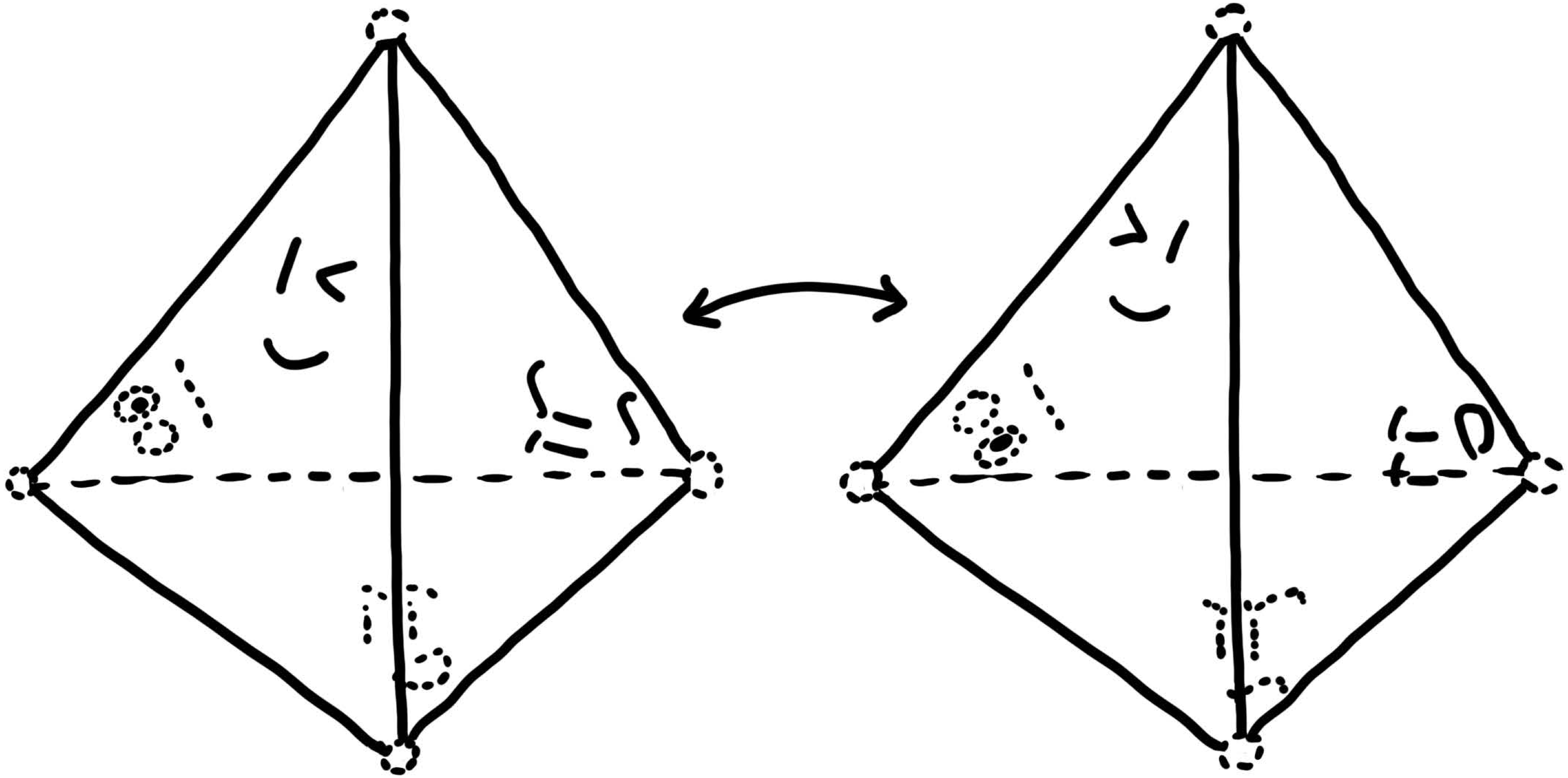
간단한 예시로, 직사각형 변을 이어 붙여 토러스를 만들어 냈듯,





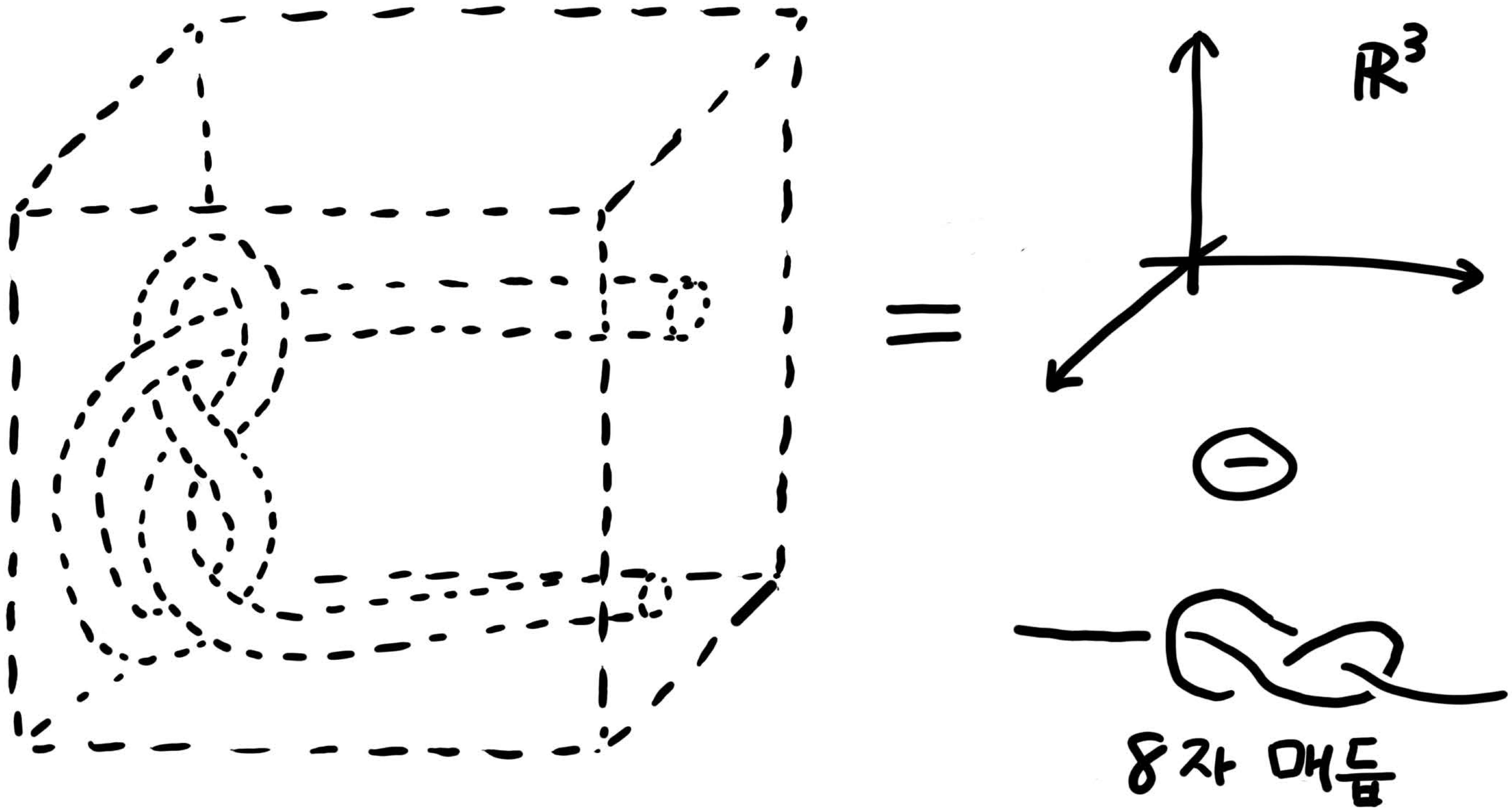
이렇게 3차원 토러스도 만들 수는... 있죠.

약간 더 복잡한 예시로는 다음과 같은 것도 있어요.



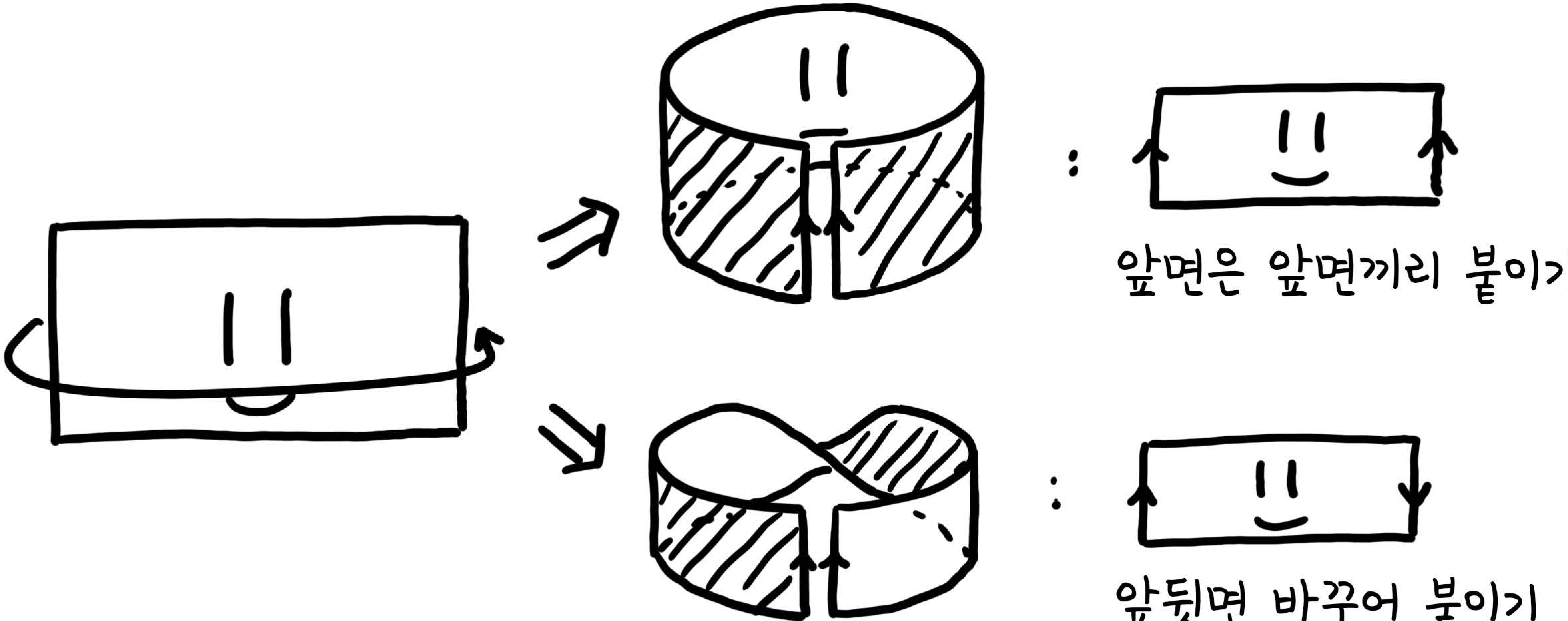
위에 그려진 표정들이 꼭 맞도록 두 정사면체를 이어 붙이면,

3차원 좌표공간에서 매듭을 벌레 파먹은 모양이 나온다네요...?



정말 알쏭달쏭하네요. 수학자들의 상상력이란...

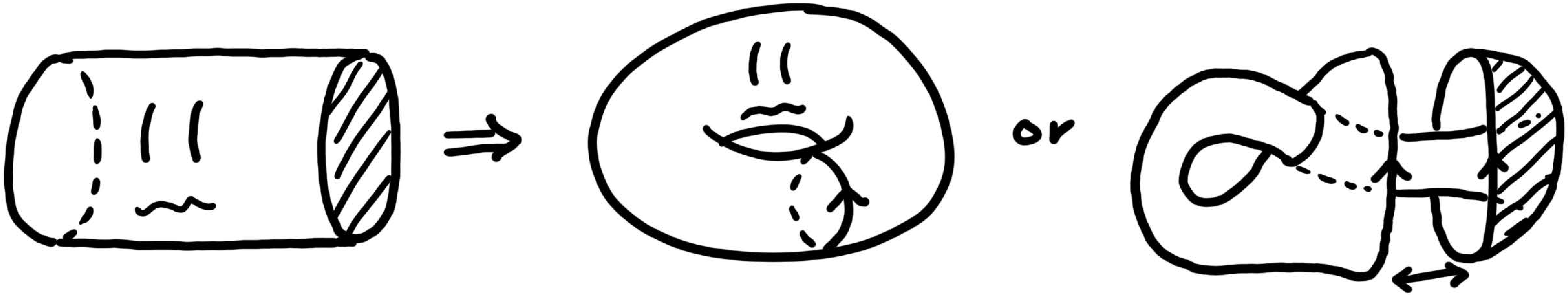
여기서 1, 2차원과는 다른 3차원 기하에서만의 특징이 나타나요.



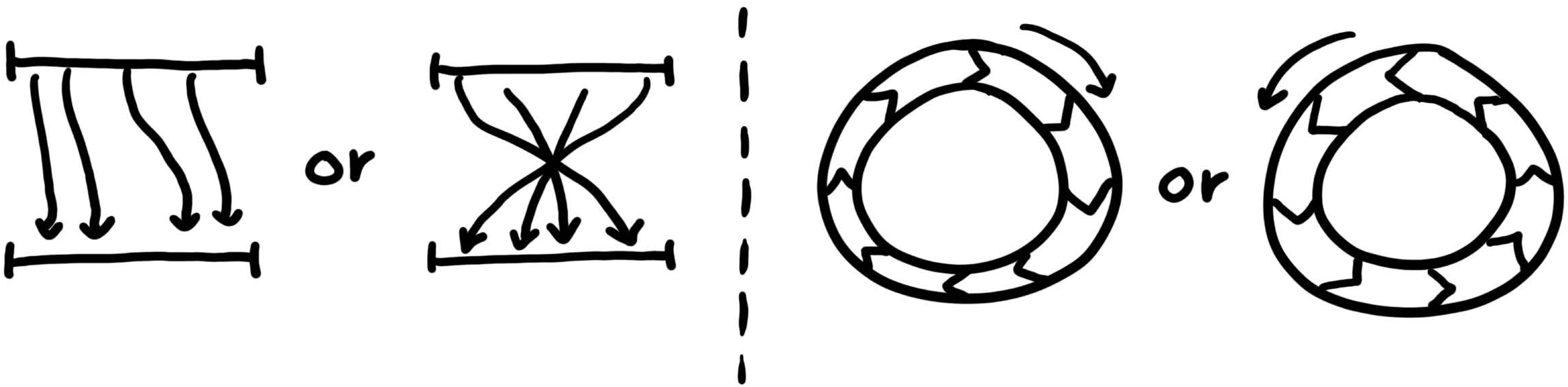
예를 들어 곡면을 만들 때는 다각형의 "모서리끼리" 이어붙였는데,

이때 이어붙이는 방법은 딱 두가지였어요.

이어붙이는 모양이 선분일 때나 닫힌 곡선일 때나 마찬가지인데요,



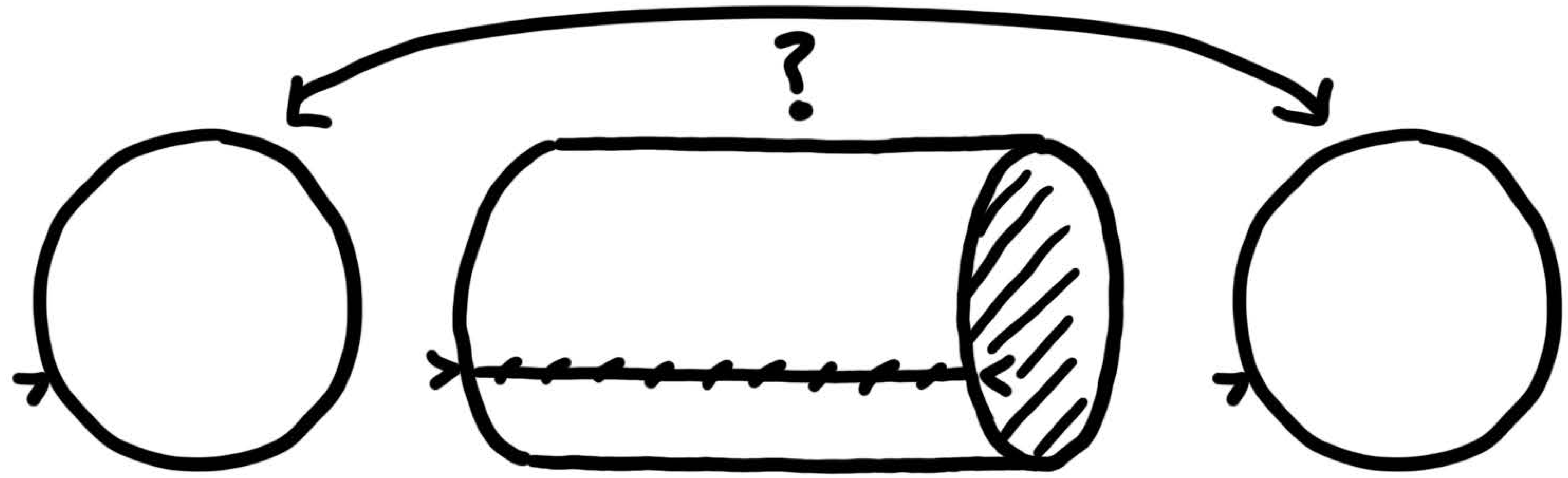
이건 "이어붙이는 방식"이 사실상 두 가지밖에 없기 때문입니다.



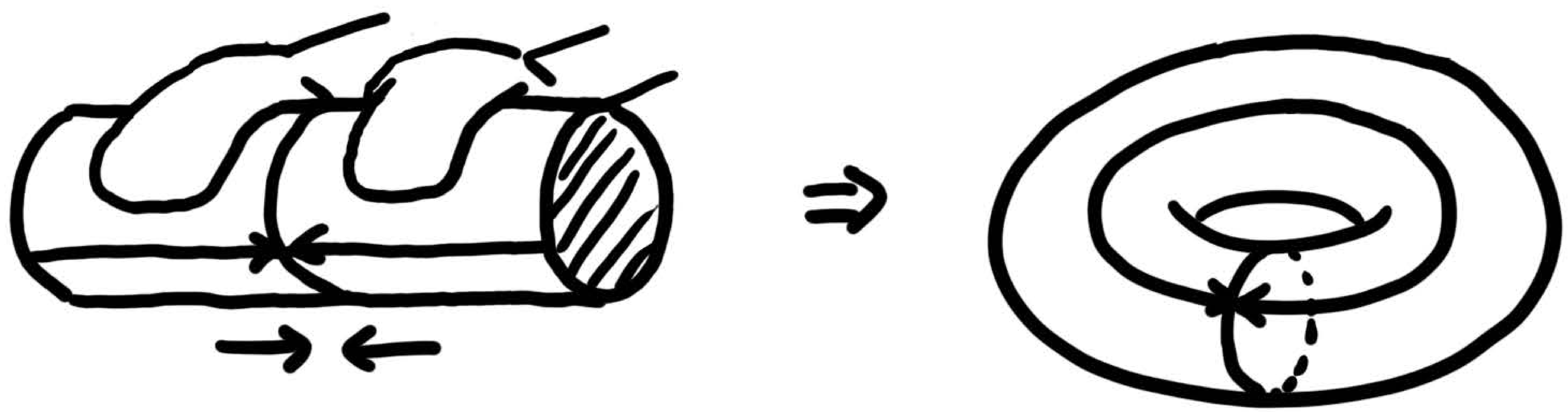
정방향으로 붙이거나, 역방향으로 붙이는 거죠.

근데 정말 붙이는 방법이 두 가지뿐일까요? 예를 들어,

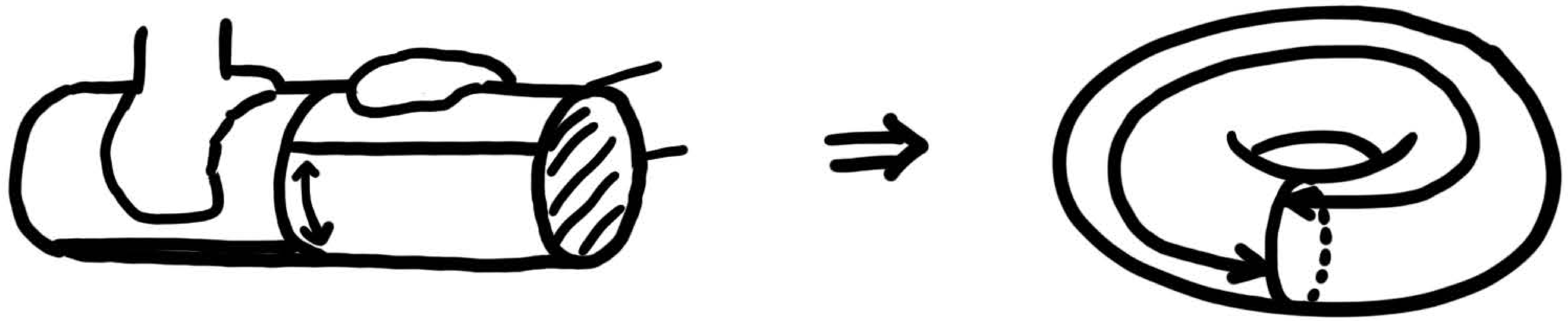
이 원통 양 옆을
앞면끼리 이어지도록
붙인다고 해도,



그냥 바로 붙이는 것과
살짝 비틀어 붙이는 건
차이가 있지 않나요?

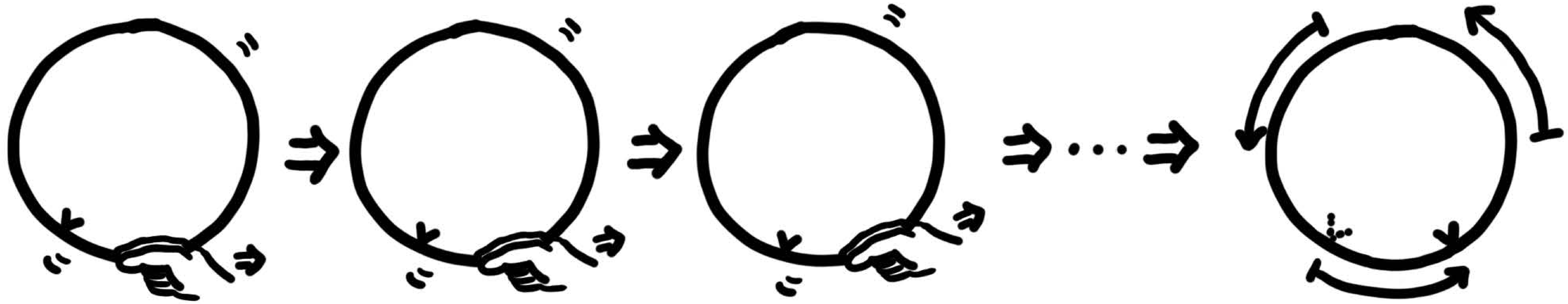


사실 그 둘은 분명 다른
함수지만, 붙인 결과물은
똑같은 토러스 모양이죠.



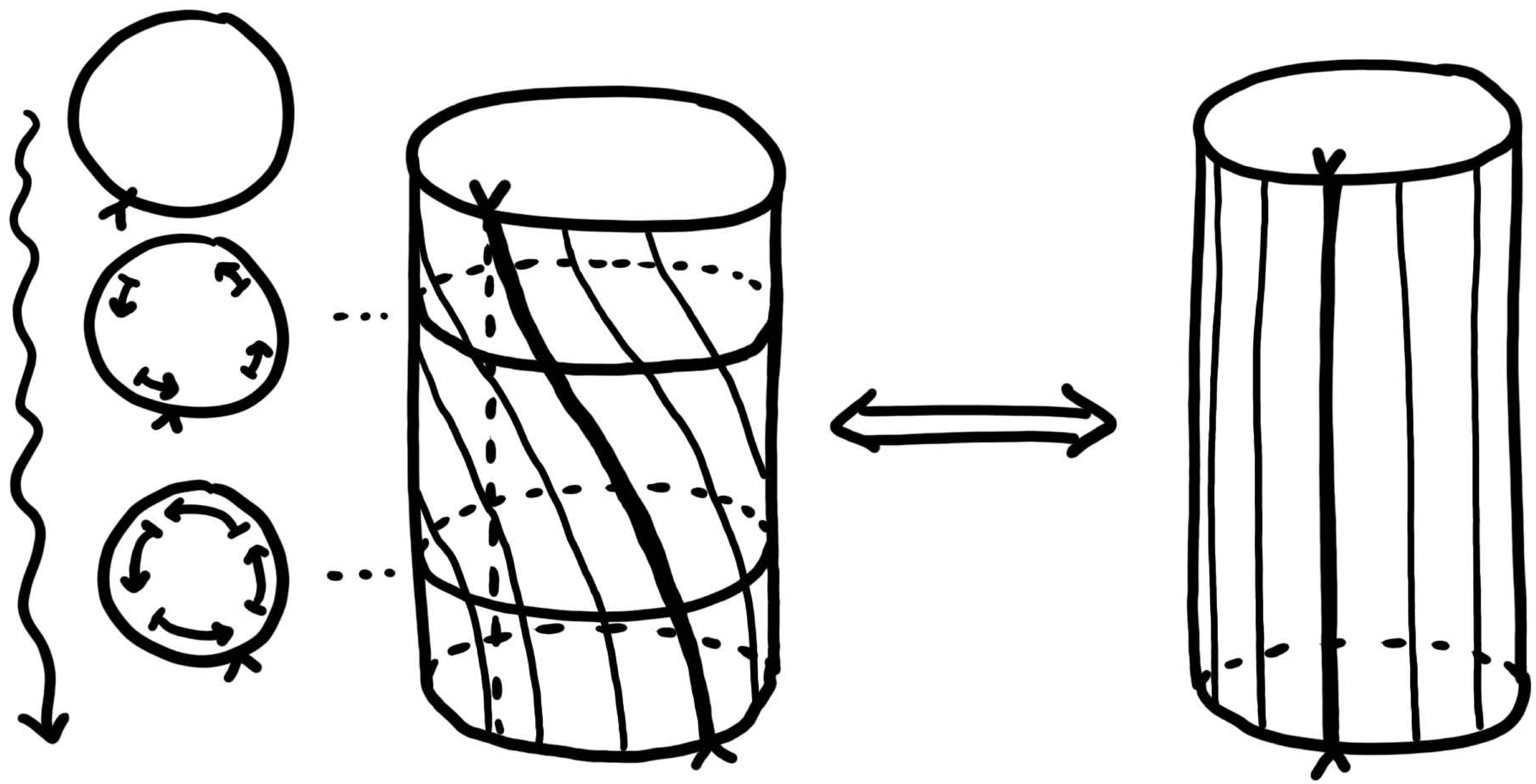
그 이유는, 슬쩍슬쩍 밀면 두 붙이기 방식이 같아지기 때문이에요.

이렇게 조금씩 밀면,



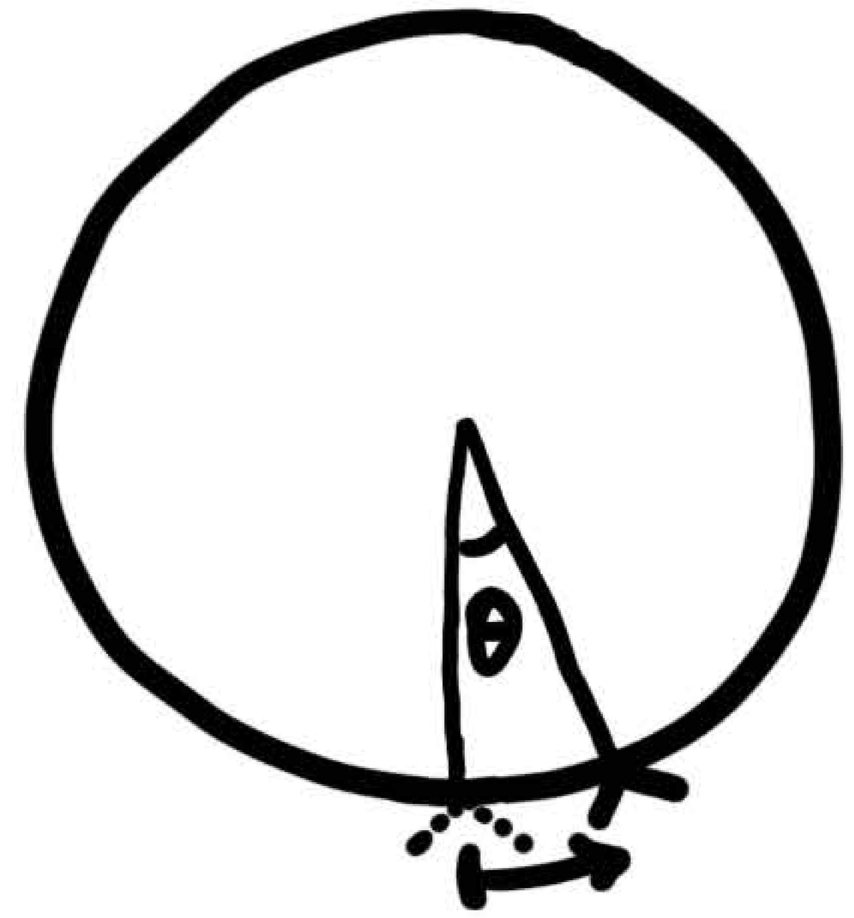
원하는 만큼 돌아가죠.

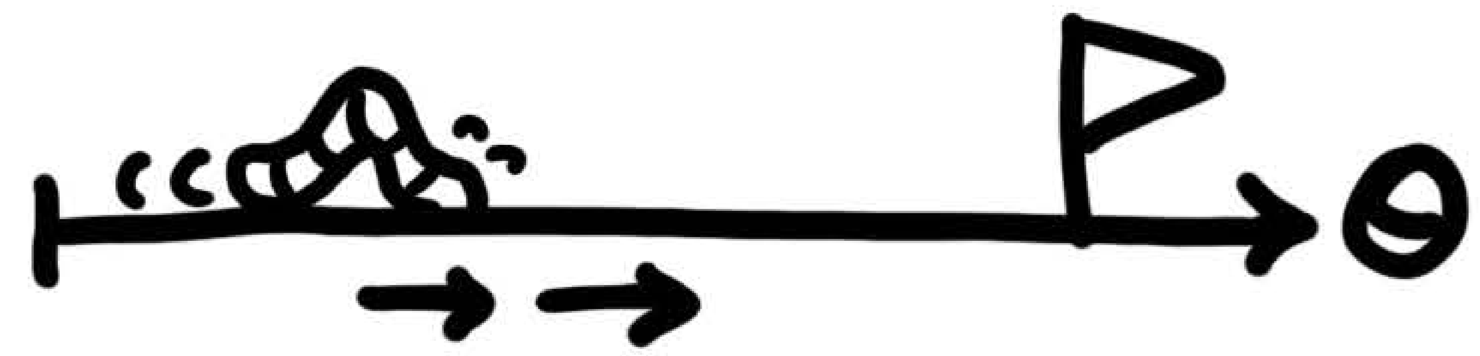
그걸 이렇게 시간 순으로 쌓아 두면 원통 모양이 되겠죠.



아무 변형 없이 원을 쌓은 것과 마찬가지죠요!

이는 본질적으로, 회전 각도가 “슬쩍슬쩍” 늘 수 있는 양이라 그래요.

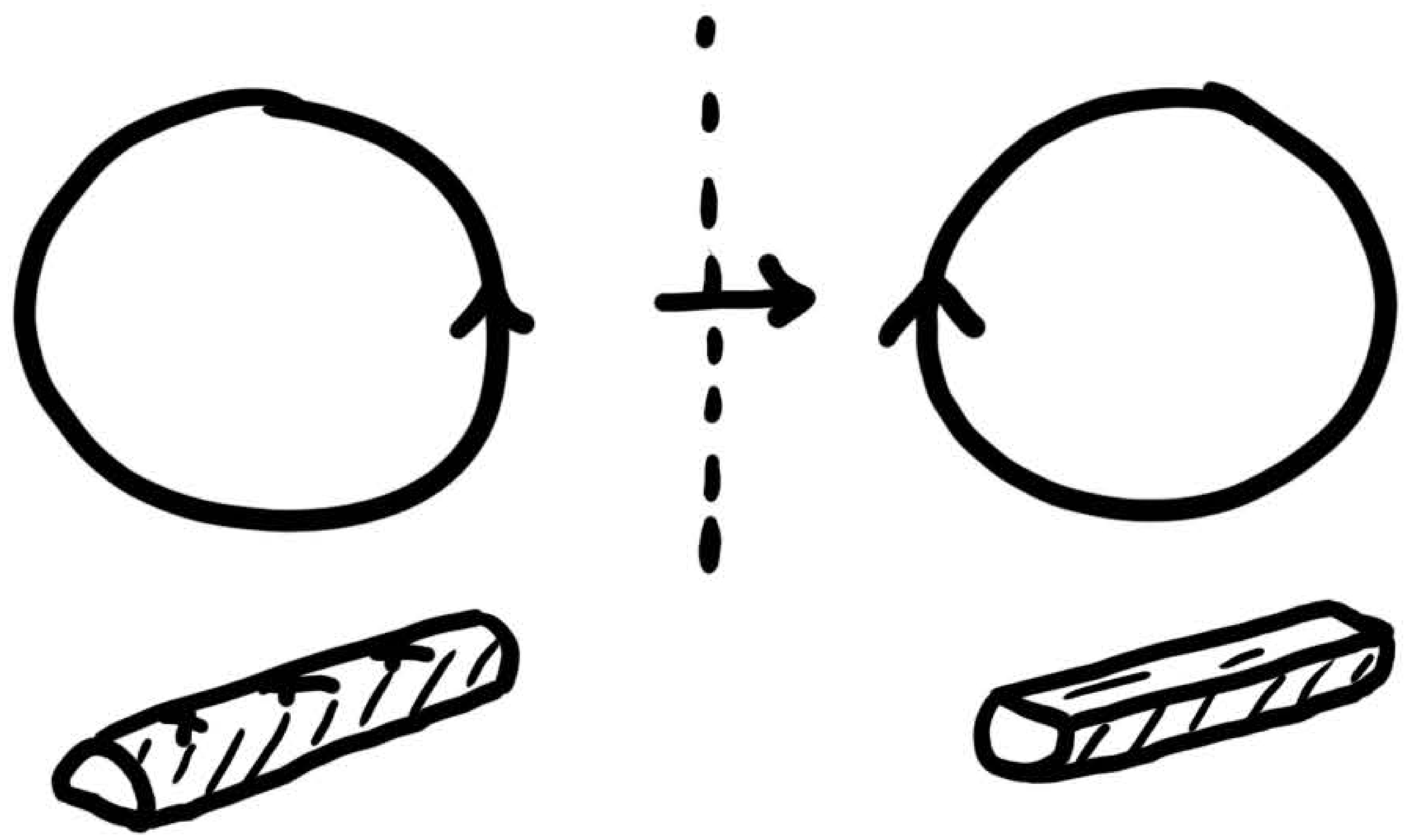




각도라는 것은 “실수”고, 그러니 슬쩍슬쩍 늘려서 원하는 만큼 키울 수 있죠.

결론적으로, 비틀어 붙이는 건 모양에 별 영향을 주지 않아요.

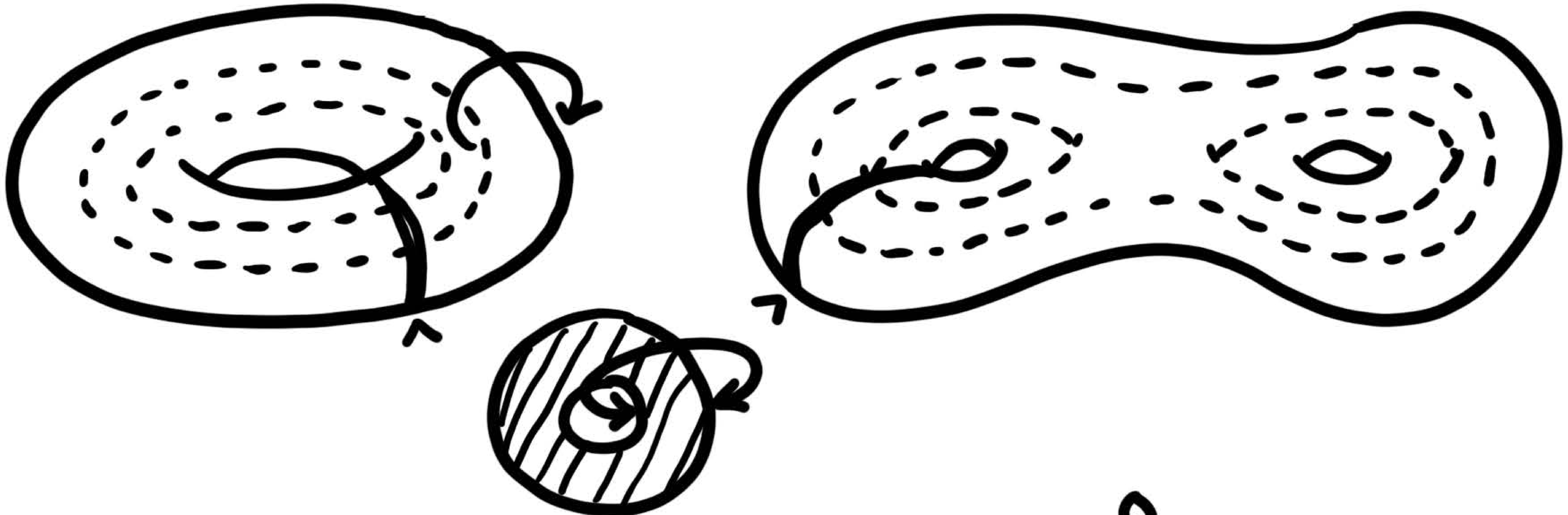
그에 비해, 붙이는 방향의 차이는 좀 더 근본적이에요.



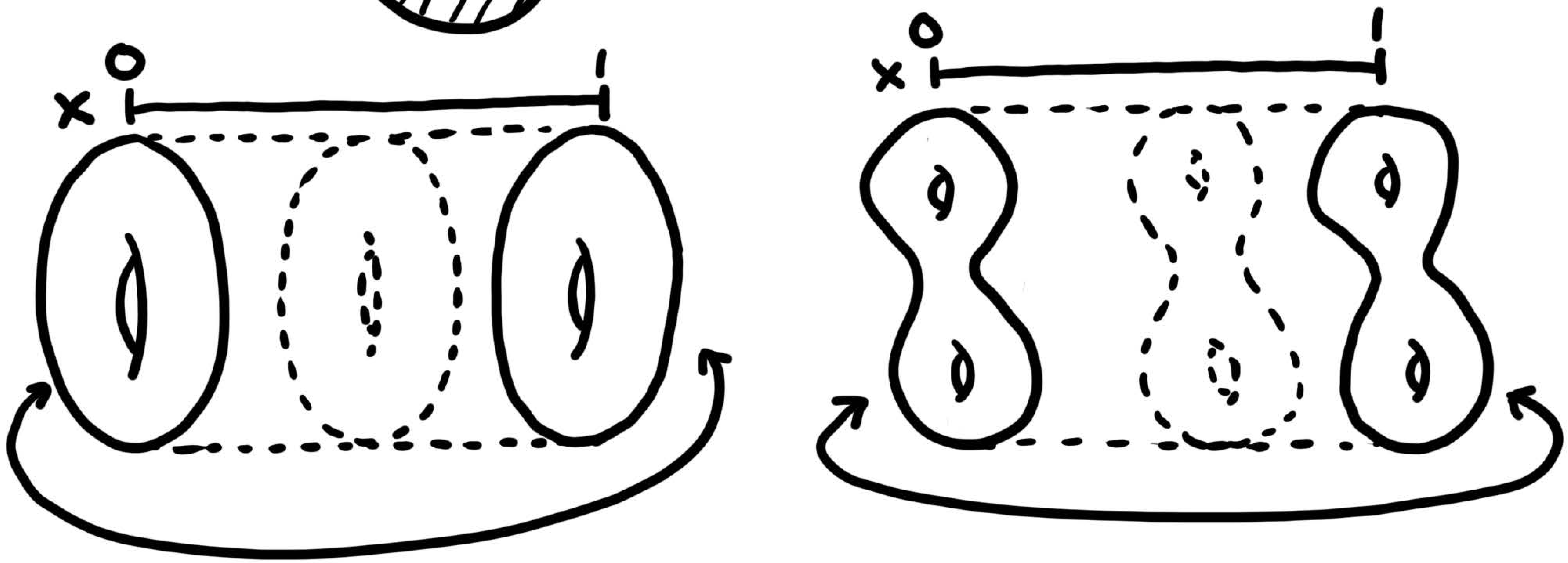
이건 가능성이 모 아니면 도 두 가지밖에 없기에, 슬쩍슬쩍 서로의 상태로 바꿀 수 없어요.

그렇기에, 이 차이는 곡면 모양에 영향을 주죠.

그럼 3차원에서는 어떨까요? 3차원 조각을 이어붙일 때는
2차원 가장자리, 즉 곡면을 따라 이어붙이겠죠.

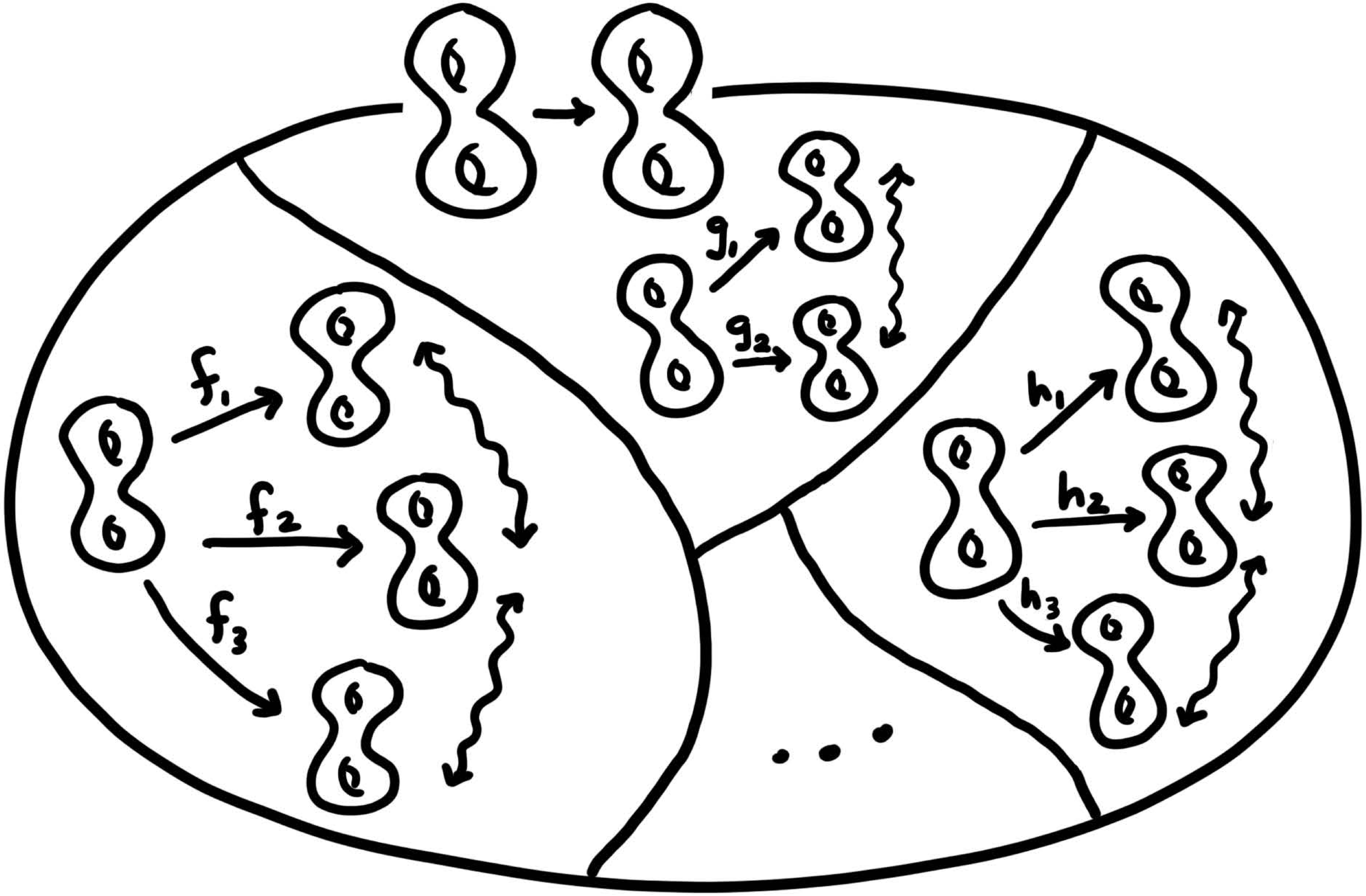


예를 들어, 두꺼워진 곡면의 안팎을 붙여 3차원 물체를 만드는 과정을 생각해 보죠.



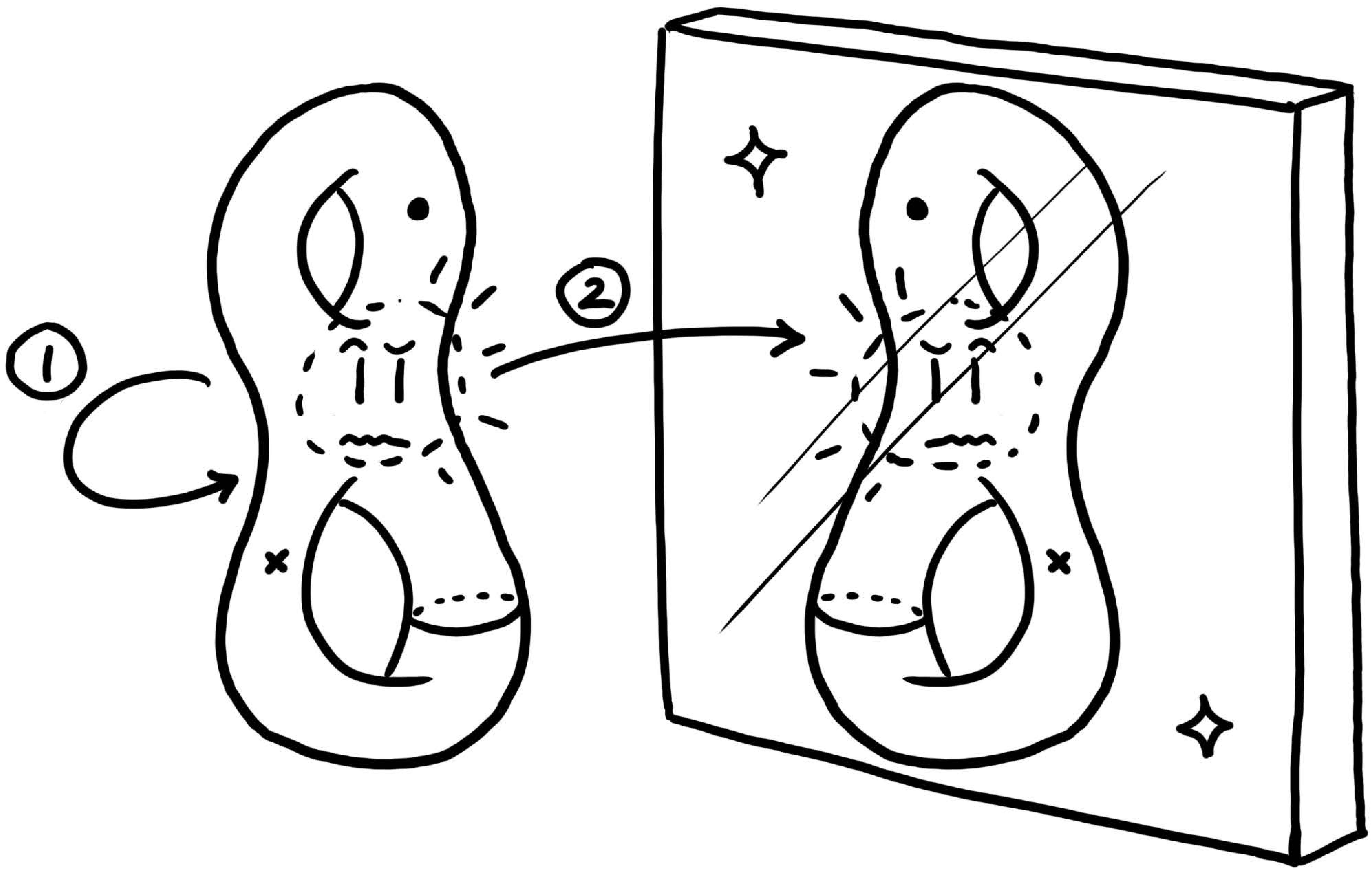
이 물체의 모양은 안팎 곡면 두 개를 어떻게 이어붙이는지에 따라 결정되어요.

그러면 아까처럼 본질적으로 다른 "붙이는 방법" 종류에 따라,



만들어지는 3차원 물체의 모양이 달라지겠네요.

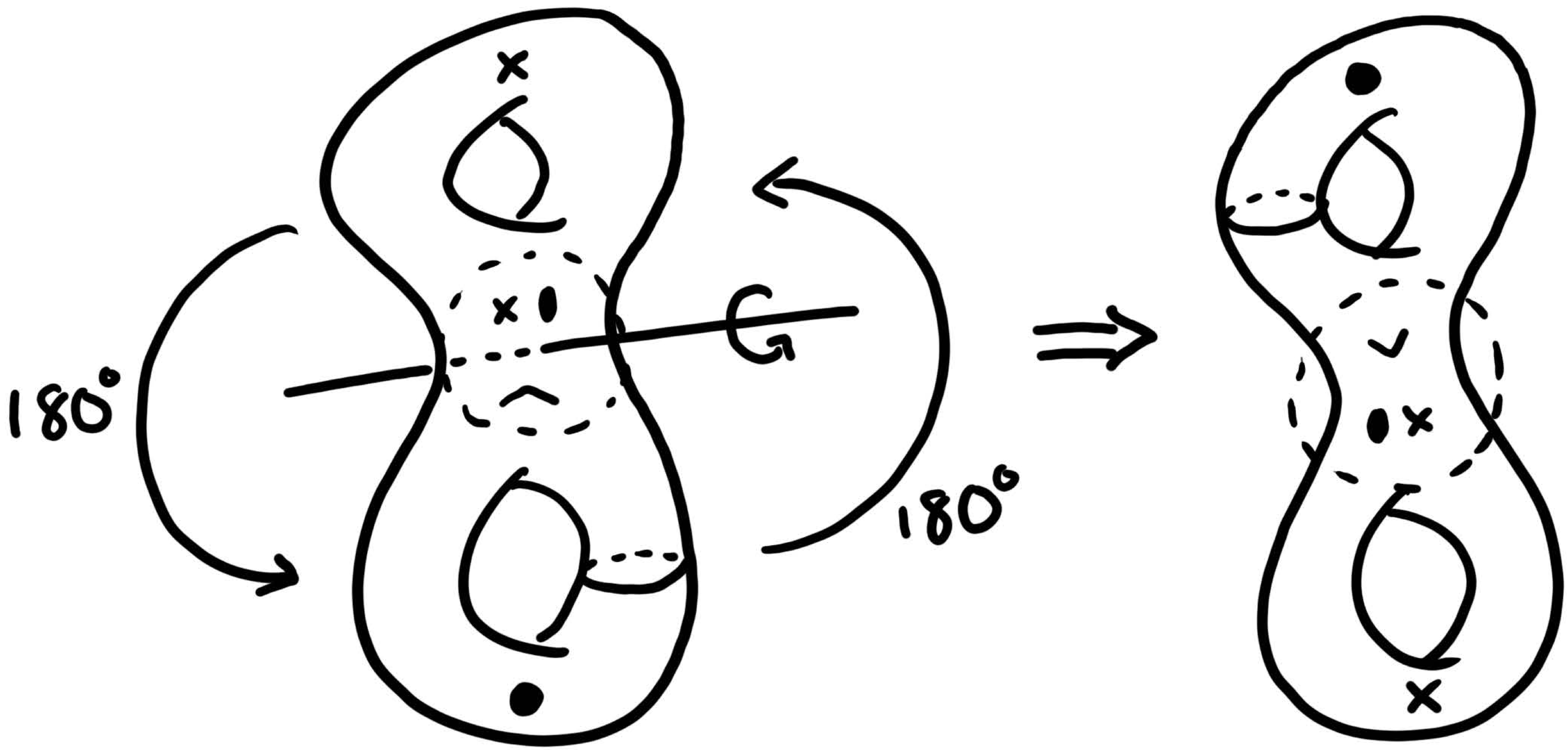
일단 적어도 두 종류는 확실하죠. 그냥 그대로 보내는 방법이랑,



거울상으로 보내는 방법 말이에요. 원에서의 두 방법과 비슷하네요.

하지만 다른 붙이기 방법도 있다는 게 새로운 지점이에요.

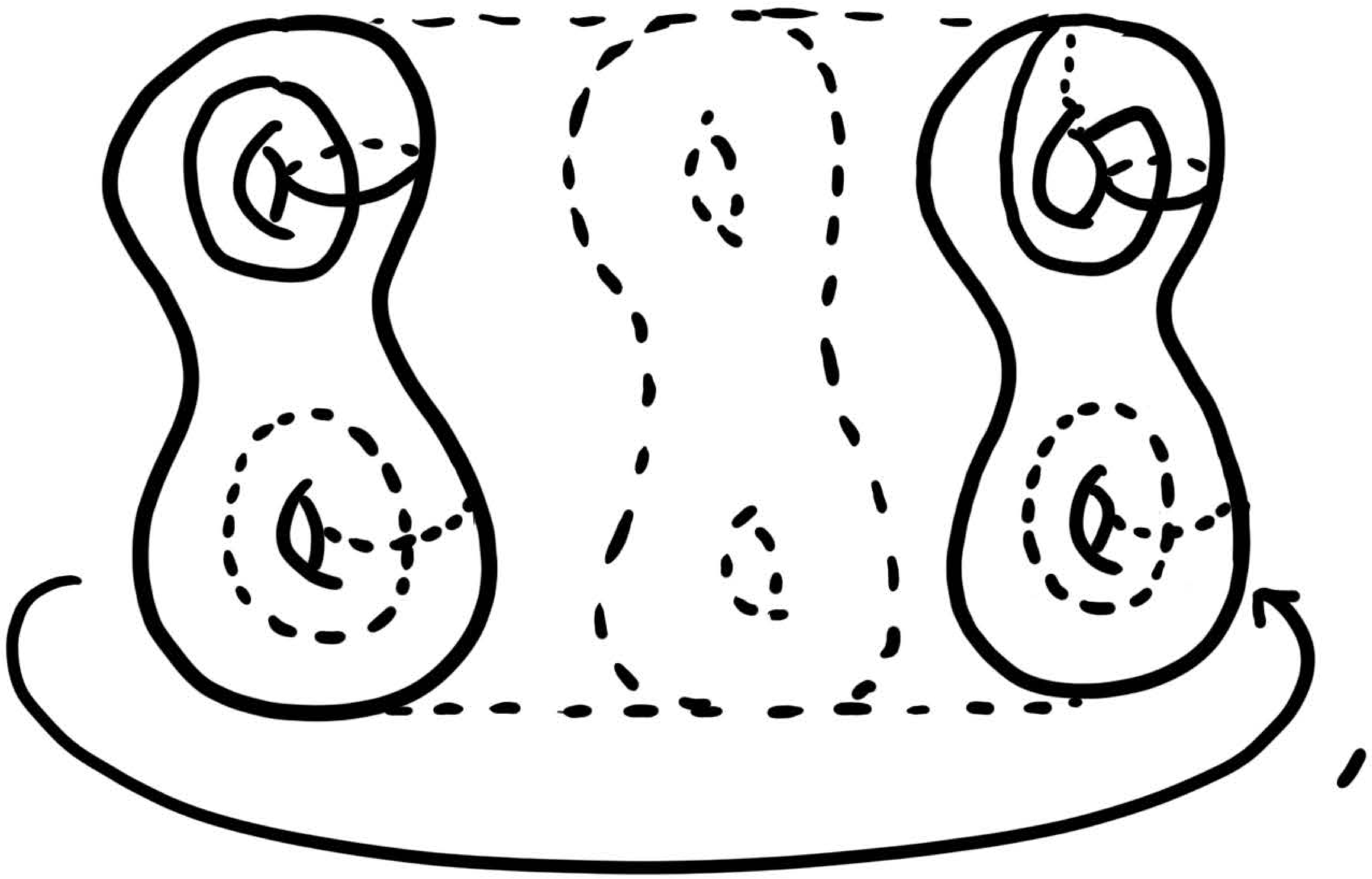
③ 아래와 같이 곡면의 팔 부분을 교환하는 회전을 시키면,

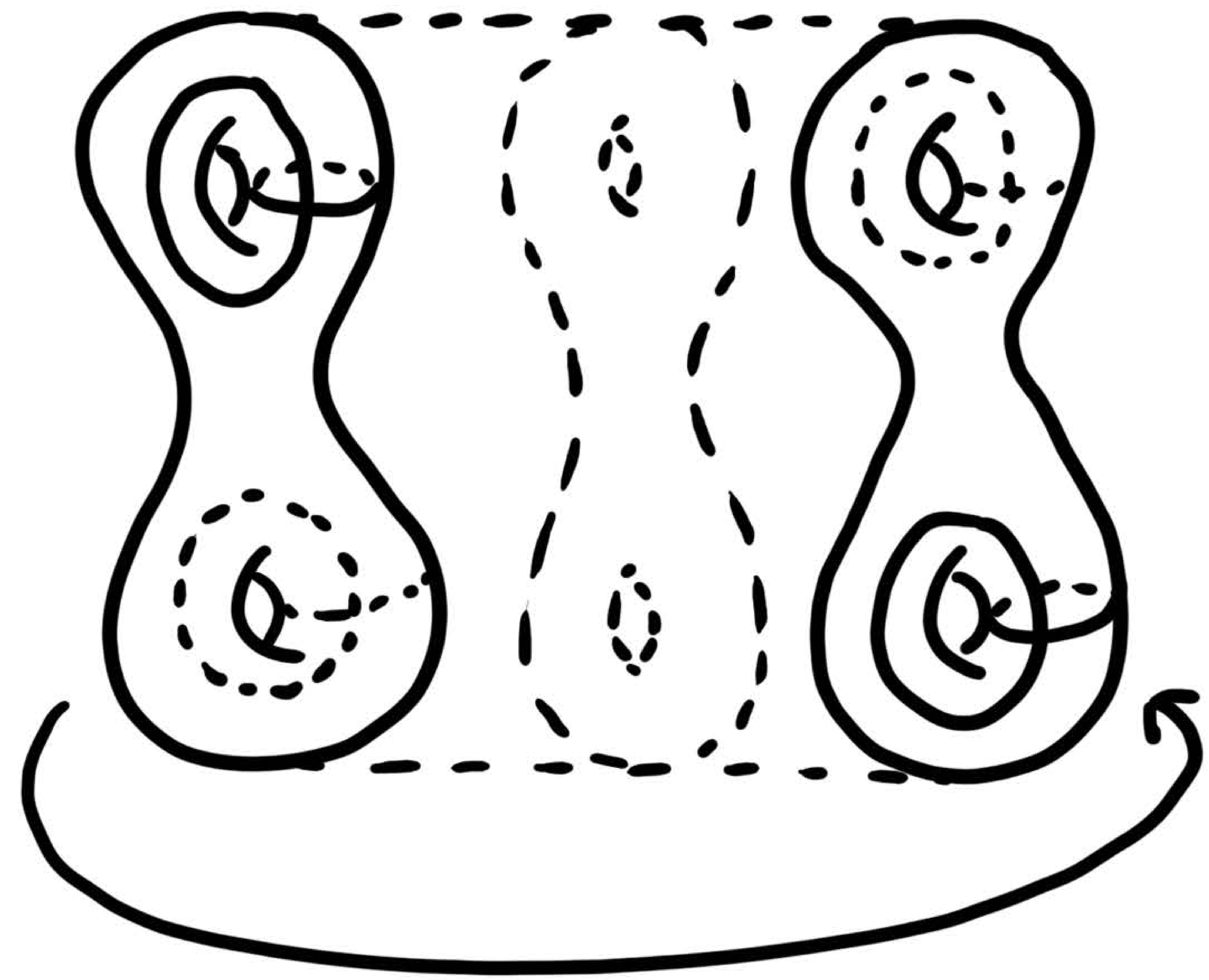


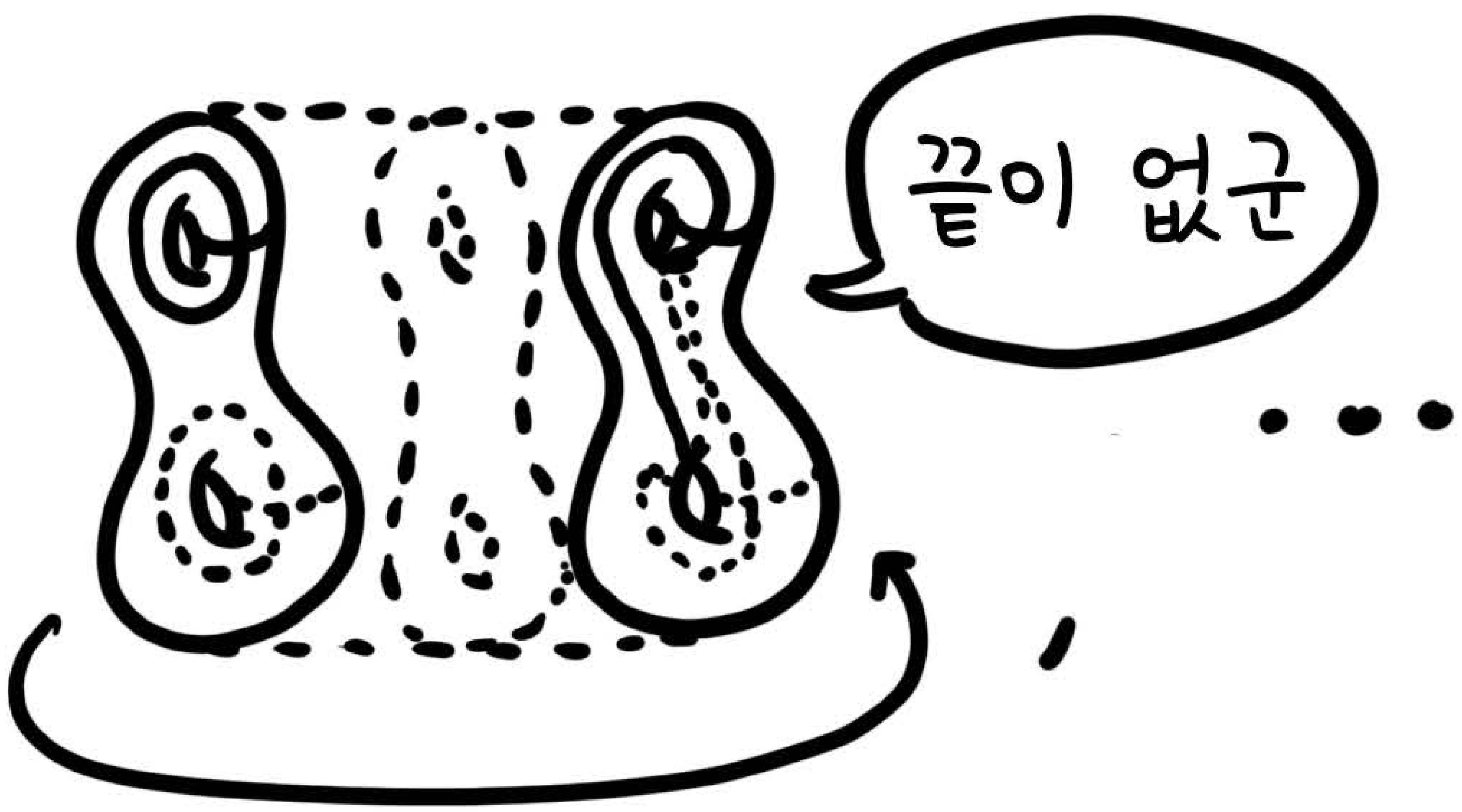
(1) 아까와 같이 "모 아니면 도" 논리를 생각하면 "그대로 보내기"도 아니고,

(2) 표정이 좌우로 뒤집히지 않았으니 "거울상으로 보내기"도 아니에요.

결론부터 말씀드리자면, 이런 "붙이기 방법"은 무한 개입니다.



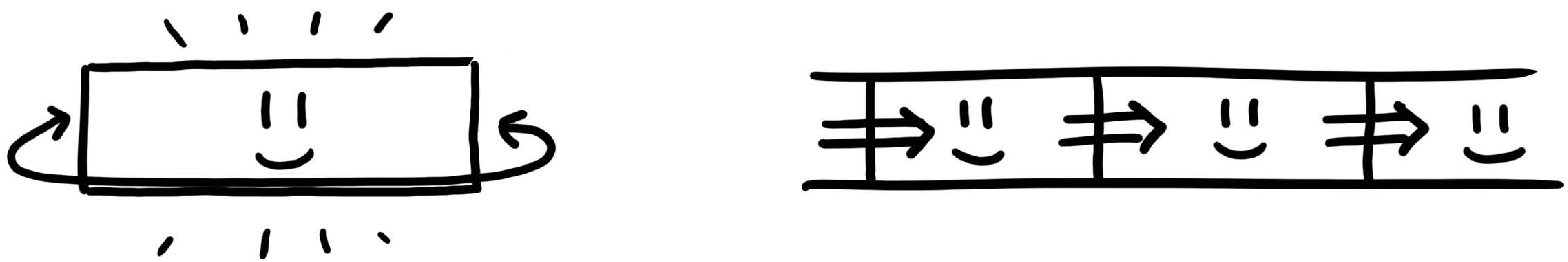




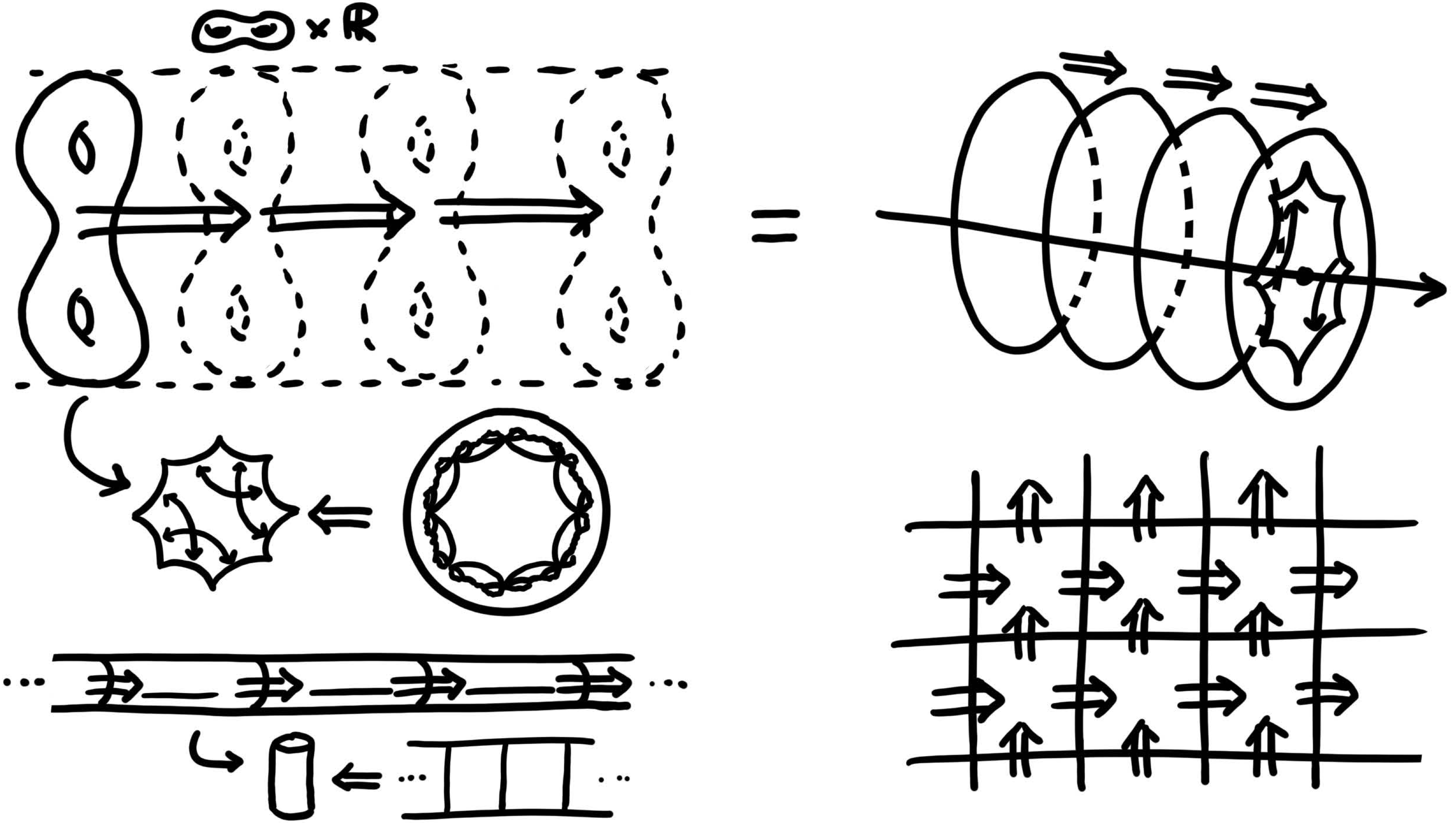
이런 제일 간단한 방식으로도
순식간에 무한 개의 예시가
만들어진다니, 이것들을 다
공부할 수는 있을까요?

일단은 쉬운 것부터 해 봅시다. 있는 그대로 이어 붙이는 경우,

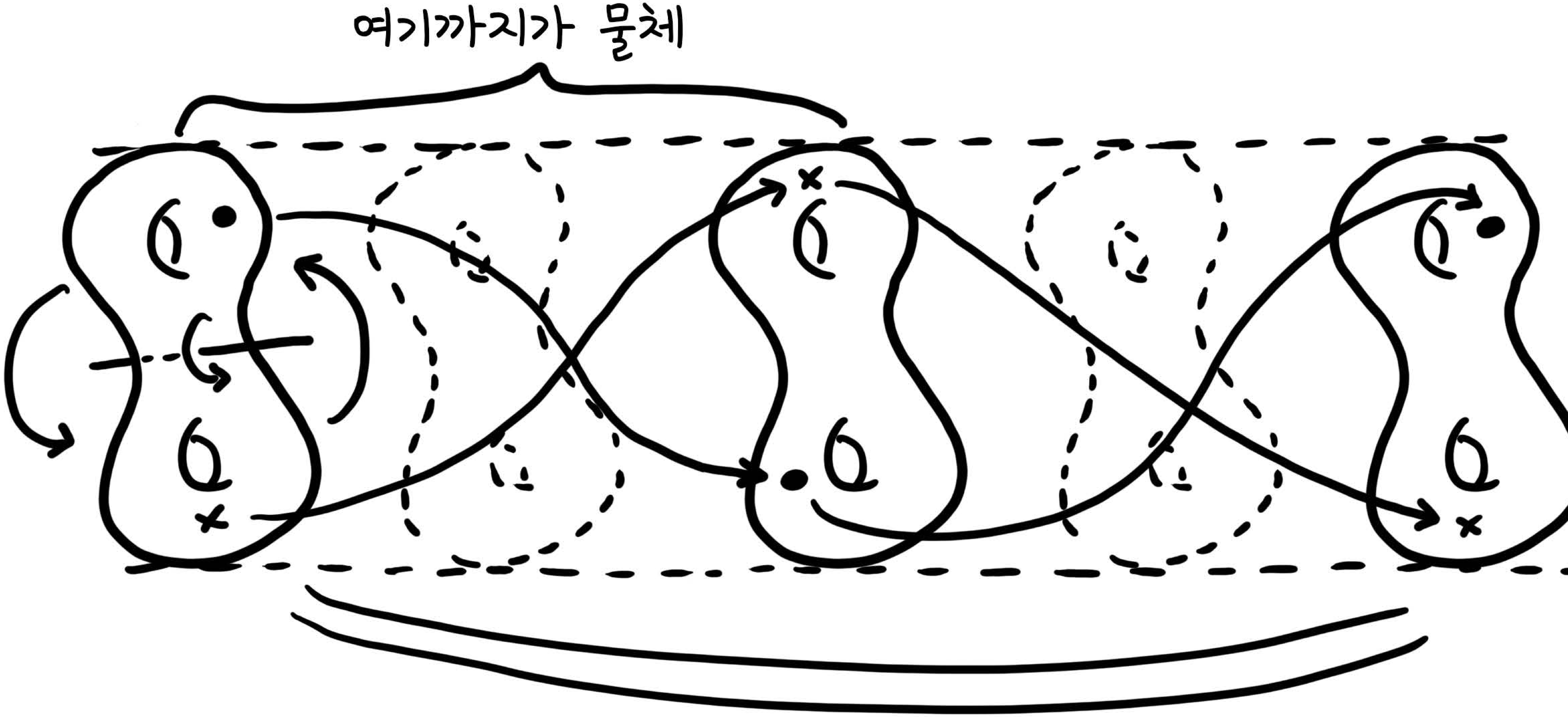
원통을 만들 때와 같이 생각하면, 이렇게 옆으로 미는 "붙이는 방법"에 해당하죠.

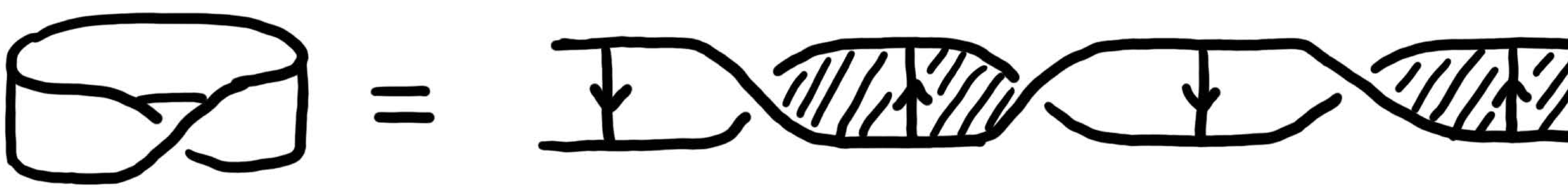


그러면 토러스를 한번 더 펴 줬듯, 이것도 한번 더 펴 줄 수 있겠죠.



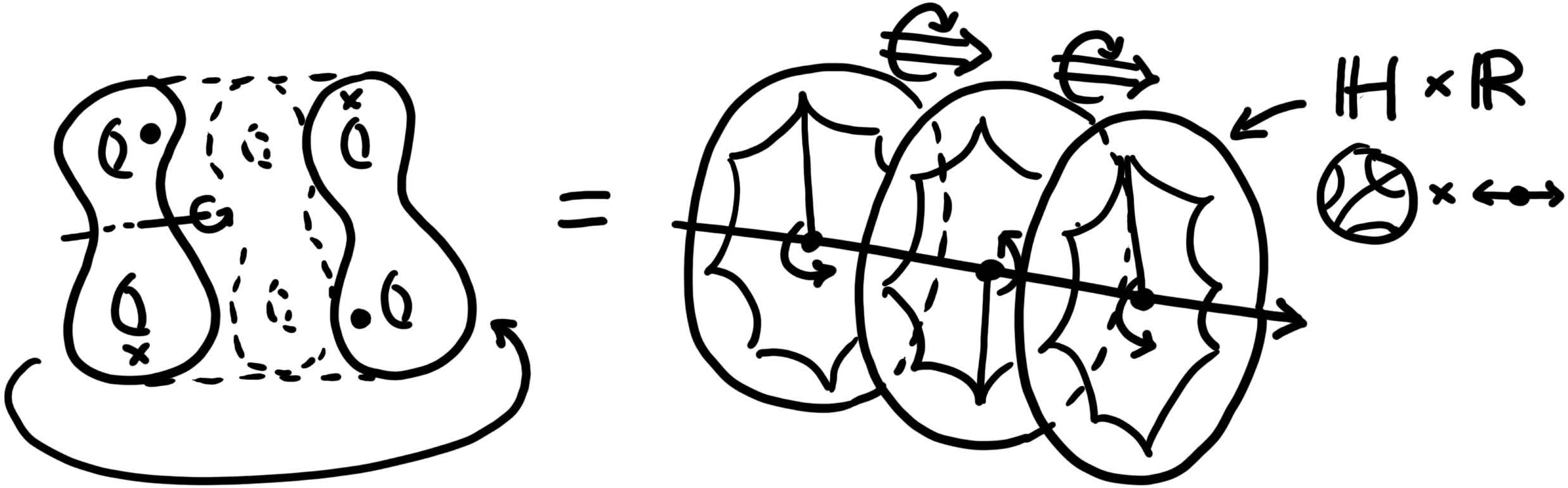
그다음 주기 2짜리 붙이는 방식으로 할 때도, 2차원에서의 예시를 상상하세요.

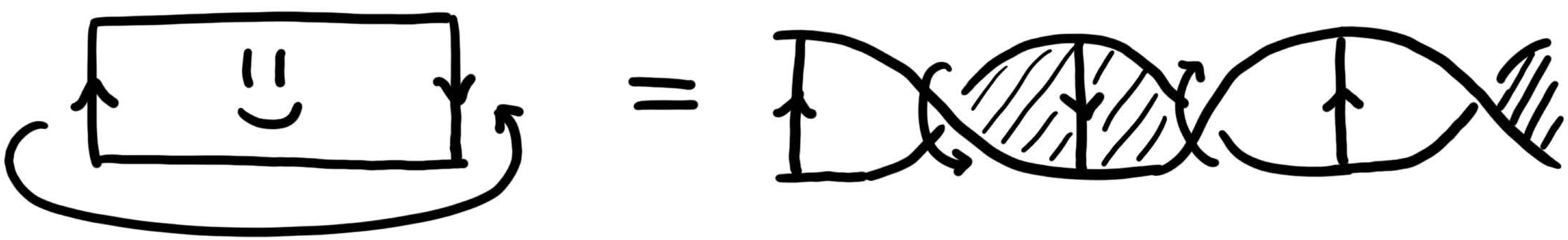




뫼비우스 띠의 경우도, 풀어 보면 긴 띠인데 중간에 뒤집힌 자리가 있는 것뿐이죠.

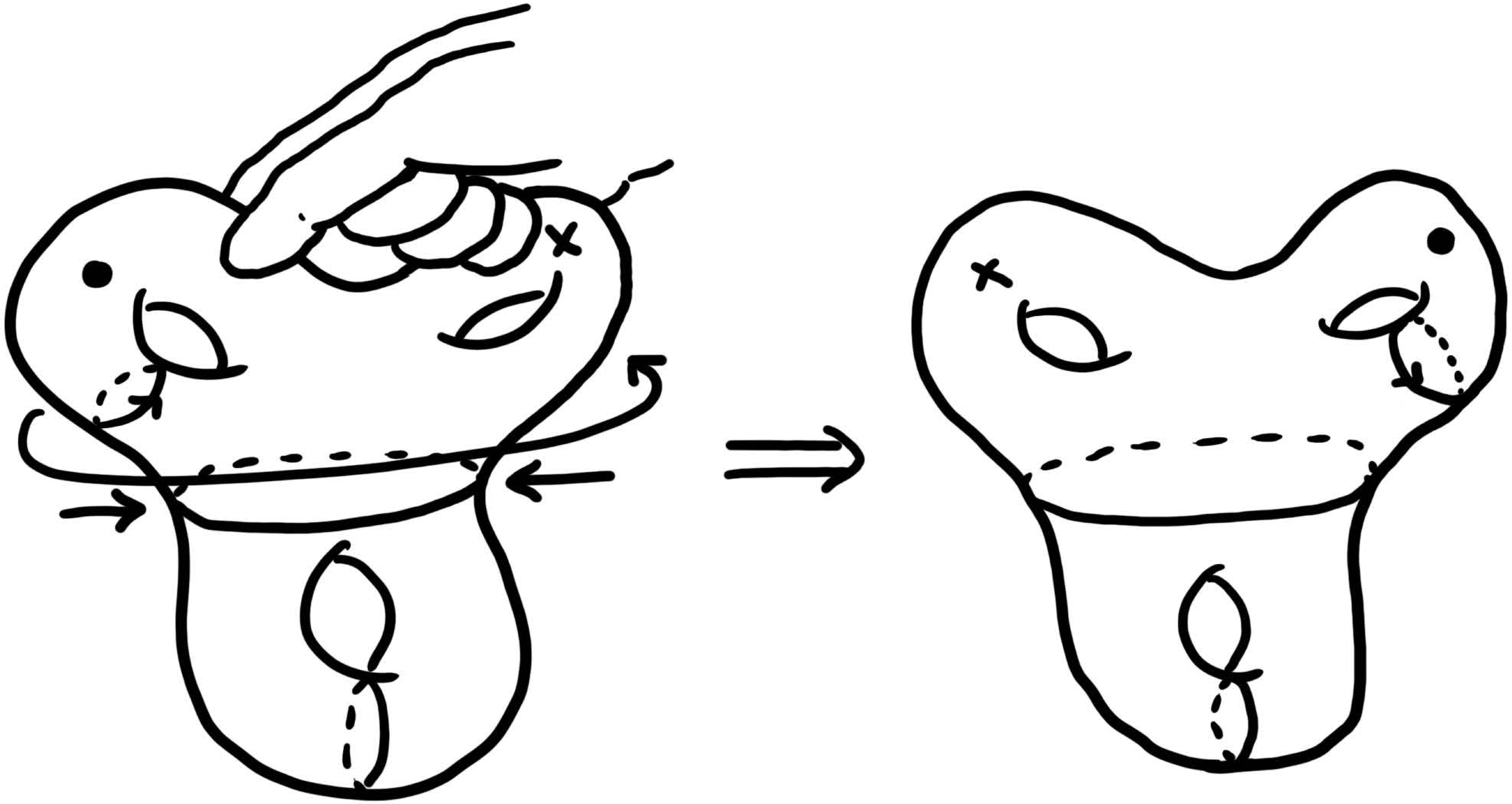
그러니 이 경우에는 실수 방향으로 옮길 때 약간씩 회전이 들어가는 형태겠죠.





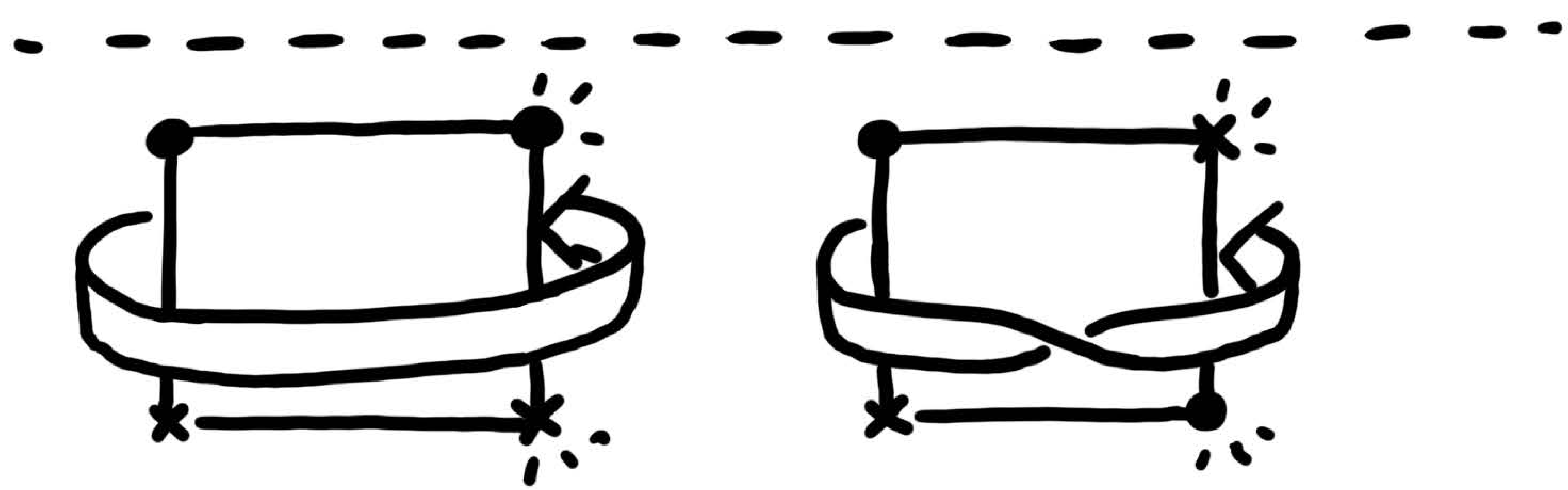
뫼비우스 띠 모양이 긴 끈을 주기적으로 돌려 가며 옮긴 모양인 것처럼요.

그 다음으로 언급할 것은 아래와 같은 경우인데요,

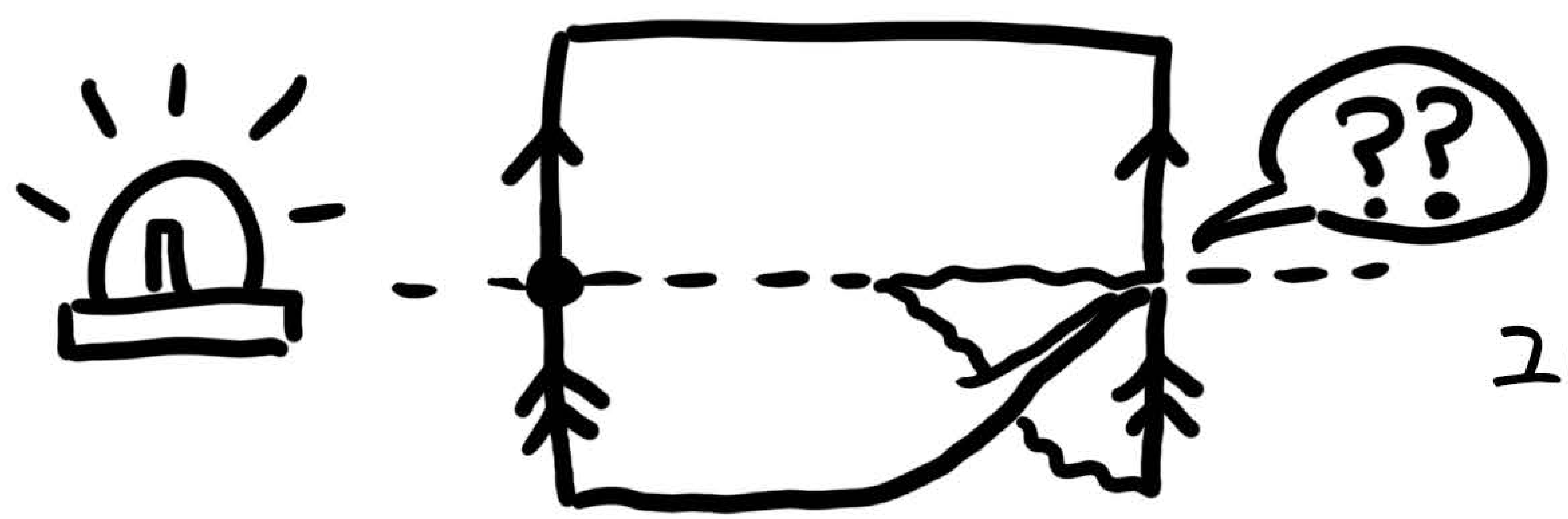


위와 같이 곡면 전체를 변화시키지 않고,

한 곡선을 고정하는 경우입니다.



모서리를 붙일 때는 함수의 양상이
꼭짓점 위치에서 티가 나기 때문이죠.
그러니 위쪽은 가만히, 아랫쪽만 뒤집히는
현상은 결코 나타나지 않아요.

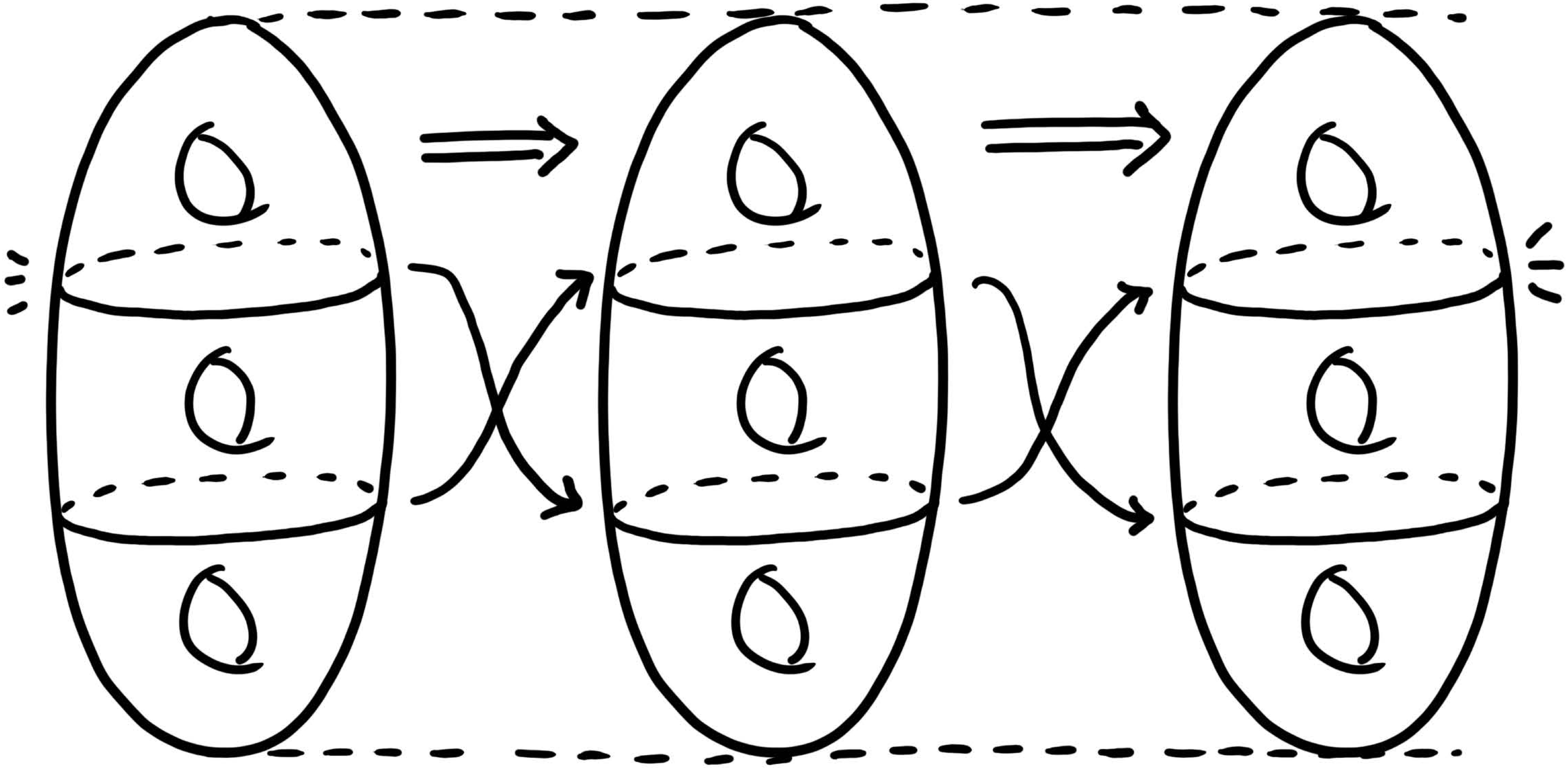


하지만 곡면을 이어붙일 때는 충분히 그럴 수 있죠. 따라서,

이 경우에는 곡선 부분을 절단해서 각각 생각합니다.

이때 자르는 부분은 3차원 물체 안에서는 "토러스"로 나타나겠죠.

그럼 아까와 같은 논리로, 어떤 곡선을 한번에 고정하지 않더라도,



"붙이는 방법"

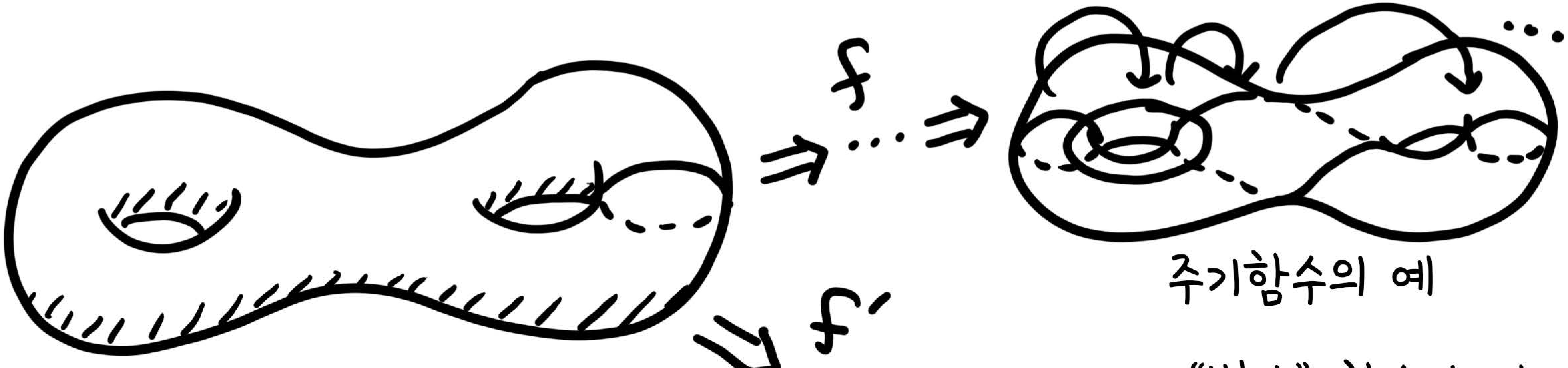
중간에 잠깐 뒤집거나 회전하는
효과만 줄 거고 큰 그림은 같습니다.

그런데, 방금처럼 고정되는 곡선으로 쪼개 생각해도 만약 결국
주기함수이기만 하면, 다 똑같은 운명 아닌가요?

이렇게 쌍곡면×수직선
공간을 풀칠해 만든 것밖에
없을 듯한데...

사실 지금까지 소개한 “붙이는 방법” 외에도 한 종류가 더 있어요.

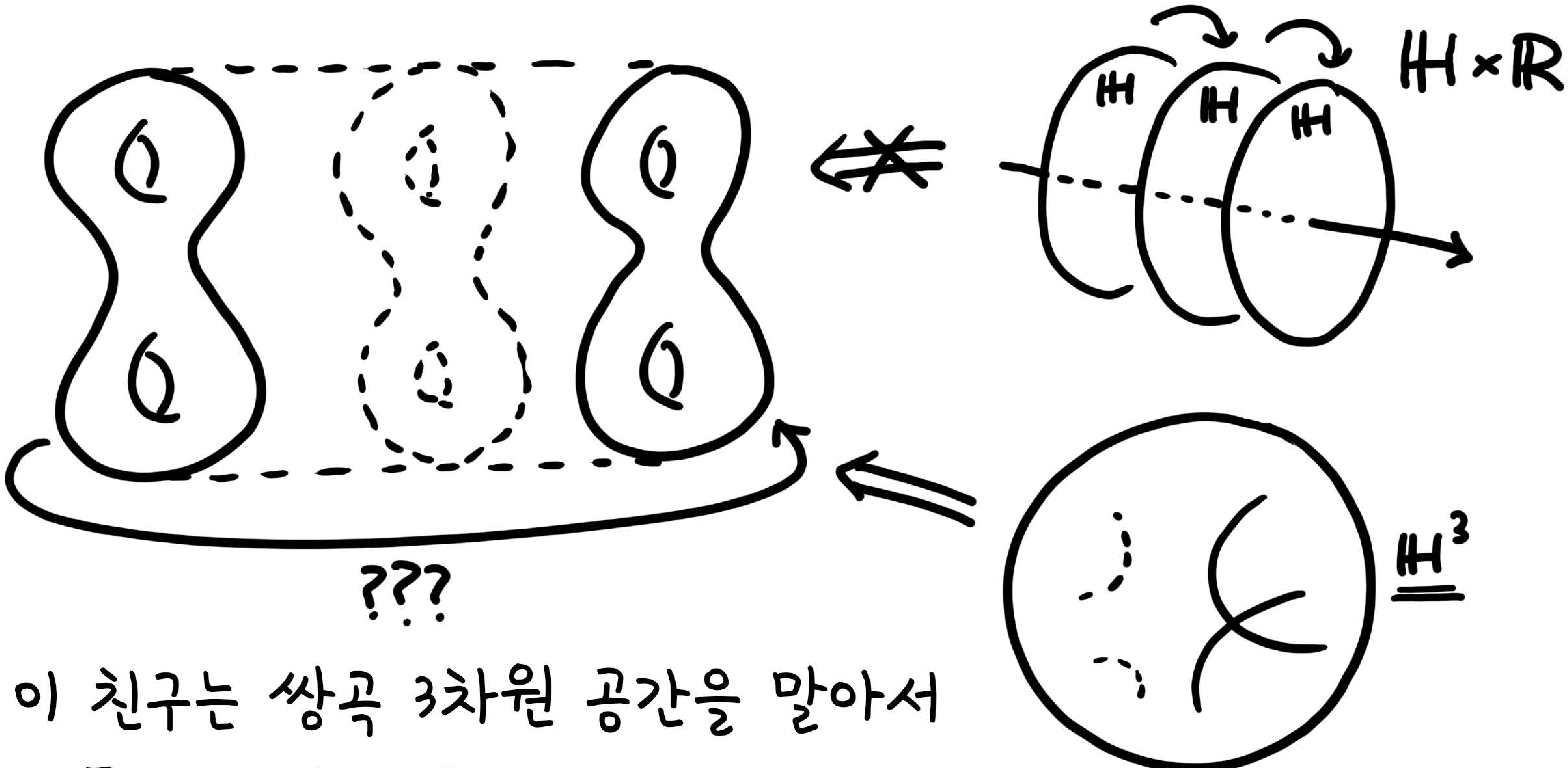
이 방법을 여기서 깊게 알아볼 수는 없겠지만,



곡면 위의 곡선들을 어떻게
변화시키는지 관찰하면,
전혀 주기함수가 아니란 것 정도는 확실해요.

실제로, 이 함수는 곡면을 아주 효율적으로 꼬기 때문에,

이런 꼬음은 (쌍곡면)X(수직선)이 감당할 수 없어요.



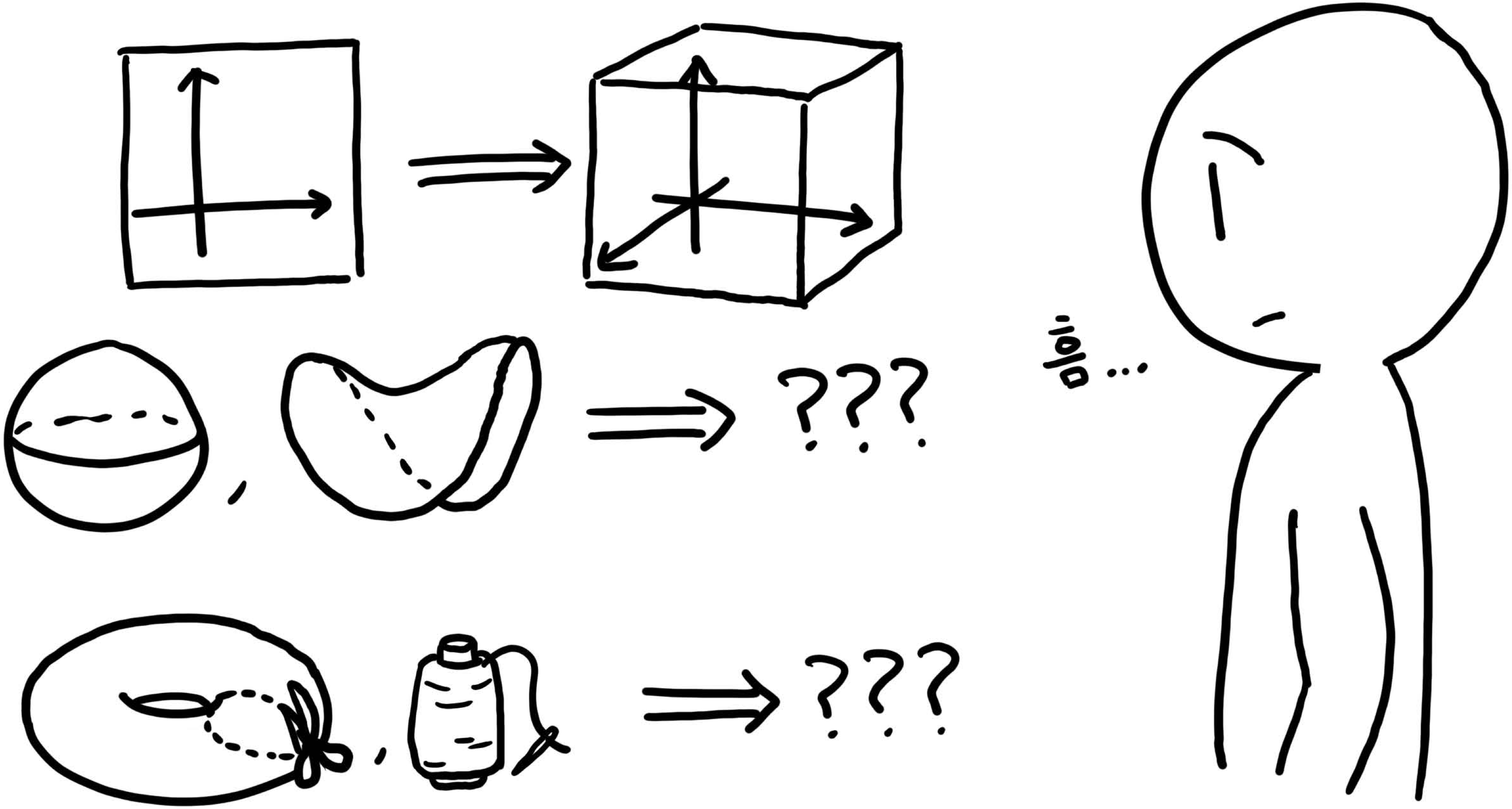
이 친구는 쌍곡 3차원 공간을 말아서

만들어지는 친구입니다.

그러니 곡선이 경계가 되어, 한쪽에선 평화로운 주기함수로,
다른 한쪽에선 별난 함수로 붙는 경우가 진짜 있는 거죠.

이땐 정말 3차원 도형을 토러스로 갈라서 볼 필요가 있겠죠.

휴, 이제 드디어 3차원 물체를 분석할 준비 운동이 끝났어요.



다음 시간에 계속해서 3차원 물체의 기하 구조를 살펴보아요!

<참고문헌>

1. Classical era (~1950s)

- H. Poincaré's <Analysis Situs> and their compelemnts.
  - H. Poincaré, Analysis situs. 1985, J. École Poly, Vol. 2, Issue 1, 1-123.
  - H. Poincaré, Second complément à l'Analysis situs, 1900. Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 32, 277-308.
  - H. Poincaré, Cinquième complément à l'analysis situs, 1904. Rend. Circ. Mat. Palermo, Vol. 18, 45-110.
- M. Dehn, Über die Topologie des dreidimensional Raumes, 1910. Math. Ann, Vol. 69, 137-168.
- M. Dehn, P. Heegard, Analysis situs, 1907. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, vol. III AB3, 153-220. Teubner, Leipzig.
- J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlosenen zweiseitigen Flächen, 1927. Acta Mathematica, Vol. 50, 189-358
- J. Nielsen, Surface Transformation Classes of Algebraically Finite Type. Danske Vid. Selsk. Math.-Phys. Medd., Vol. 21, No. 2, 89.

2. Modern era

- W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperolic geometry, 1982. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 6, No. 3, 357-381.
- W. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, 1988. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 19, No. 2, 417-431.
- W. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, 1986. Preprint (available at arxiv:math/9801045)

3. Secondary sources

- W. Thurston, The geometry and topology of three-manifolds, 1980. Electronic version by MSRI.
- J-P. Otal, Le théorème d'hperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3, 1996. Astérisque, tome 235.
- B. Farb, D. Margalit, A Primer on Mapping Class Groups, 2011. Princeton University Press.
- C. Gordon, 3-dimensional topology up to 1960, 449-490 in History of Topology, 1999, North-Holland,
- W. Thurston, Three-dimensional Geometry and Topology, Vol I (edited by S. levy), 1997. Princeton University Press.