

31415926535는 회문수가 아니므로, 적어도 2개의 회문수의 합으로 나타낼 수 있을 것이다.
 즉, 다시 말해서 31415926535에 회문수 A 를 빼고, 뺀 수 B 가 회문수인 A 와 B 를 찾으려 한다.
 이제 이 A 와 B 를 찾아보자.

일반성을 잃지 않고 $A > B$ 라 하자.
 그러면 A 는 반드시 11자리 숫자여야 한다.

편의상 자리수를 나열할 때, 다시말해 $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0$ 를 $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ 라 나타내자. 예를 들어,
 $100a + 10b + c = \overline{abc}$ 라는 기호를 써서 나타내자. (단, $0 < a, b, c < 10$ 일 때 $\overline{a(10+b)c} = \overline{(a+1)bc}$ (받아올림),
 $\overline{a(-b)c} = \overline{(a-1)(10-b)c}$ (받아내림)라고 하자.)

Let $A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$ 라 하고(각 자리수는 모두 양수), B 의 자리를 기준으로 경우를 나눠보자.

i) B 가 4자리 이하

이 경우에는 A 의 10^6 자릿수인 5와 10^4 자릿수인 2(B 의 1000 자릿수가 6 이상이면 1)가 같지 않으므로 A 는 회문수가 될 수 없다.

ii) B 가 5자리

31415926535 - A 가 5자리가 나와야 하므로, 10^5 이상의 자릿수는 모두 0이 되어야 한다. 따라서
 $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = 5$ 여야 한다. 또한, 31415926535 - A 의 10^5 자릿수가 0이어야 하므로 $a_6 = 8$ 임을 알
 수 있다. ($\because a_5 = 5$ 이므로 31415926535 - A 는 10^4 자릿수에서 받아내림을 해야한다.)
 따라서, B 가 5자리가 되는 회문수는 $A = 31415851413$ 이 유일하다. 그러나, B 가 회문수가 아니므로 B 는 5자리가 될
 수 없다.

iii) B 가 6자리

31415926535 - A 가 6자리가 나와야 하므로, 10^6 이상의 자릿수는 모두 0이 되어야 한다. 따라서
 $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 1$ 은 확정이다.
 31415926535 - A 를 계산해보면, 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 31415926535 \\ -)3141a_5a_6a_51413 \\ \hline (5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)5122 \end{array}$$

위 식에서 B 는 6자리인데, 100의 자릿수와 1000의 자릿수가 다르다. 따라서 회문수가 될 수 없다.

iv) B 가 7자리

31415926535 - A 가 7자리이므로, 10^7 이상의 자릿수는 모두 0이 되어야 한다. 따라서 $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 4$ 는
 당연하다.
 31415926535 - A 를 계산해보면, 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 31415926535 \\ -)314a_4a_5a_6a_5a_4413 \\ \hline (1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)122 \end{array}$$

위 식에서, $5 - a_5 = 2, 2 - a_5 = 1$ 를 만족해야만 B 가 7자리 회문수를 만족한다. 그러나, 이를 만족하는 a_5 는 존재하지
 않는다. 따라서 B 는 7자리 자연수가 될 수 없다.

v) B 가 8자리

31415926535 - A 가 8자리이므로, 10^8 이상의 자릿수는 모두 0이 되어야 한다. 따라서 $a_1 = 3, a_2 = 1$ 이다.

31415926535 - A를 계산해보면, 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 31415926535 \\ -)31a_3a_4a_5a_6a_5a_4a_313 \\ \hline \frac{(4-a_3)(1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)22}{(3-a_3)(11-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)22} \end{array}$$

B가 8자리 회문수를 만족하므로, $3-a_3=0, 11-a_4=2, 5-a_5=2$ 를 만족한다. 이를 통해 $a_3=3, a_4=9, a_5=3$ 이다. 숫자를 대입하면 $B = \overline{22(8-a_6)87222}$ 이지만, 이 때 회문성 서열은 만들어지지 않는다.

vi) B가 9자리

31415926535 - A가 9자리이므로, 10^{10} 이상의 자릿수는 모두 0이 되어야 한다. 따라서 $a_1=3$ 이다.

31415926535 - A를 계산해보면, 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 31415926535 \\ -)3a_2a_3a_4a_5a_6a_5a_4a_3a_23 \\ \hline \frac{(1-a_2)(4-a_3)(1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)(3-a_2)2}{(1-a_2)(3-a_3)(11-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)(3-a_2)2} \end{array}$$

B가 9자리 회문수를 만족하므로, $1-a_2=0, 3-a_3=2$ 를 만족한다. 여기서 $a_2=1, a_3=1$ 이고, 숫자를 대입하면 $B = \overline{2(11-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)422}$ 이다. 다시 B가 회문수라는 조건을 사용하면 $11-a_4=2$ 임을 알 수 있다. 따라서, $a_4=9$ 이다. 또 다시 $a_4=9$ 를 대입하면

$B = \overline{22(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-9)422} = \overline{22(5-a_5)(9-a_6)(1-a_5)7422}$ 이고, 이를 통해 $a_5=1, a_6=2$ 임을 알 수 있다. 이제 이 두 숫자를 대입하면, $B = 224707422$ 가 나오고, $A = 31191219113$ 이 나온다.

vii) B가 10자리

31415926535 - A를 계산해보면, 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 31415926535 \\ -)a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_5a_4a_3a_2a_1 \\ \hline \frac{(3-a_1)(1-a_2)(4-a_3)(1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)(3-a_2)(5-a_1)}{(2-a_1)(11-a_2)(4-a_3)(1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)(3-a_2)(5-a_1)} \end{array}$$

위 식에서 $a_1=2$ 를 대입하면 $B = \overline{(11-a_2)(4-a_3)(1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)(3-a_2)3}$ 이 되고, 회문수의 정의상 $a_2=8$ 이 나온다. 이제 a_2 를 대입하면,

$$\begin{aligned} B &= \overline{3(4-a_3)(1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(5-a_3)(3-8)3} \\ &= \overline{3(4-a_3)(1-a_4)(5-a_5)(9-a_6)(2-a_5)(6-a_4)(4-a_3)53} \end{aligned}$$

$4-a_3=5$ 여야 하는데, 앞에서 a_4 는 양수라는 조건이 있었으므로 모순이다. 따라서 B가 10자리인 회문수는 존재하지 않는다.

vii) B가 10자리

31415926535 - A를 계산하면, 위의 수식과 같게 나온다. 그러나, 회문수 특성상 $2-a_1=5-a_1$ 를 만족한다. 이를 만족하는 자연수 a_1 은 존재하지 않는다. 따라서 B는 11자리가 될 수 없다.

∴ i) ~ vii) 에서, $A+B=31415926535$ 를 만족하는 회문수 A, B는 $A=31191219113, B=224707422$ 이 유일하다.