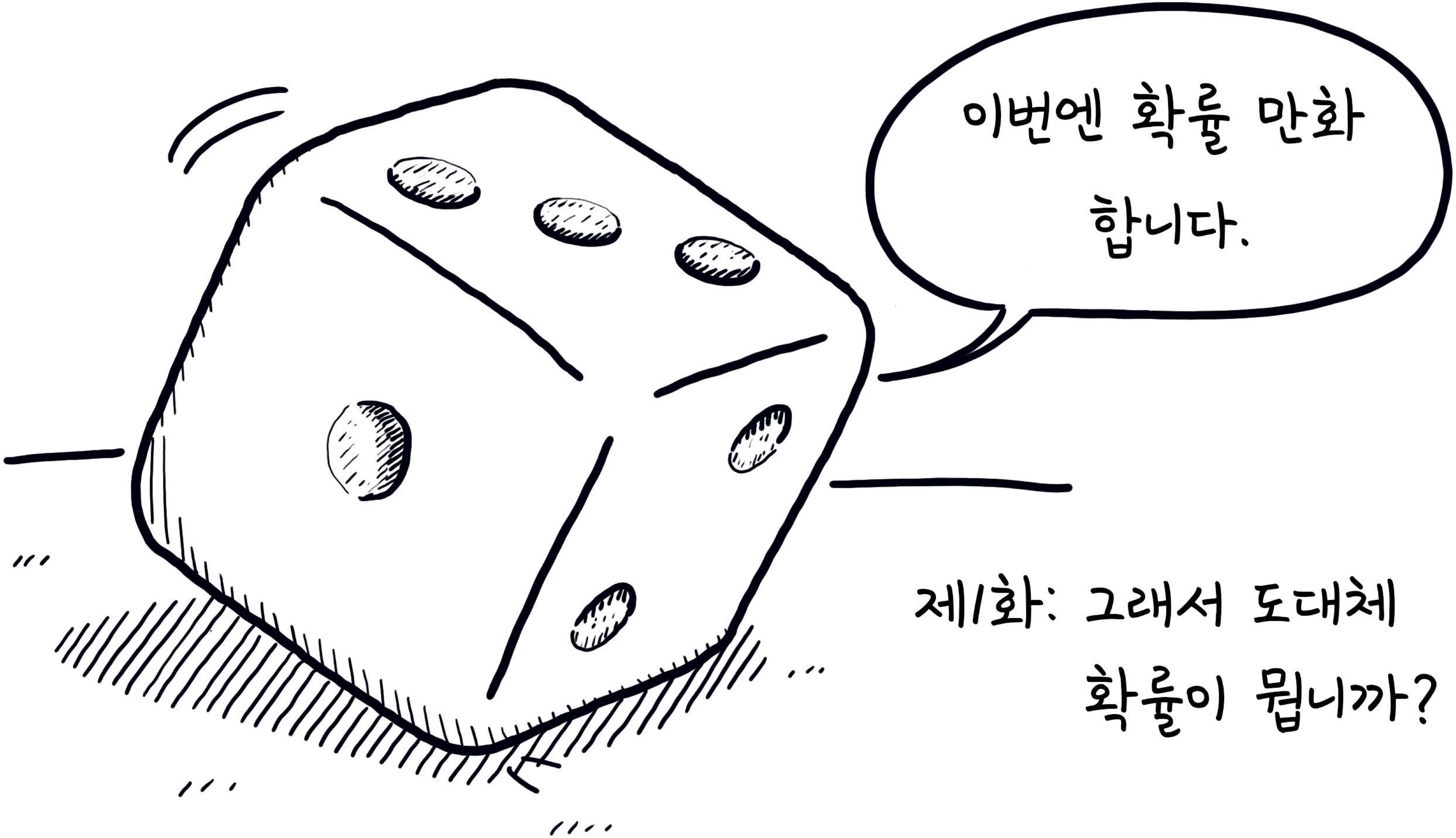
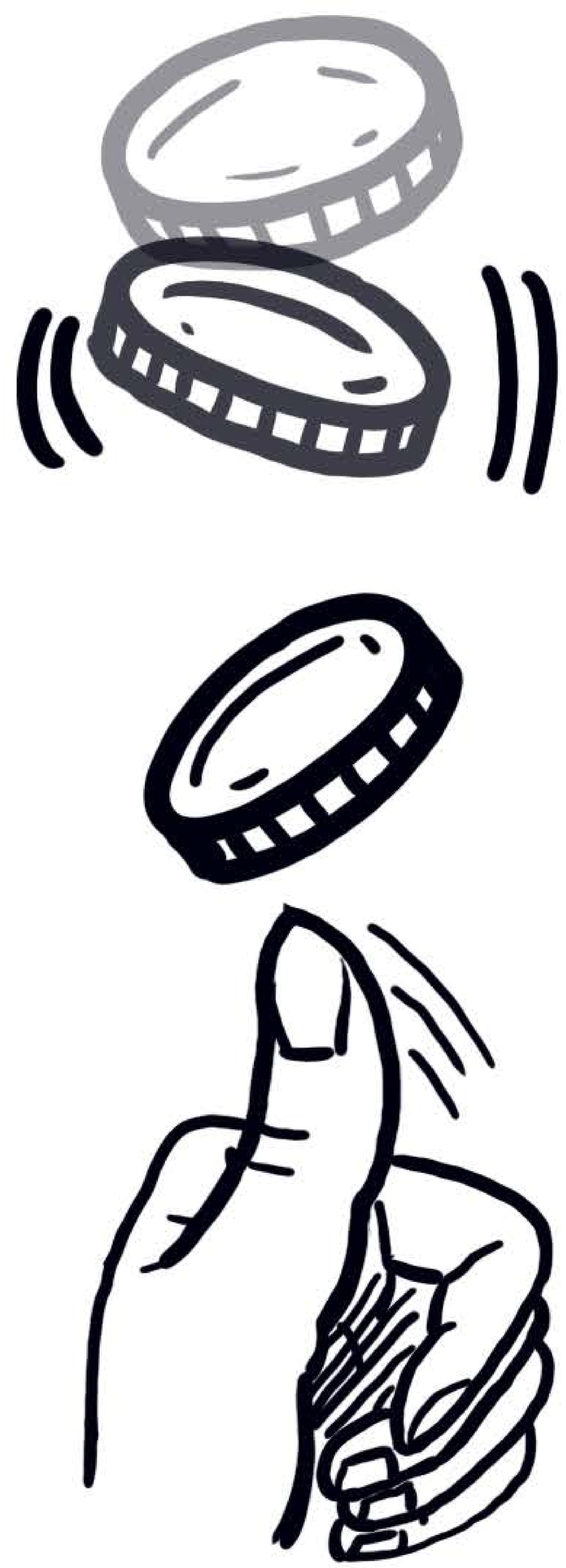


제1화: 그래서 도대체 확률이 뭡니까?

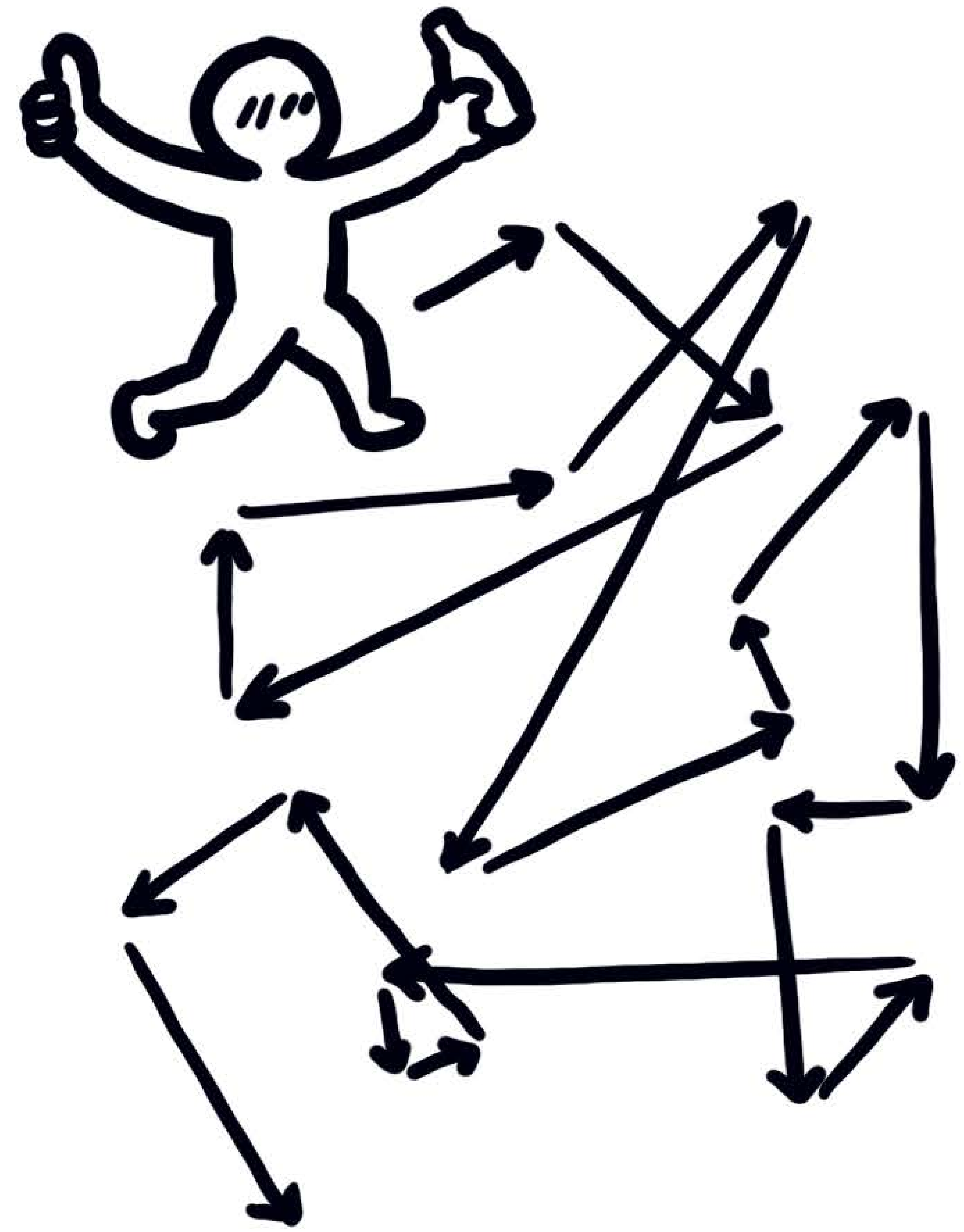

안녕하세요! 새 시즌으로 다시 찾아뵙게 되어 영광입니다.
이전의 해석학 시즌과 기하학 시즌에 이어, 이번에는 또다른 수학 분야를 소개해 드리려 합니다.


그 주제는 바로 '확률론'이에요.
물리학이나 경제학 등 다른 분야에도 활발히
응용되고 있는 학문이죠.
확률론
?

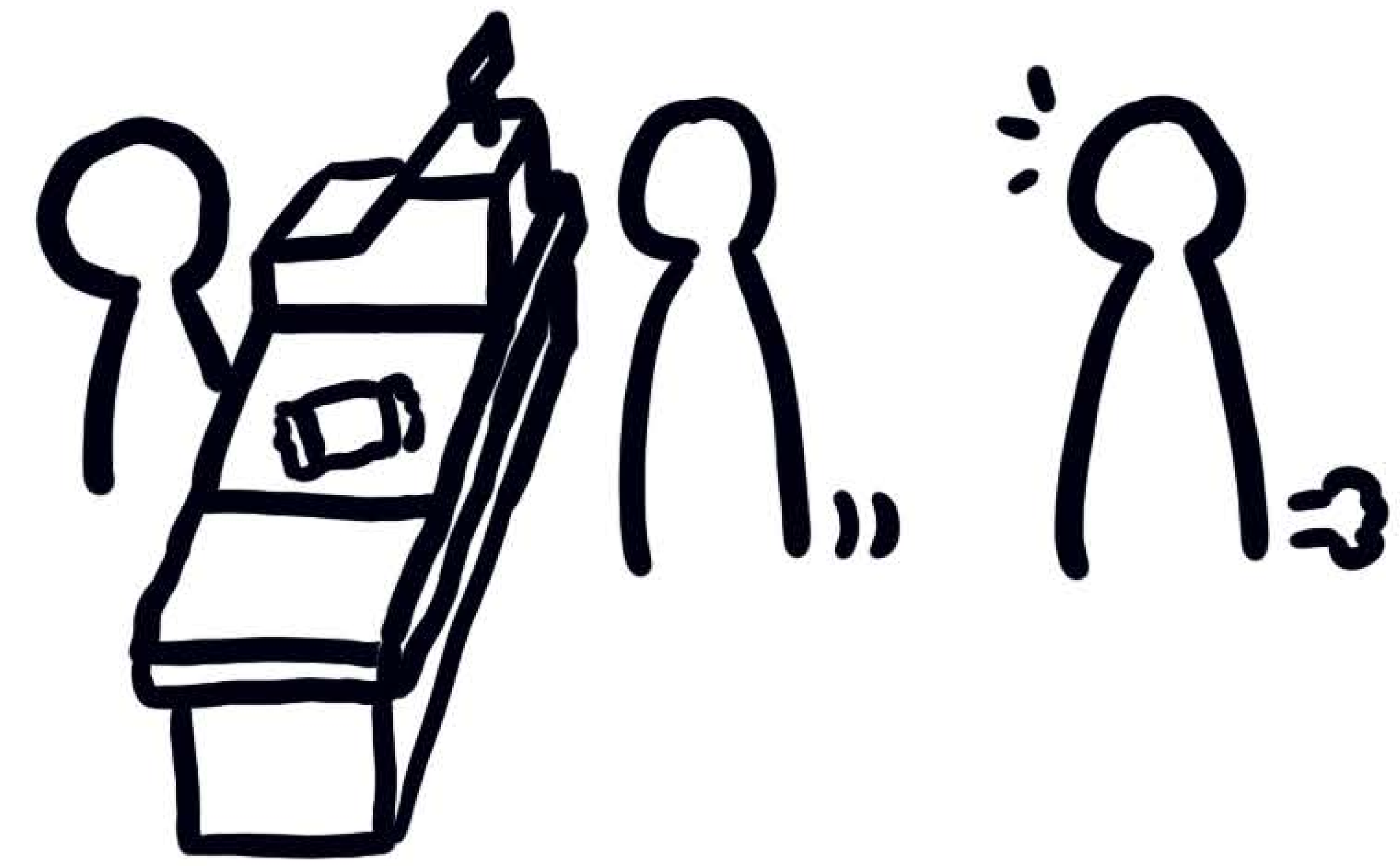
비단 학술적인 상황뿐만 아니라, 현실에서도 확률이 등장합니다.



간단하게 동전을 던져
순서를 결정할 때도 있고,

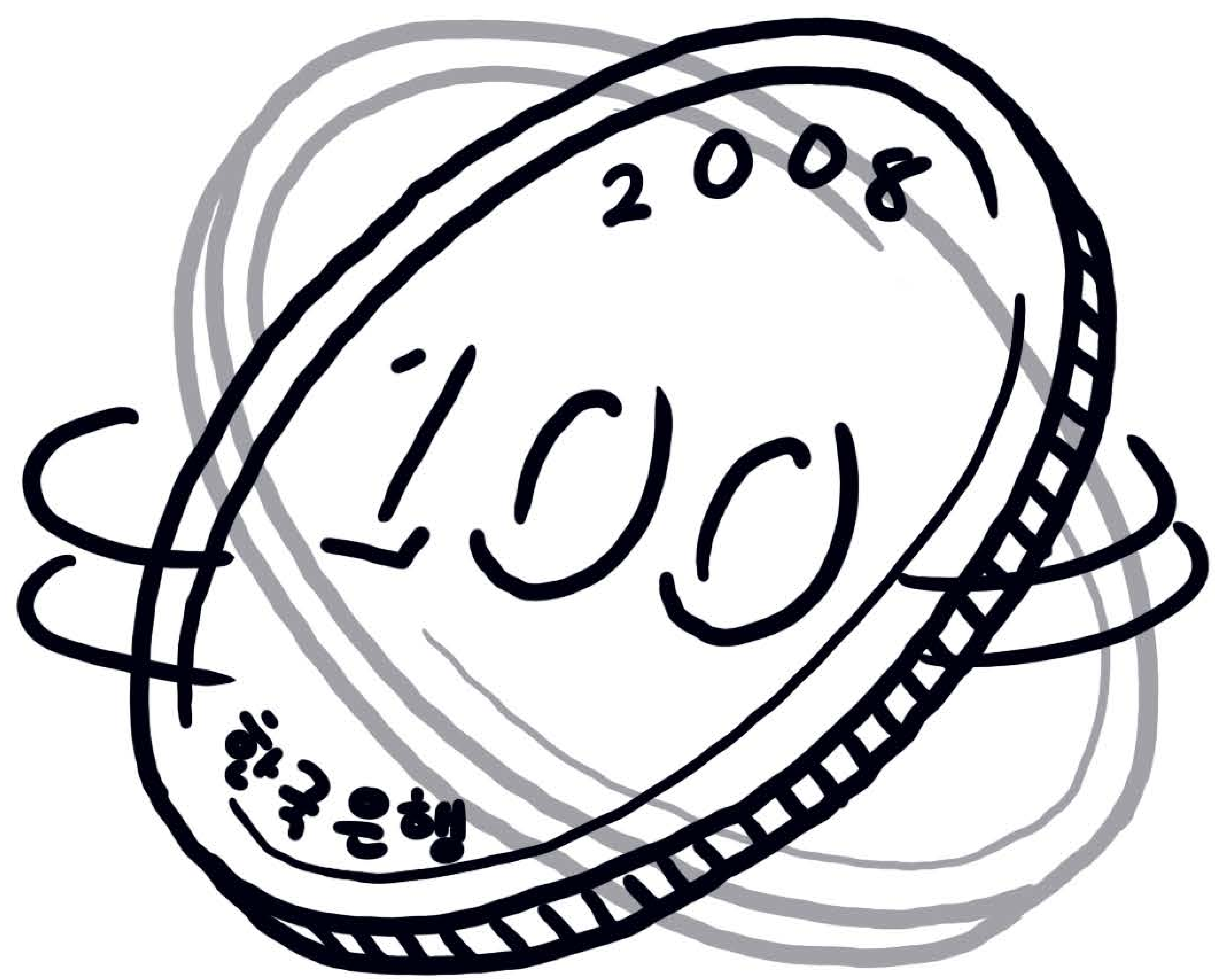


흥에 겨운 나머지 확률적인
걸음걸이를 보이는 경우나,



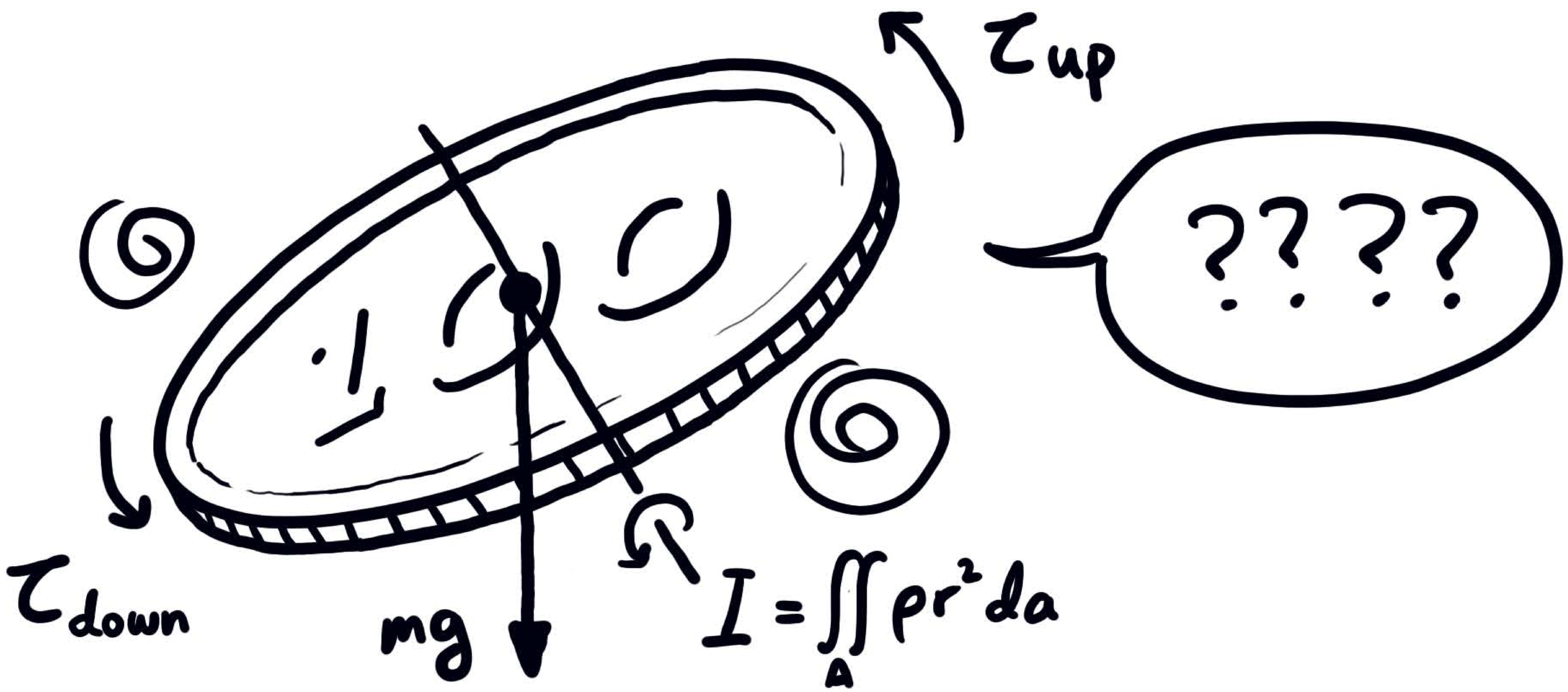
시간마다 일정한 확률로
손님이 오는 경우도 있죠.

일단 가장 간단해 보이는 동전 던지기에서 출발해 봅시다.
앞/뒷면 확률이 50%인 평범한 동전을 가지고 말이에요.



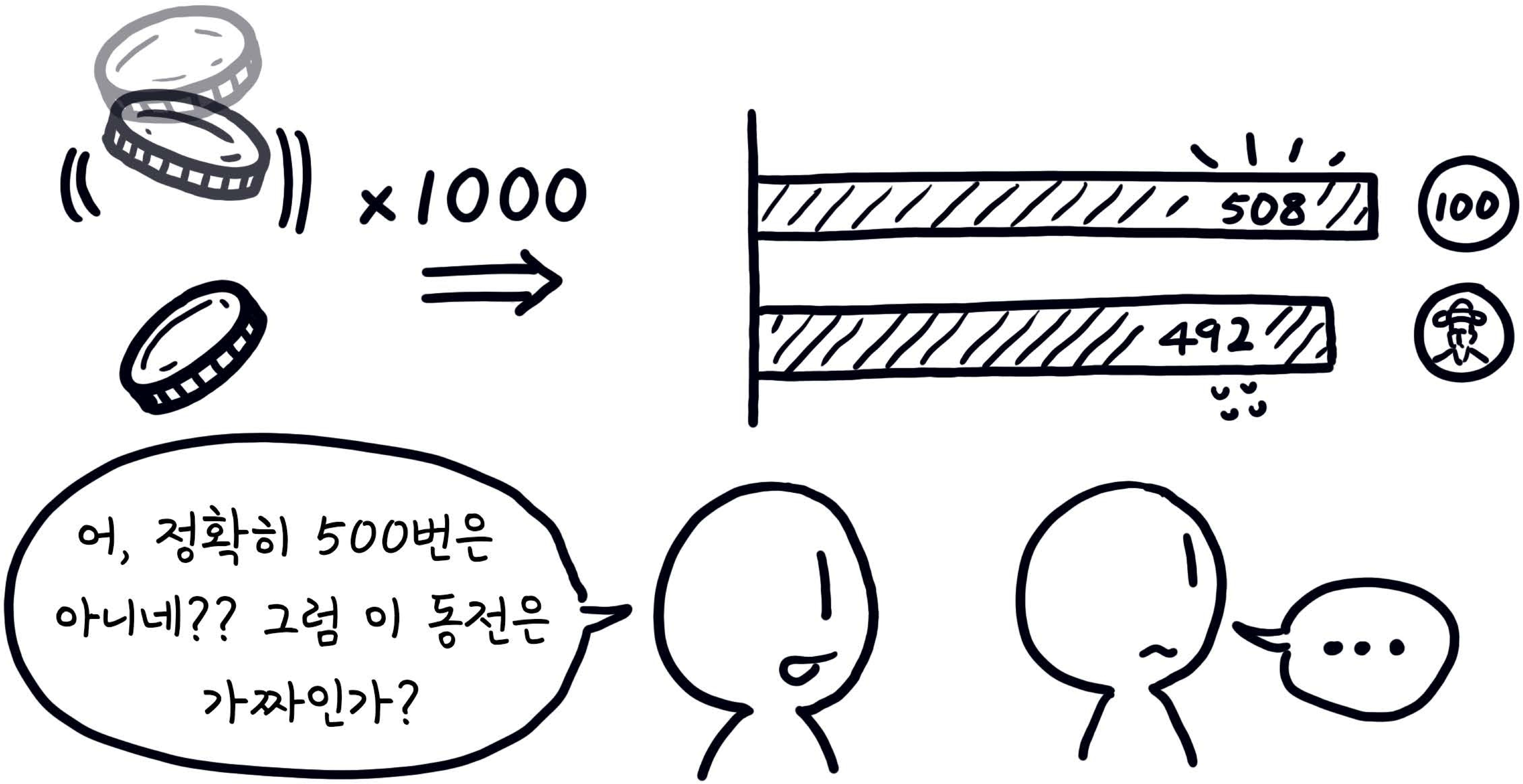
그런데 시작하기 전에, '우리가 안 다룰 이슈'부터 짚고 넘어가죠.

첫번째로, '왜 동전의 각 면 확률이 50%인지' 혹은 '어떻게 동전을 디자인하면 확률이 50%가 되는지'는 저는 모릅니다.



그건... 물리의 영역이지 수학의 영역이 아니니까요.

두번째로, '누군가 동전을 건네줬을 때 그 동전의 확률을 확인하는 방법론' 또한 다루지 않을 겁니다.



이건 확률론이라기보다는 통계학의 영역인데요,

확률론과 밀접한 관련이 있기는 하지만,

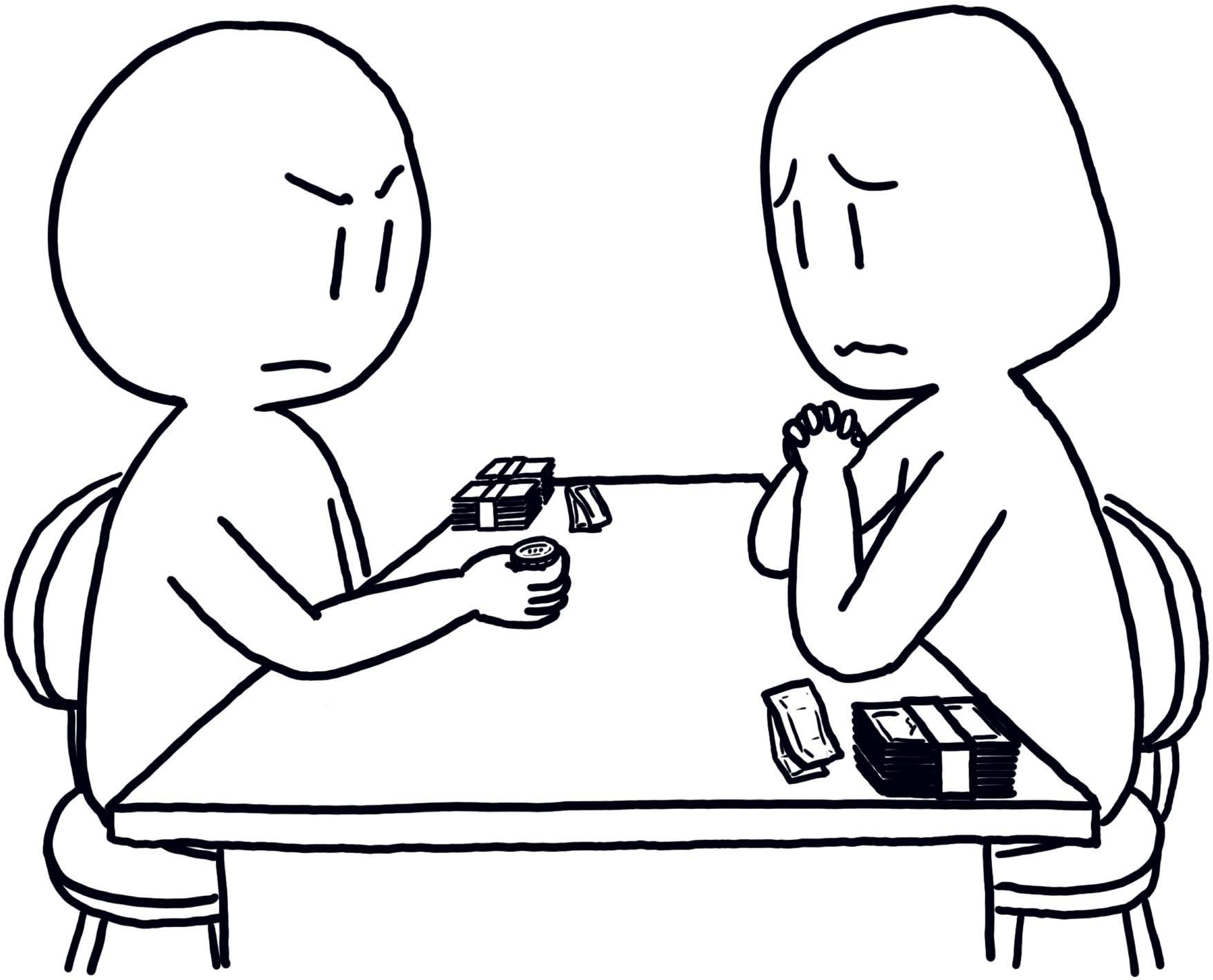
저희 시즌에서 다루기는 조금 어렵겠어요.

그러니 각 면이 나올 확률이 반반인 동전은 일단 가정하고 시작하겠습니다.

근데 그래도, 확률이 어떤 것인지 느낌은 맛봐야 하지 않을까요?

그거라면 아주 명쾌한, 유서깊은 방식이 있습니다.

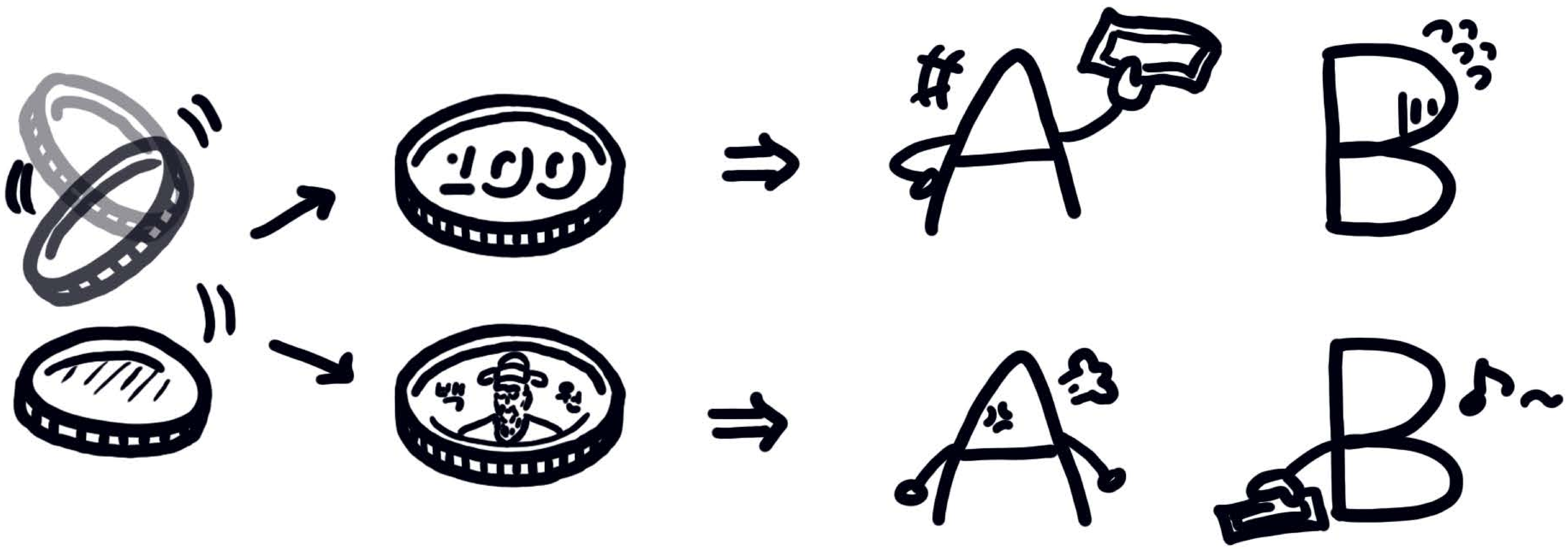
근대 확률론의 출발점, 바로 돈내기입니다.



판돈을 걸고 확률을 논하면 확실하게 느낄 수 있다네요.

가장 간단한 형태의 내기는 다음과 같습니다.

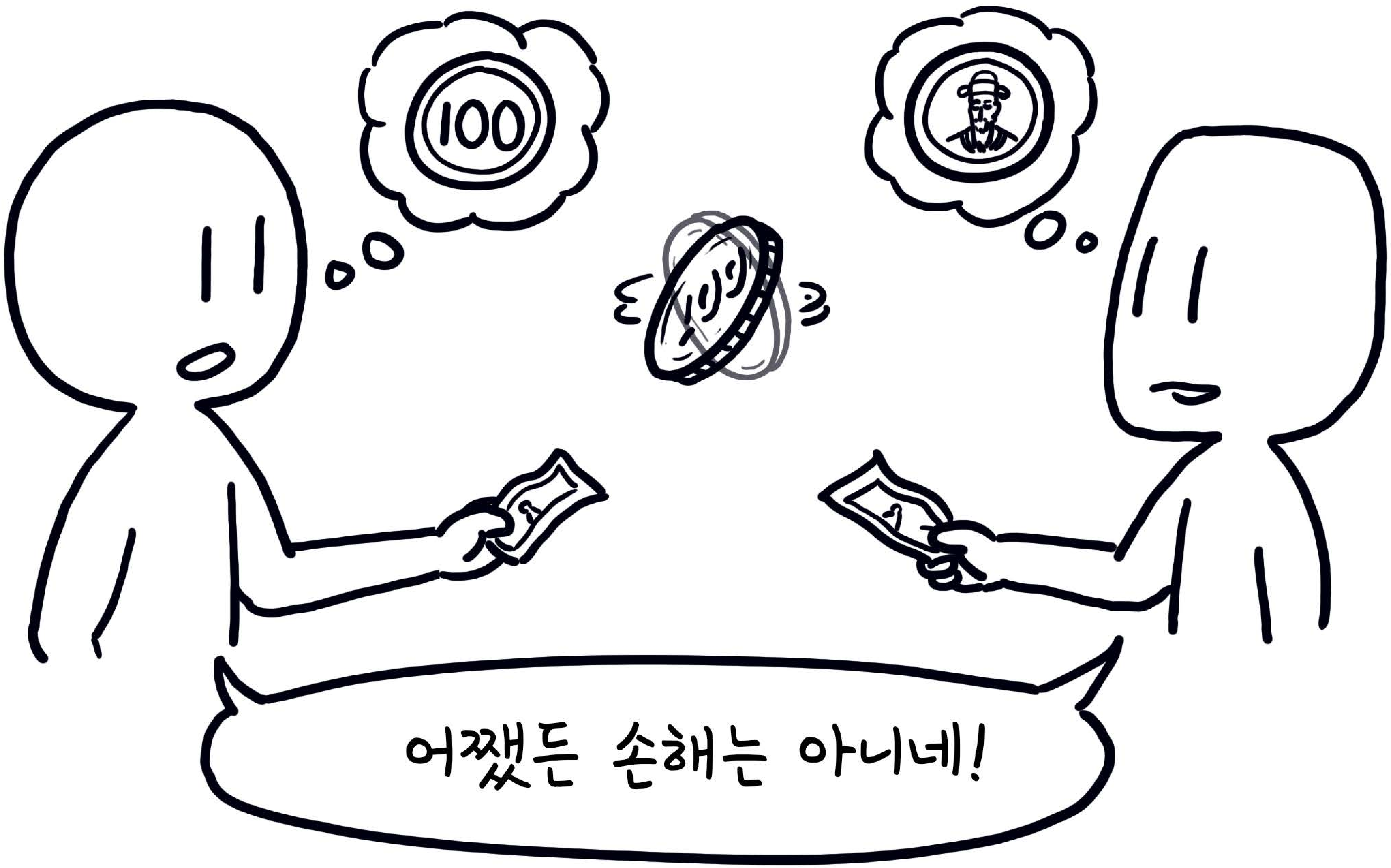
두 사람이 같은 금액의 판돈을 걸어 놓고,



앞면이 나오면 A가, 뒷면이 나오면 B가 판돈을

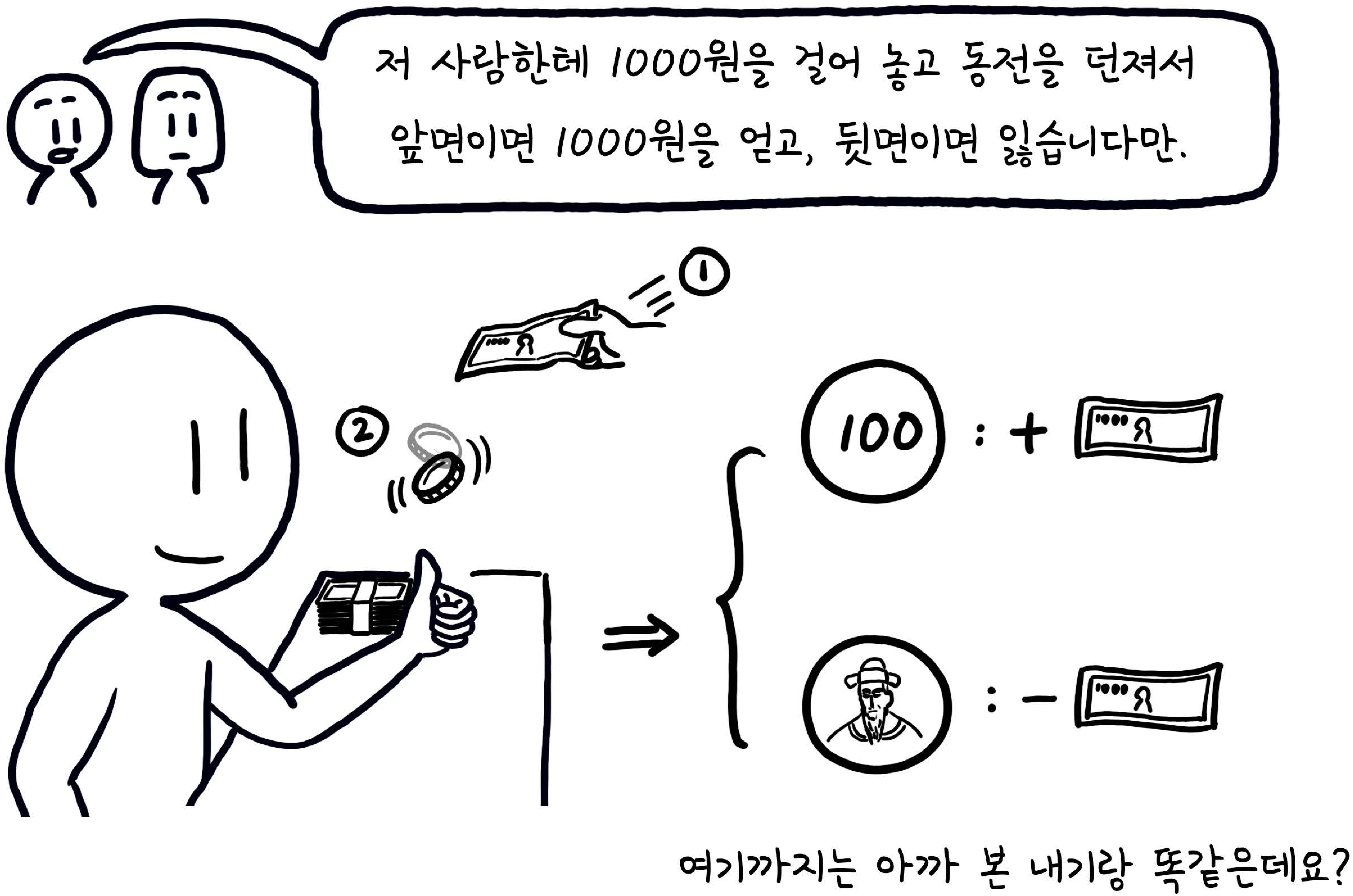
모두 가져가는 거죠.

만약 판돈을 동일하게 걸었고 평범한 동전을 사용한다면,



이렇게 느끼겠죠. 이게 확률이 반반인 상황입니다.


물론 방금 말한 게임은 별로 재미가 없죠. 그런 당신을 위해...
상당히 괜찮은 게임이 있는데, 한번 들어보실라우?
오, 일단 어떤 게임인지나 들어볼까요?

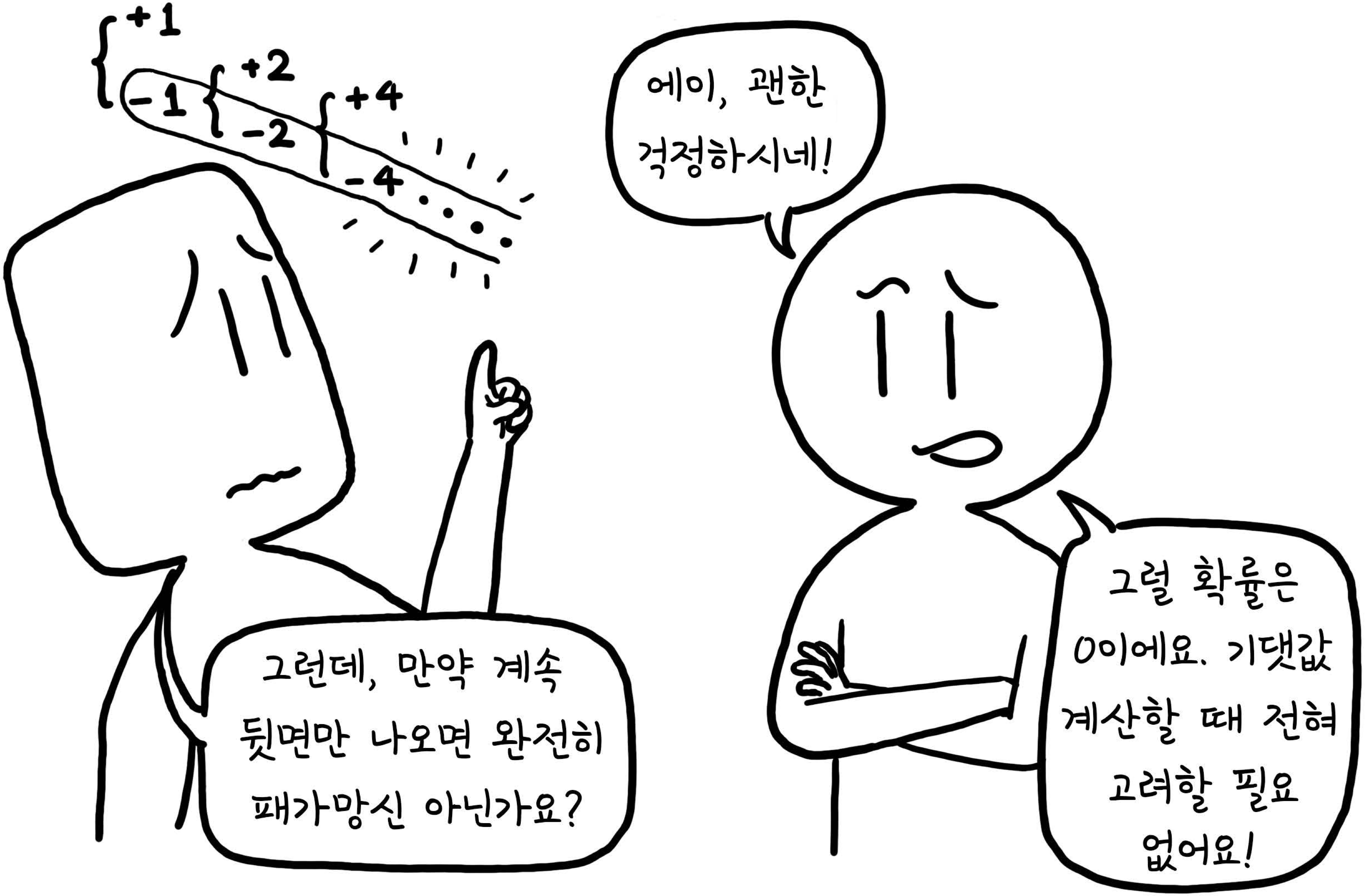

저 사람한테 1000원을 걸어 놓고 동전을 던져서 앞면이면 1000원을 얻고, 뒷면이면 잃습니다만.
①
②
100
: +
: −
여기까지는 아까 본 내기랑 똑같은데요?

물론 연달아 뒷면이면 손해는 더 커지겠지만, 걱정 말아요.

이렇게 손해 날 때마다 두 배씩 판돈을 걸면,

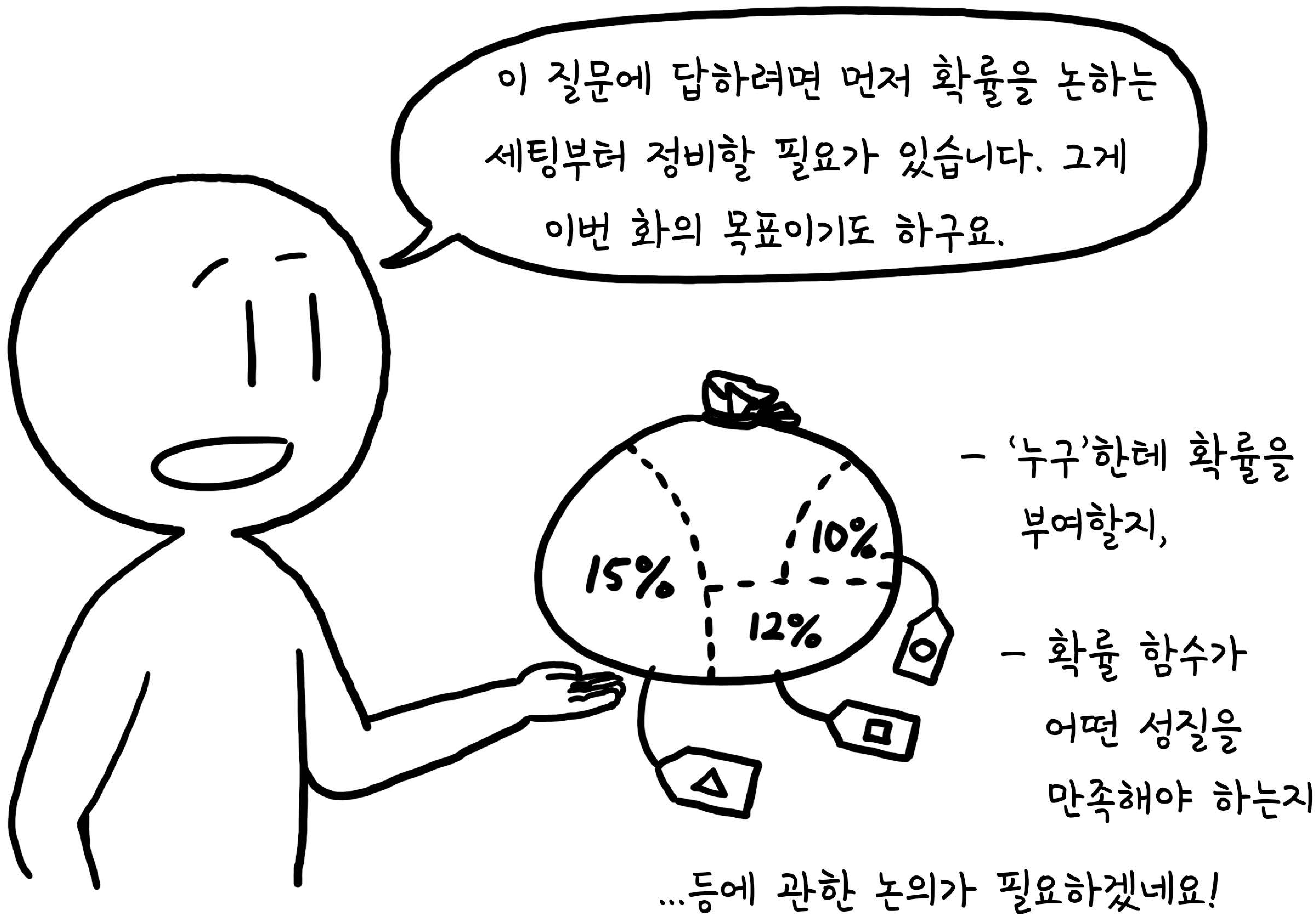
언제가 됐든 한 번만 앞면 나오면 쌓인 손실을 다 메꾸고도

1000원을 벌어간다는 겁니다.

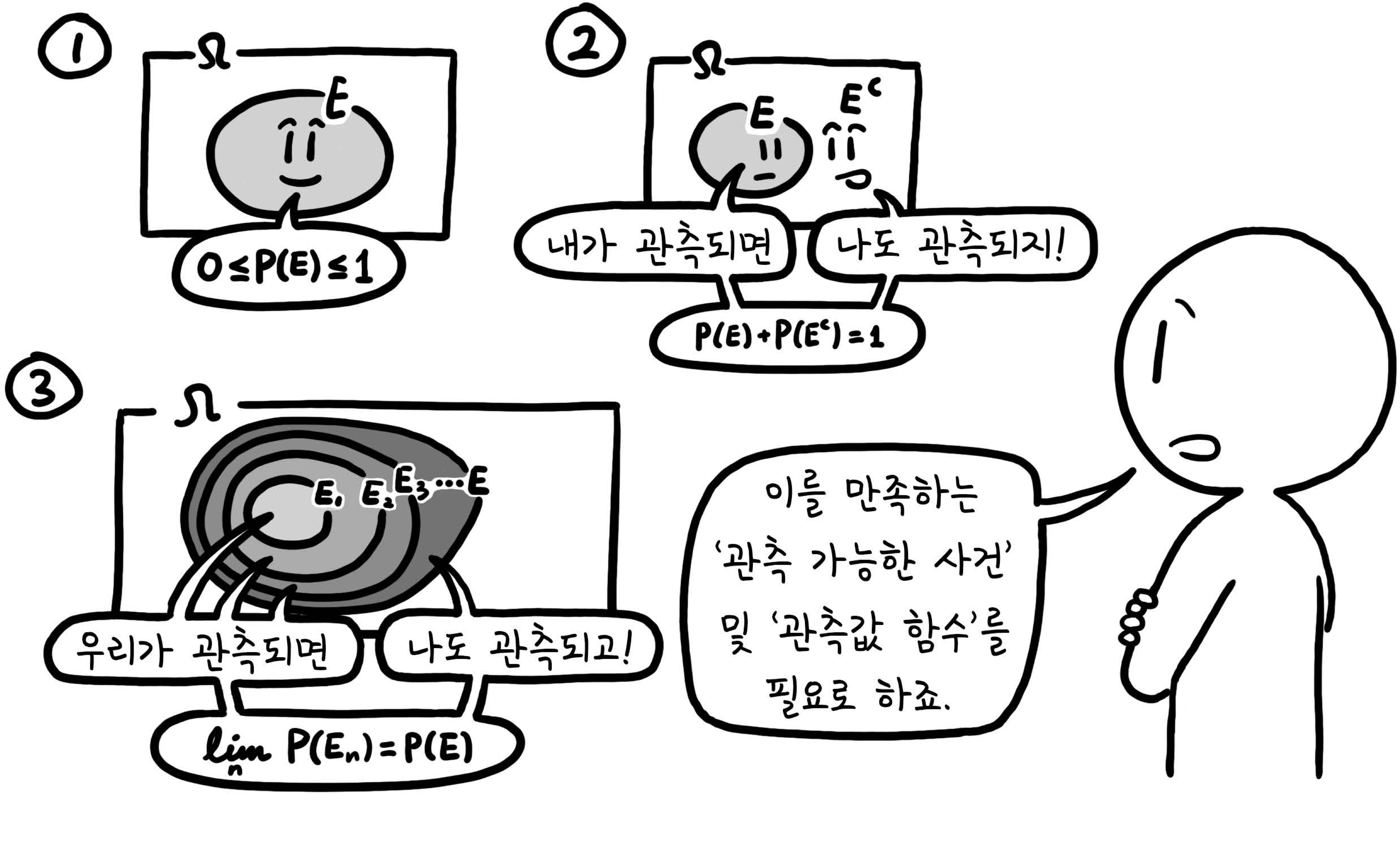

+1
-1
+2
-2
+4
-4 . . . .
에이, 괜한 걱정하시네!
그런데, 만약 계속 뒷면만 나오면 완전히 패가망신 아닌가요?
그럴 확률은 0이에요. 기댓값 계산할 때 전혀 고려할 필요 없어요!

이런 근거로 1000원을 확실하게 벌 터이니, 참가비로 500원만 내라는데요.

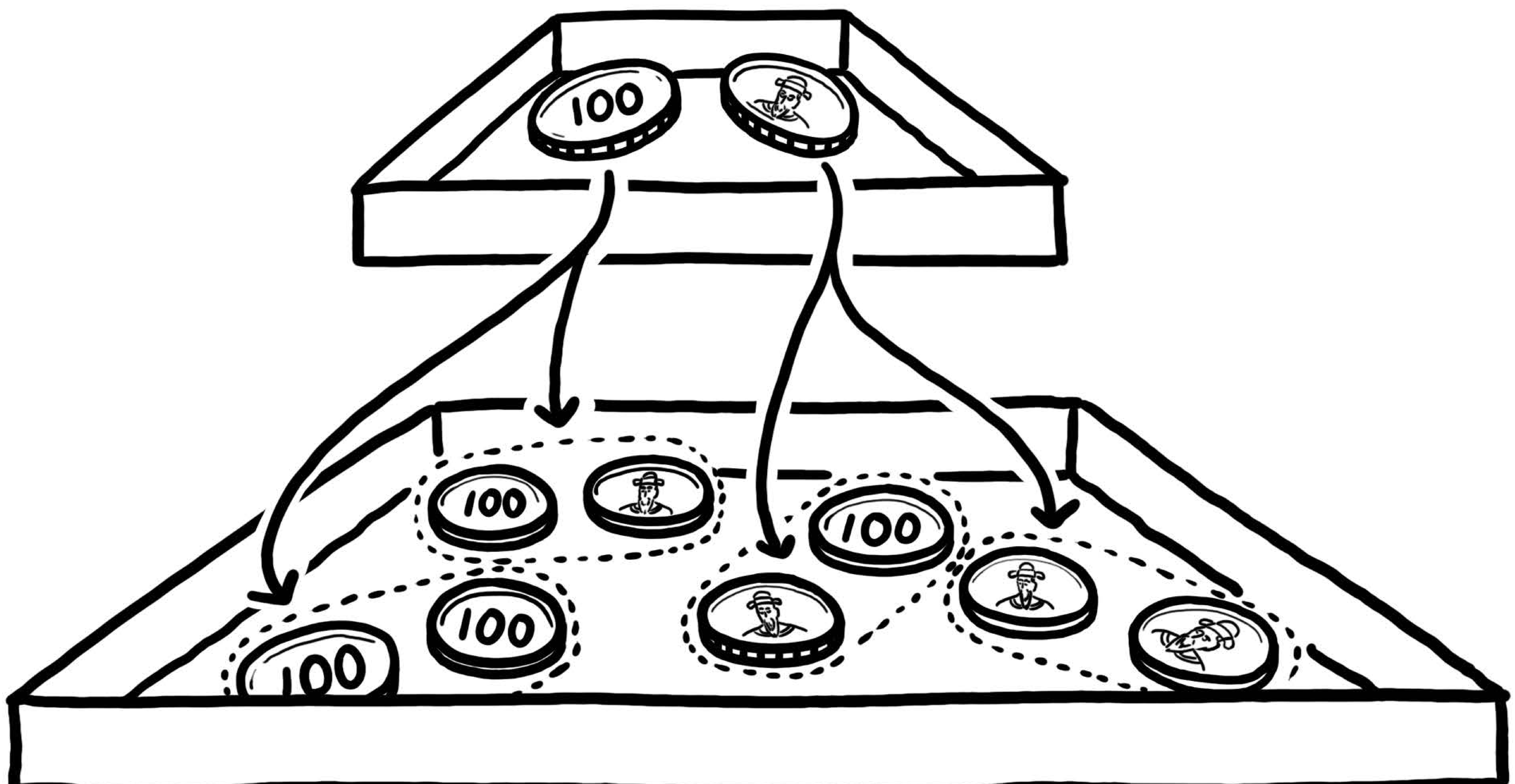
이 설명, 과연 맞는 말일까요? 아니면 함정이 있는 걸까요?


이 질문에 답하려면 먼저 확률을 논하는 세팅부터 정비할 필요가 있습니다. 그게 이번 화의 목표이기도 하구요.
15%
10%
12%
- '누구'한테 확률을 부여할지,
- 확률 함수가 어떤 성질을 만족해야 하는지
...등에 관한 논의가 필요하겠네요!

일반적으로 확률론을 논하는 세팅은 다음과 같아요.

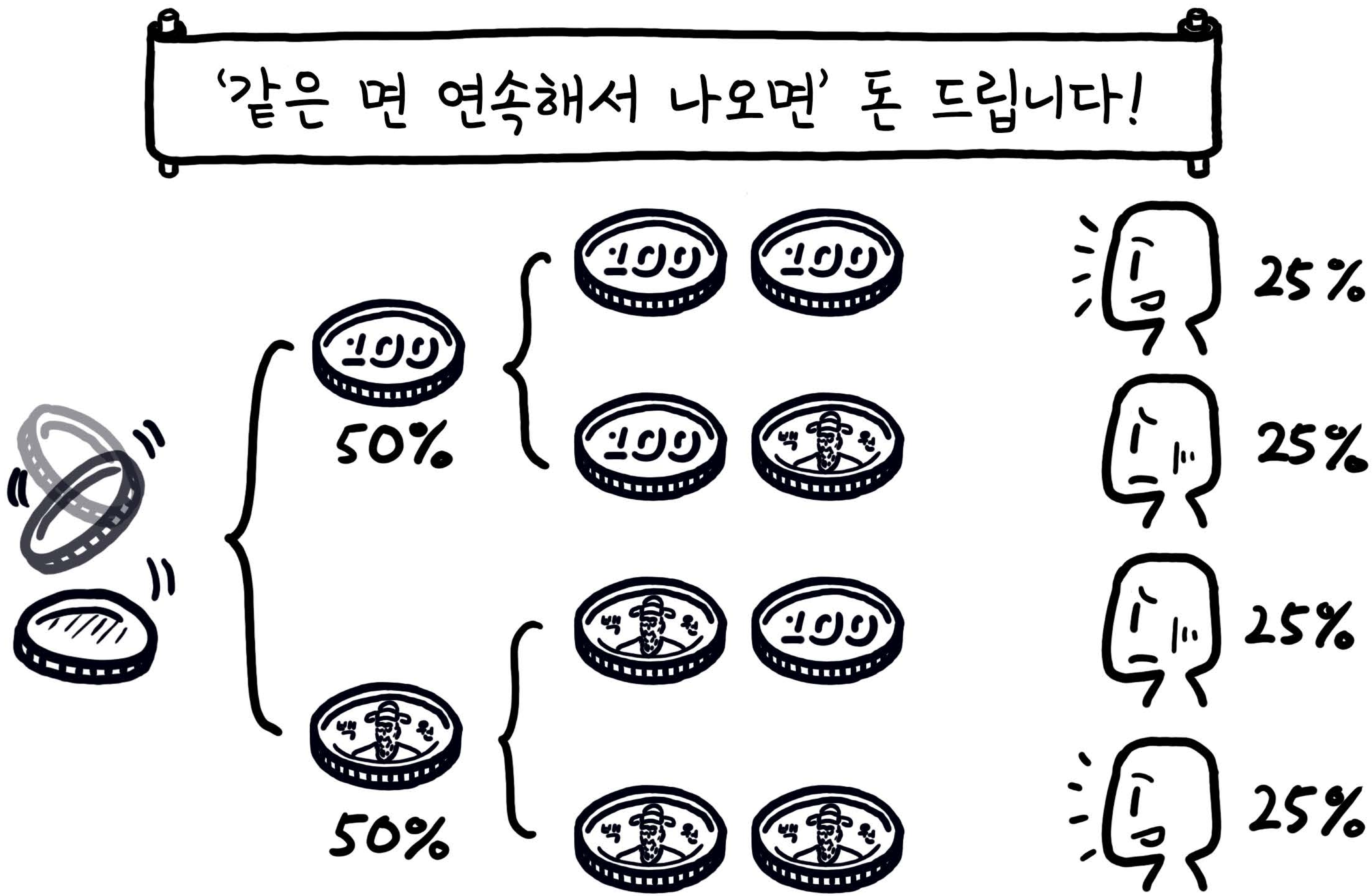


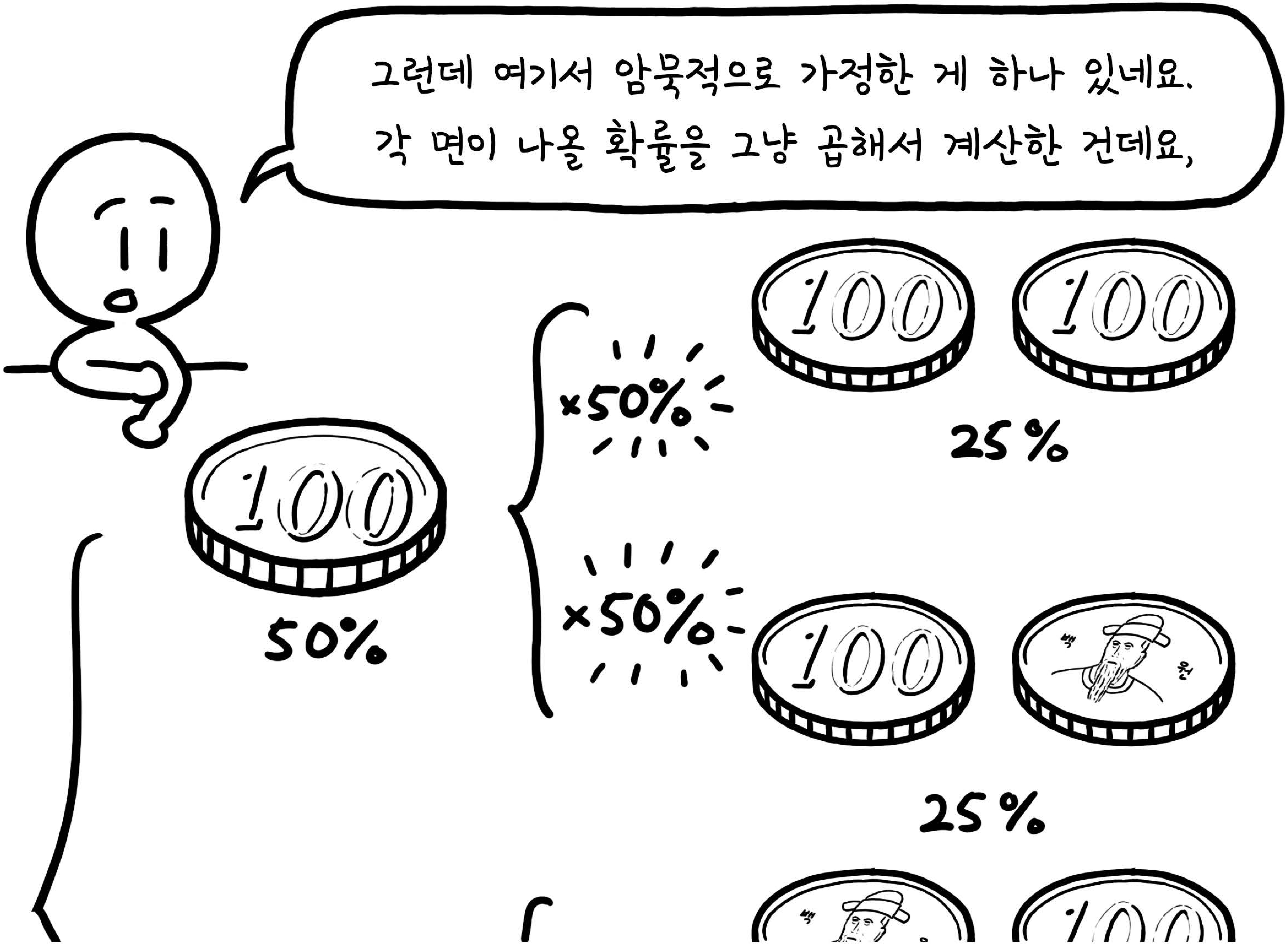
먼저 '사건'이란 무엇인지 생각해 봅시다. 방금처럼 동전을 여러 번 던진다면, 가능한 사건의 종류는 더 늘어나겠죠.



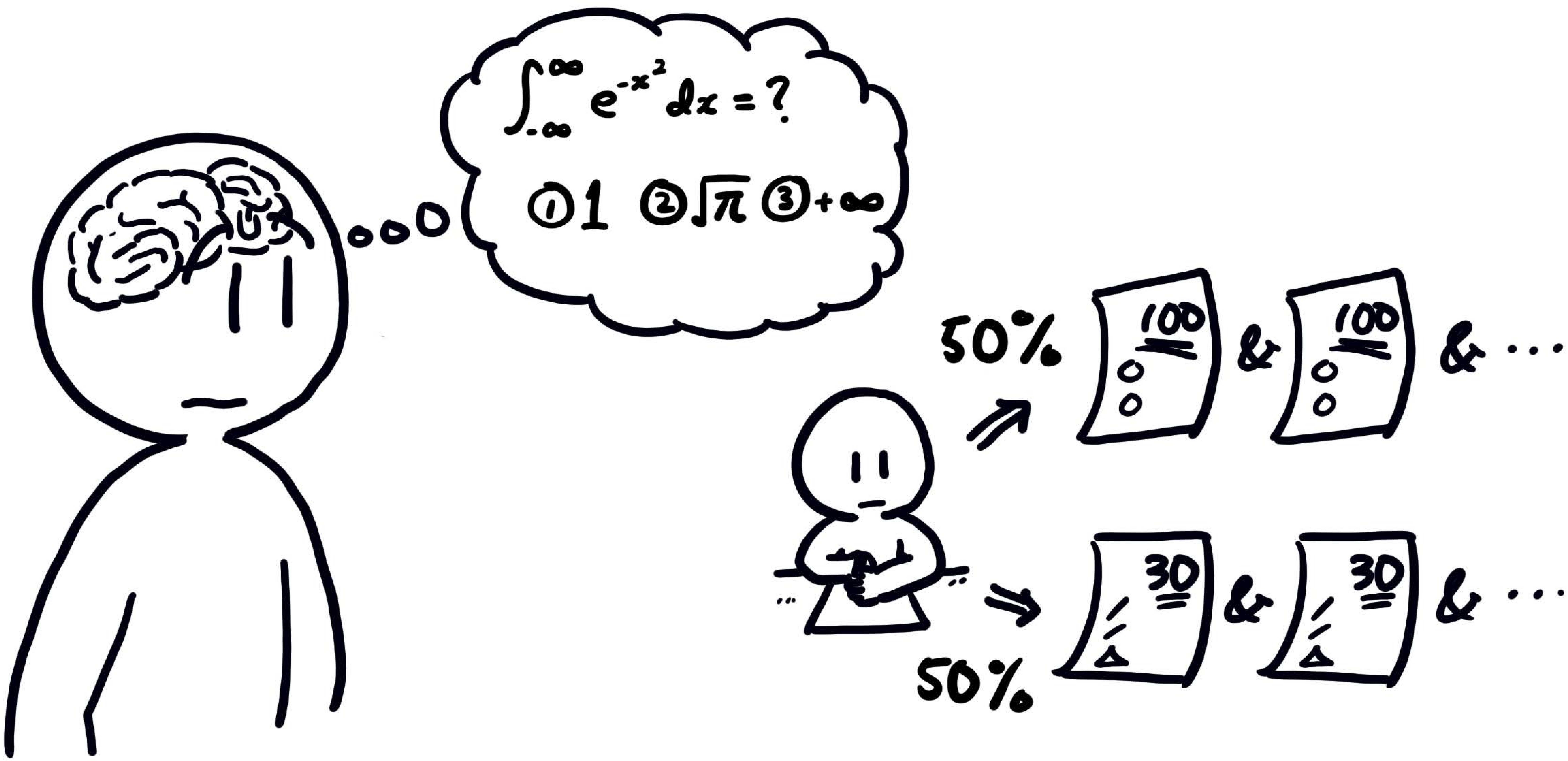
'동전을 n번 던져 나온 면의 조합' 사건을 생각하고 있는 겁니다.

이 '동전 n번 던지기' 결과를 기준으로 내기를 만들 수도 있습니다.



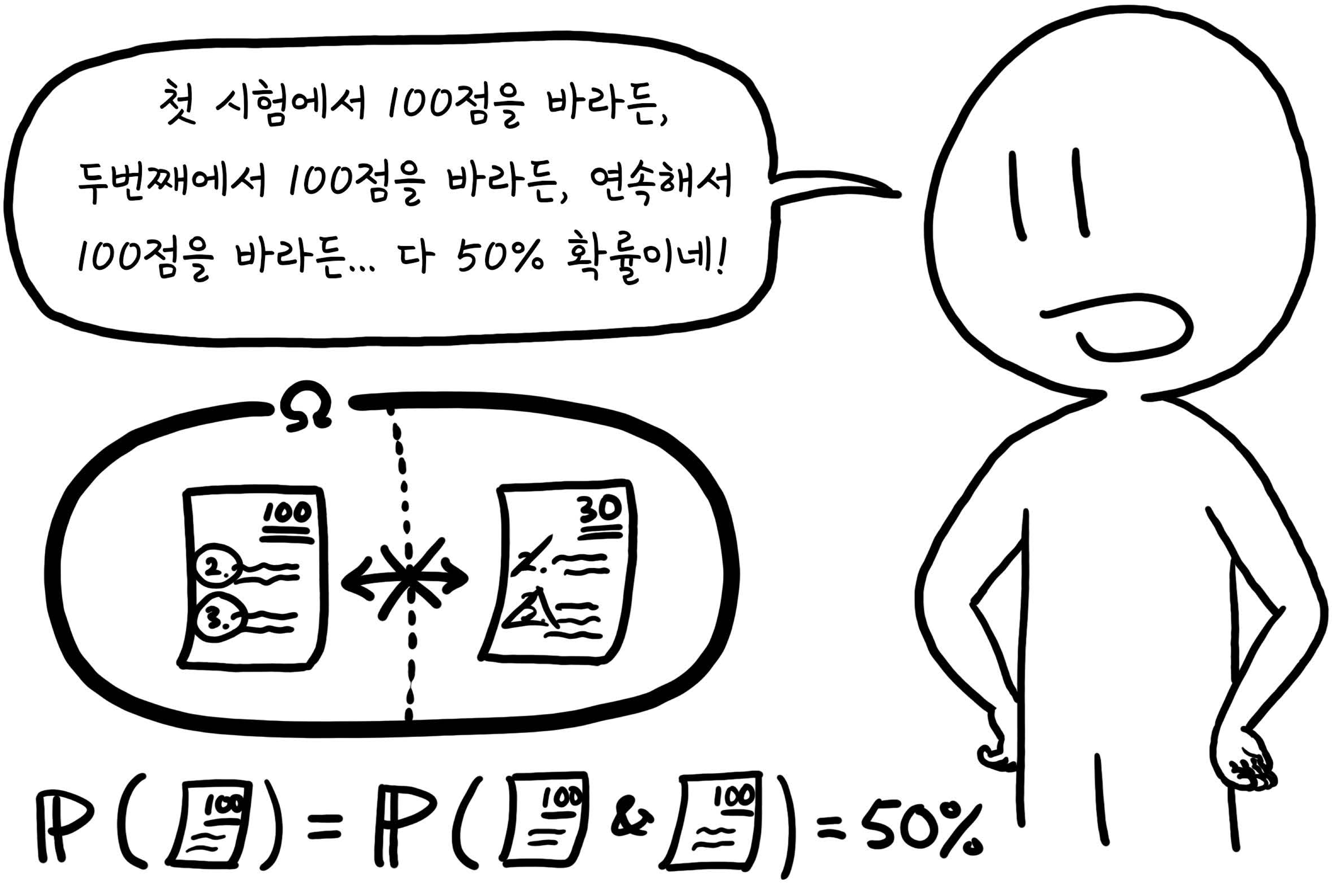

그런데 여기서 암묵적으로 가정한 게 하나 있네요.
각 면이 나올 확률을 그냥 곱해서 계산한 건데요,
100
50%
×50%
100 100
25%
×50%
100 백 원
25%

이건 모든 상황에 들어맞는 논리는 아니에요. 예를 들어 성적 분포가 100점 절반, 30점 절반으로 예상되는 시험을 반복해서 치른다고 생각해봅시다.

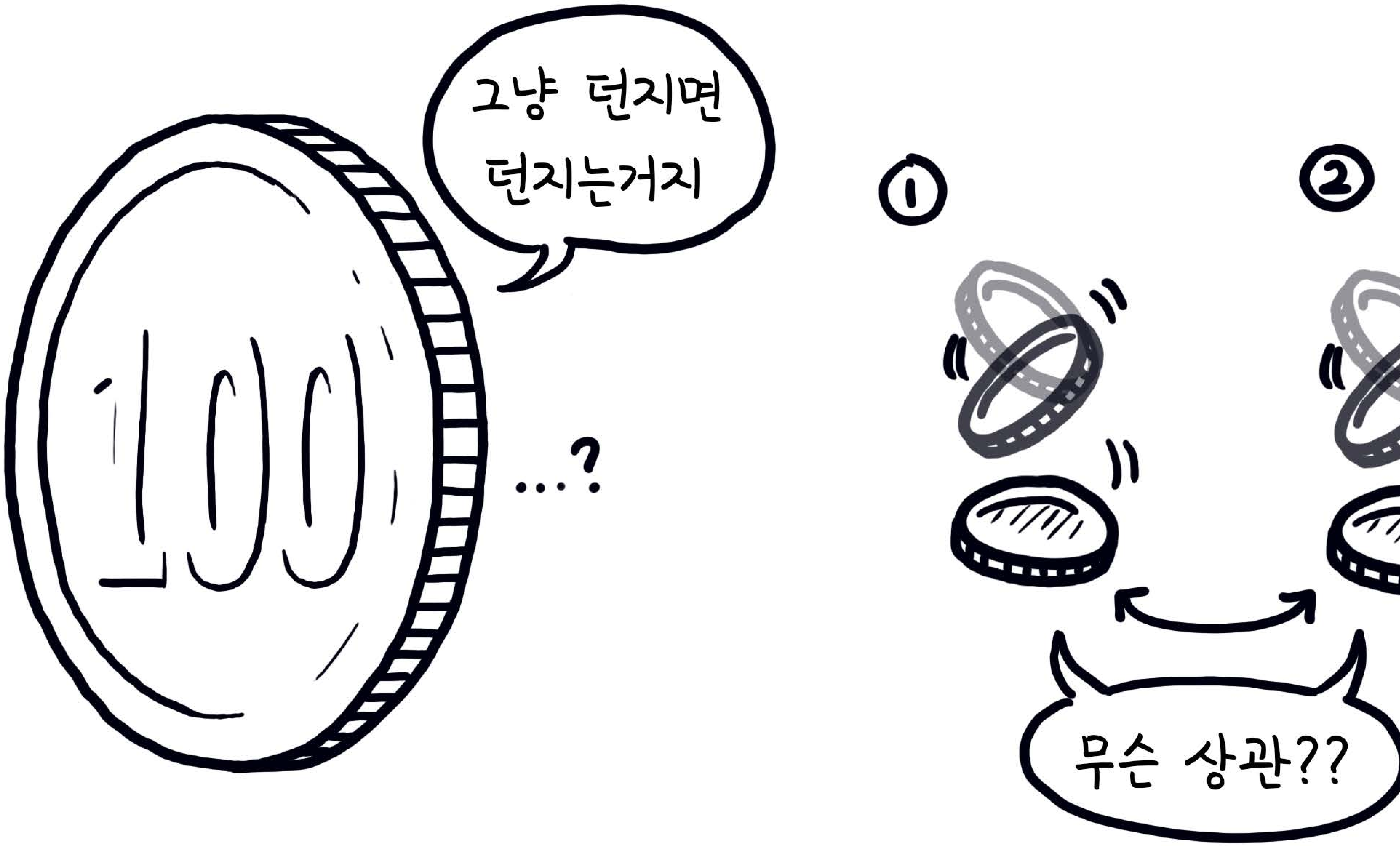


그럼 100점 맞던 사람은 계속 100점 맞고, 아니면 계속 아닐 수도 있잖아요.

그런 경우에는 재시험을 쳐봤자 달라지는 게 전혀 없겠죠?

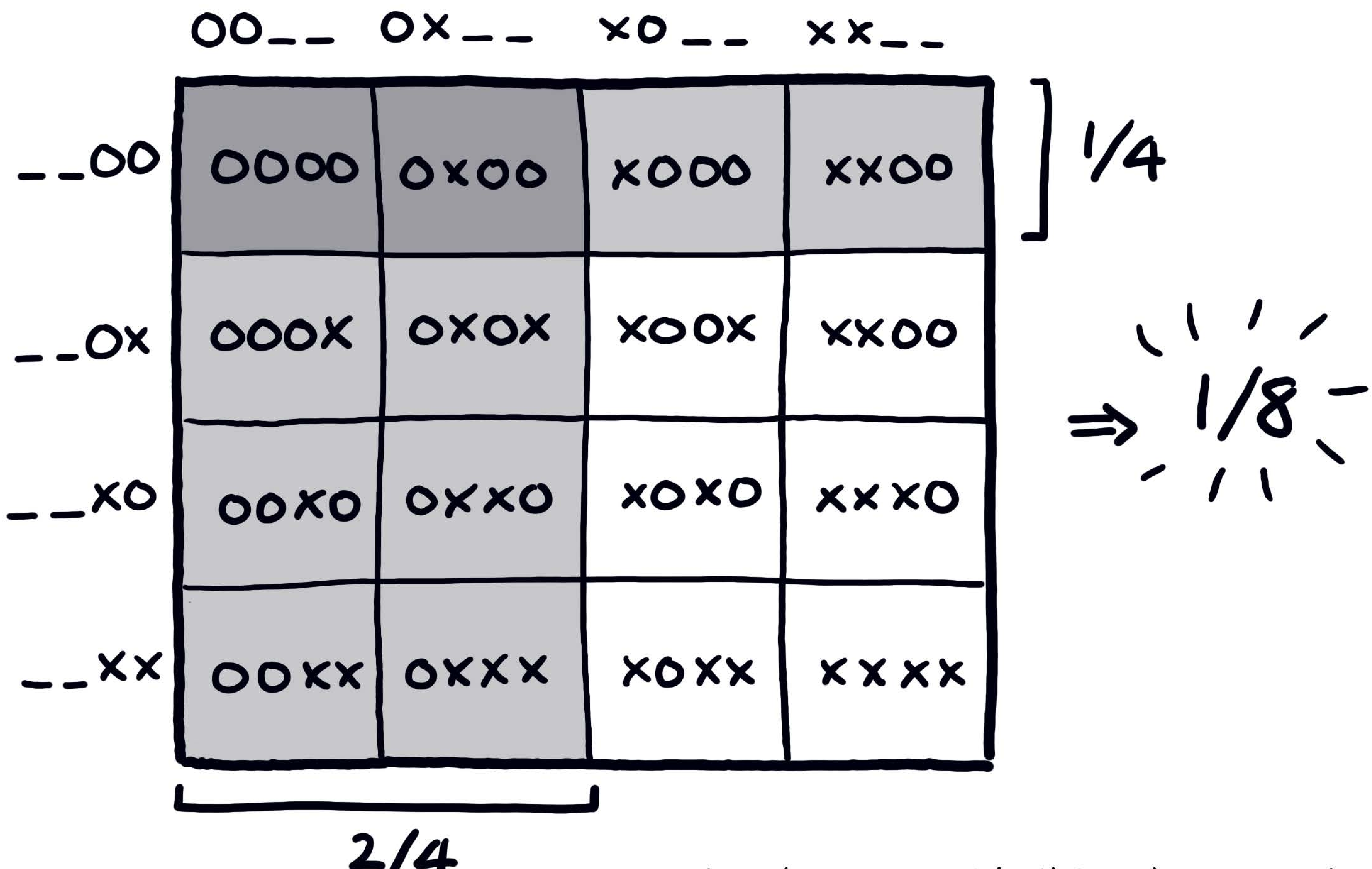


그러나 동전의 경우, 감각도 없고 기억도 없는 녀석이죠.

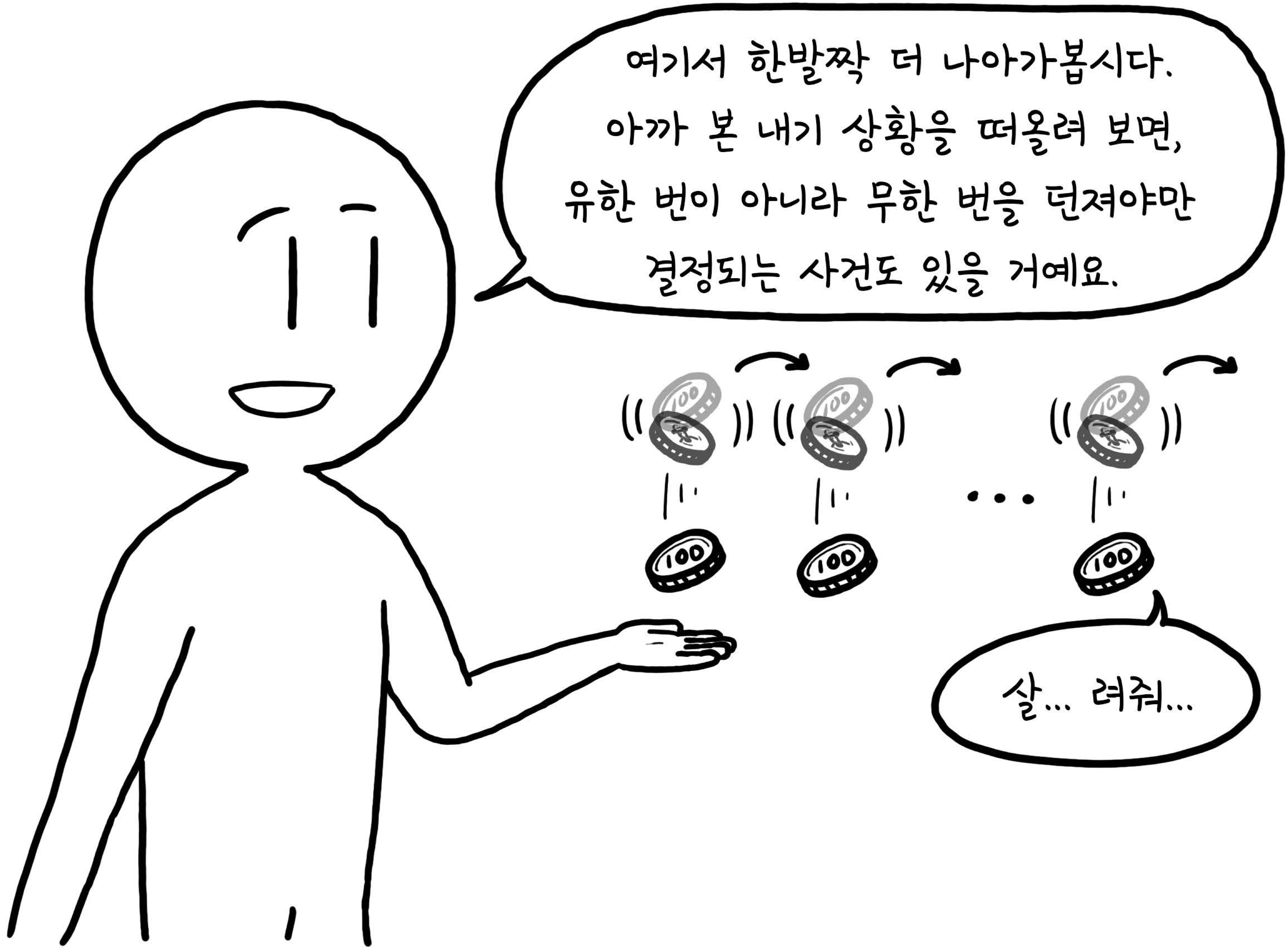


여러 번 던진 결과들 사이 관련성은 거의 없다고 봐도 되겠네요.

이럴 땐 교집합의 확률을 각 집합 확률의 곱으로 계산해도 됩니다.



이게 바로 '사건의 독립성'을 정의하는 방식입니다.

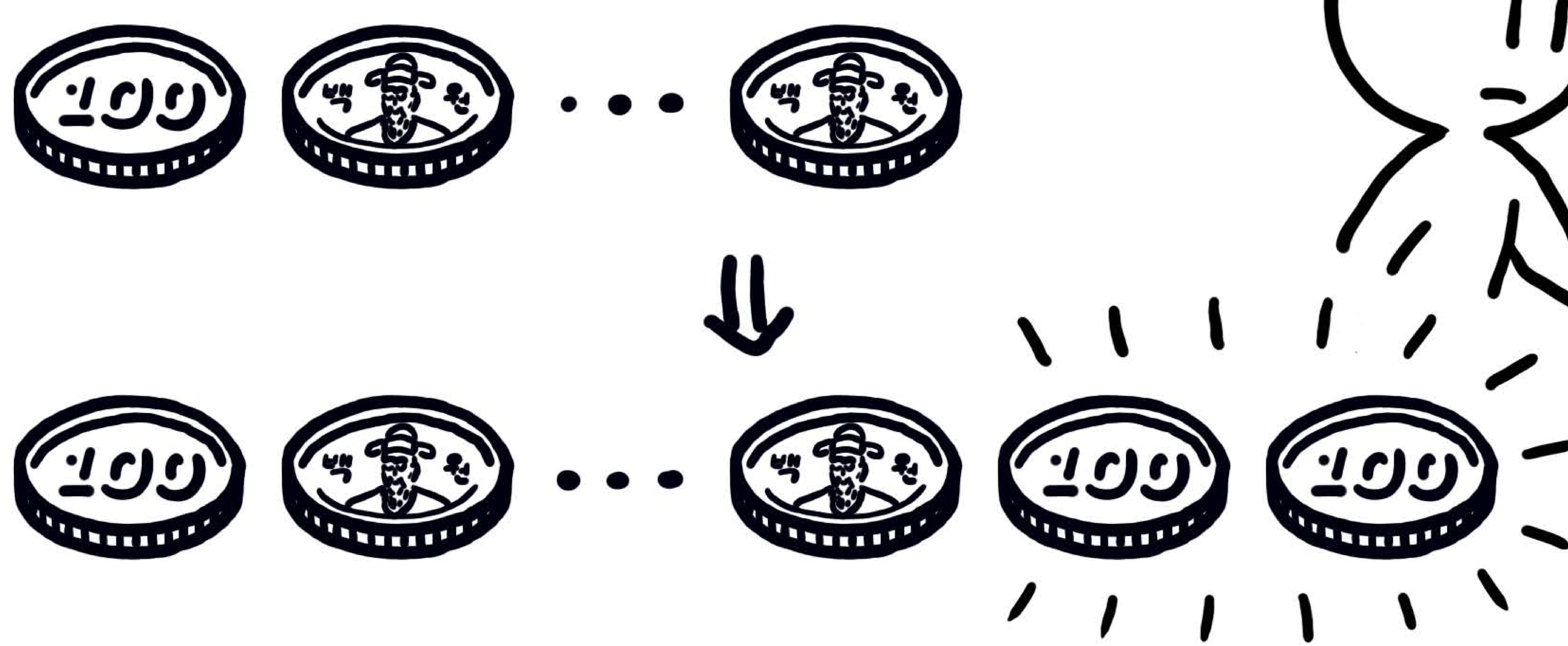

여기서 한발짝 더 나아가봅시다. 아까 본 내기 상황을 떠올려 보면, 유한 번이 아니라 무한 번을 던져야만 결정되는 사건도 있을 거예요.
100
살... 려줘...

예를 들어 다음과 같은 내기를 했다고 하면...

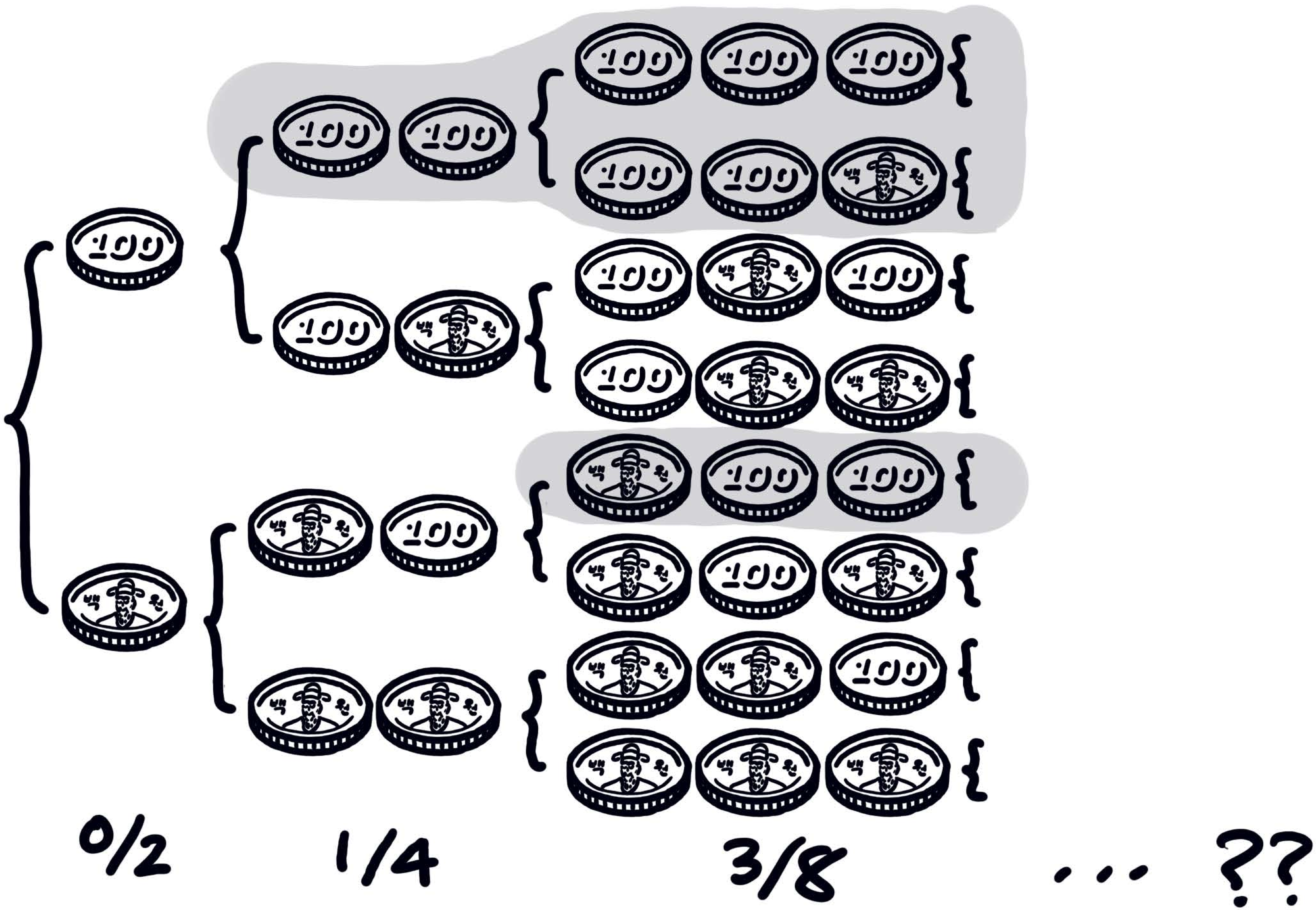
"연속으로 100 두 번 나오면 돈 드립니다!"

얼핏 보기에는 해당 안 하는 듯한 케이스여도

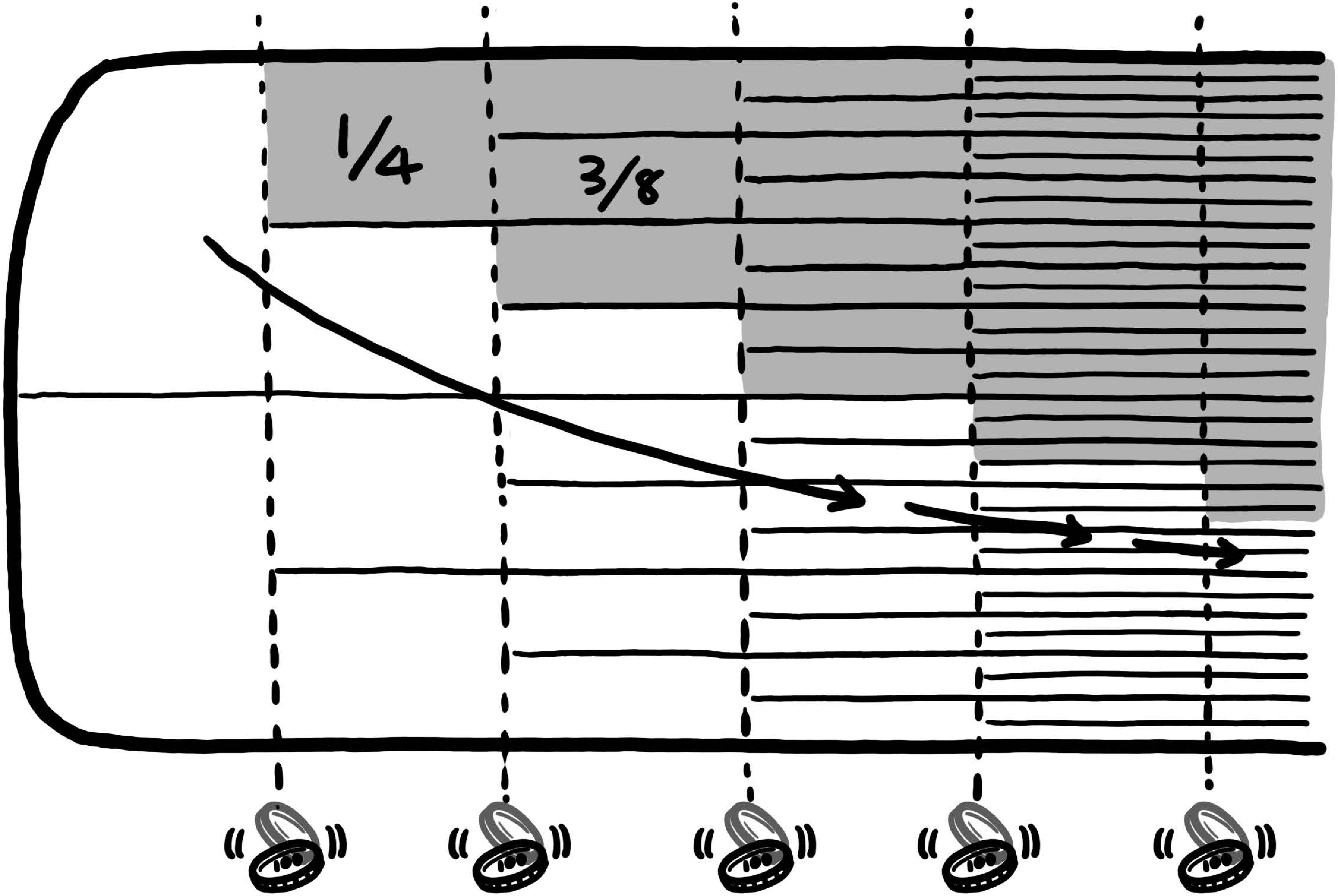
나중까지 기다려 보면 앞면이 나올지도 모르죠.



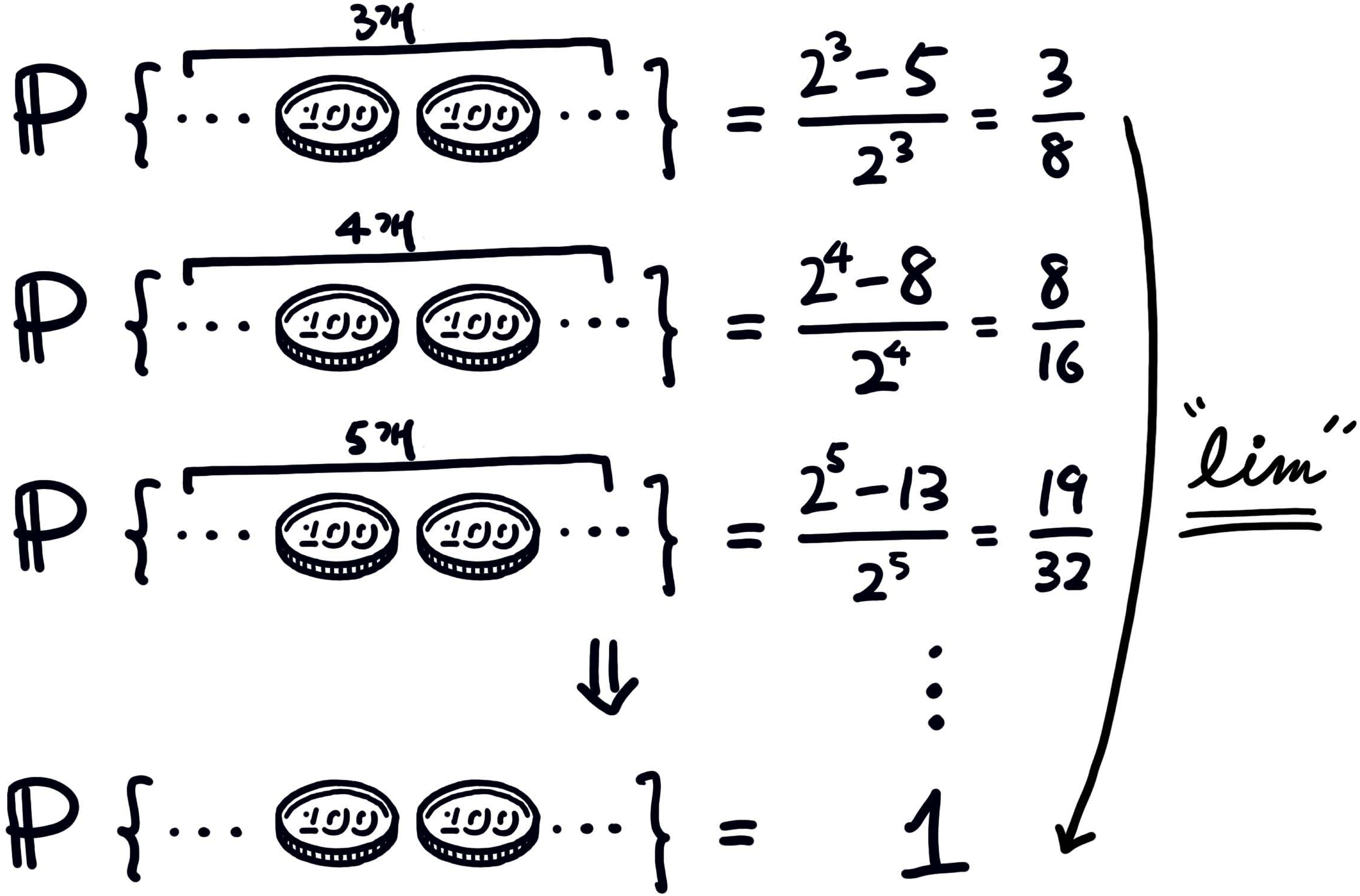
그러니 유한 스텝에서 그치지 말고 전체 스텝을 다 훑으면서 확률을 파악해 나가야겠죠.



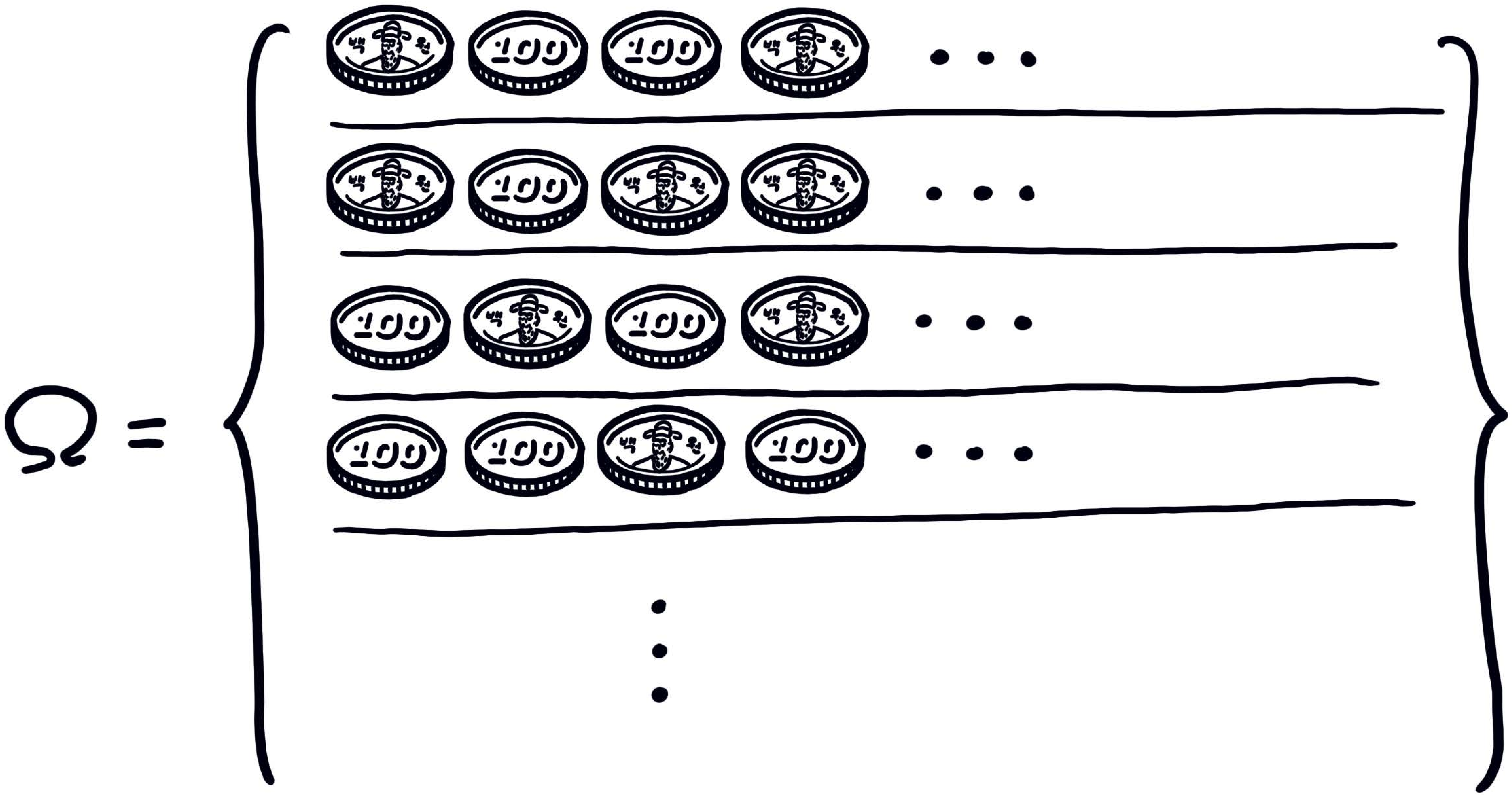
그러면 이렇게 커져 가는 확률의 '극한'이 궁극적인 확률이겠군요.



이에 따라 '앞면 두번 연속할 확률'이 1이라는 계산이 나오죠.

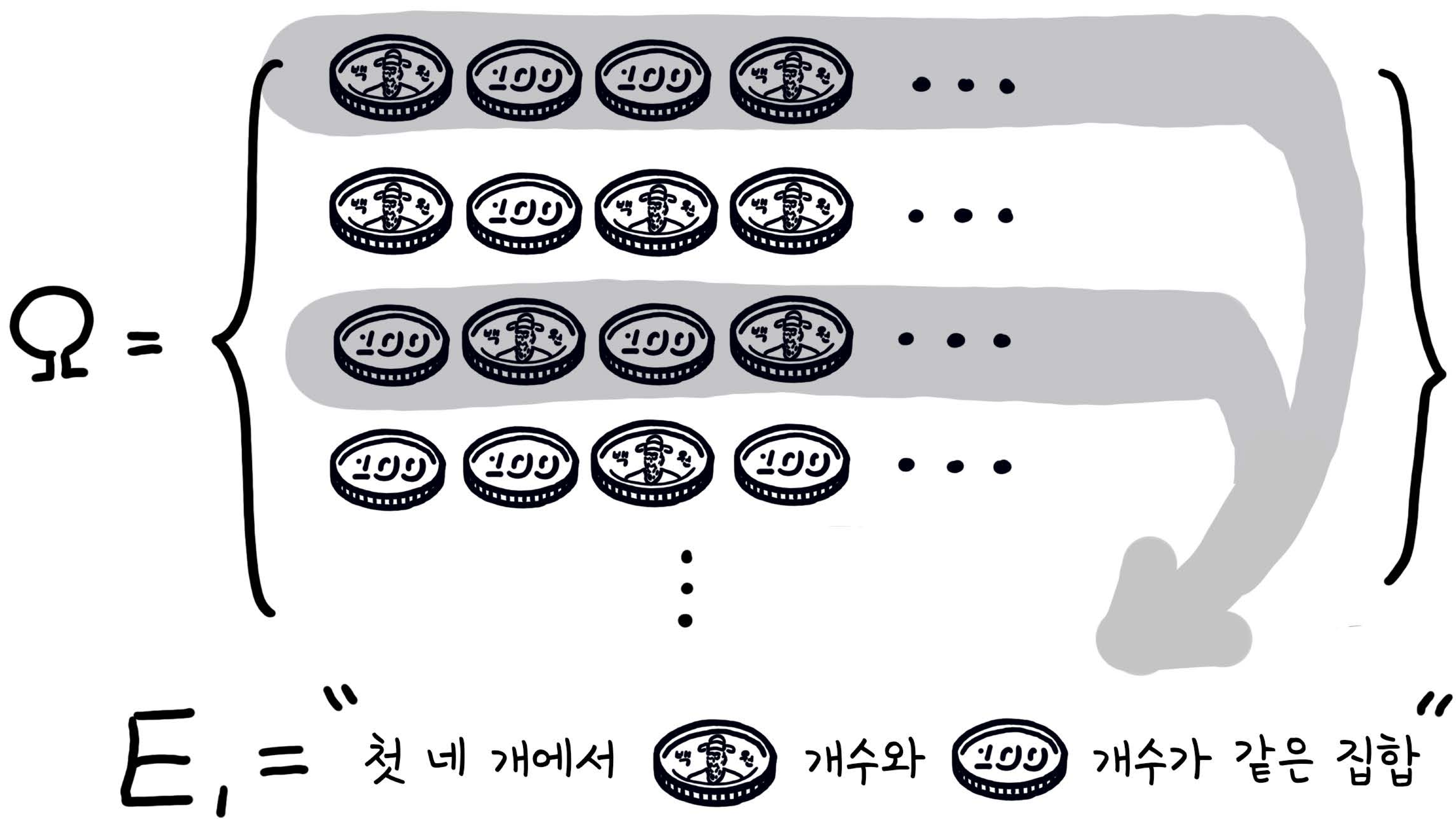


방금 얘기를 정리해 봅시다. 먼저 우리 논의의 무대는,



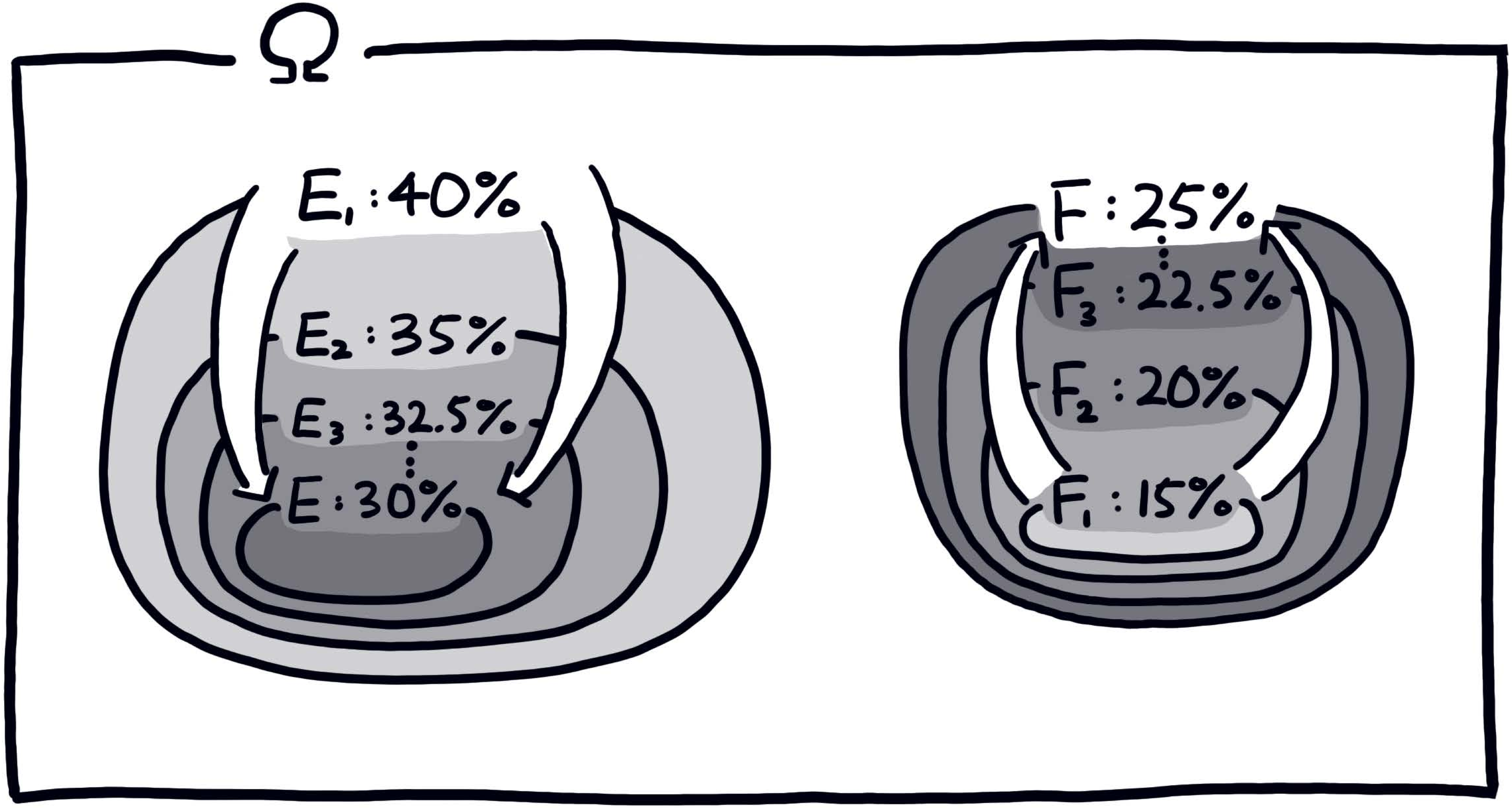
'가능한 모든 동전 면의 나열'들을 모아둔 공간이에요.

이 공간에서 '확률을 논할 수 있는' 집합에는 어떤 게 있을까요?



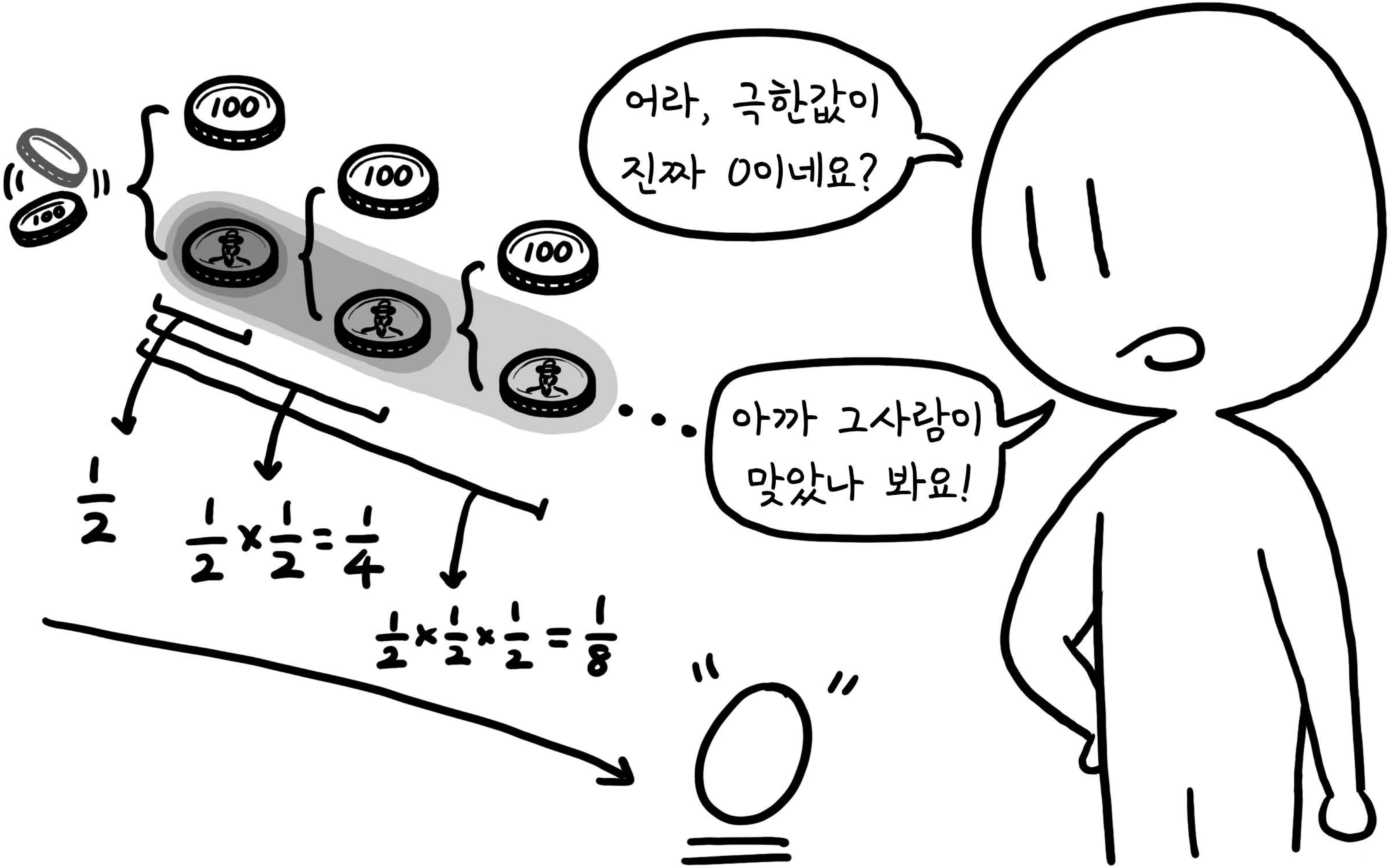
일단 '슬롯 유한 개에 조건이 걸린' 집합에는 쉽게 확률을 줄 수 있겠죠.

또한, 확률값을 아는 집합들로 '근사'되는 집합에도 확률값을 줄 수 있죠.

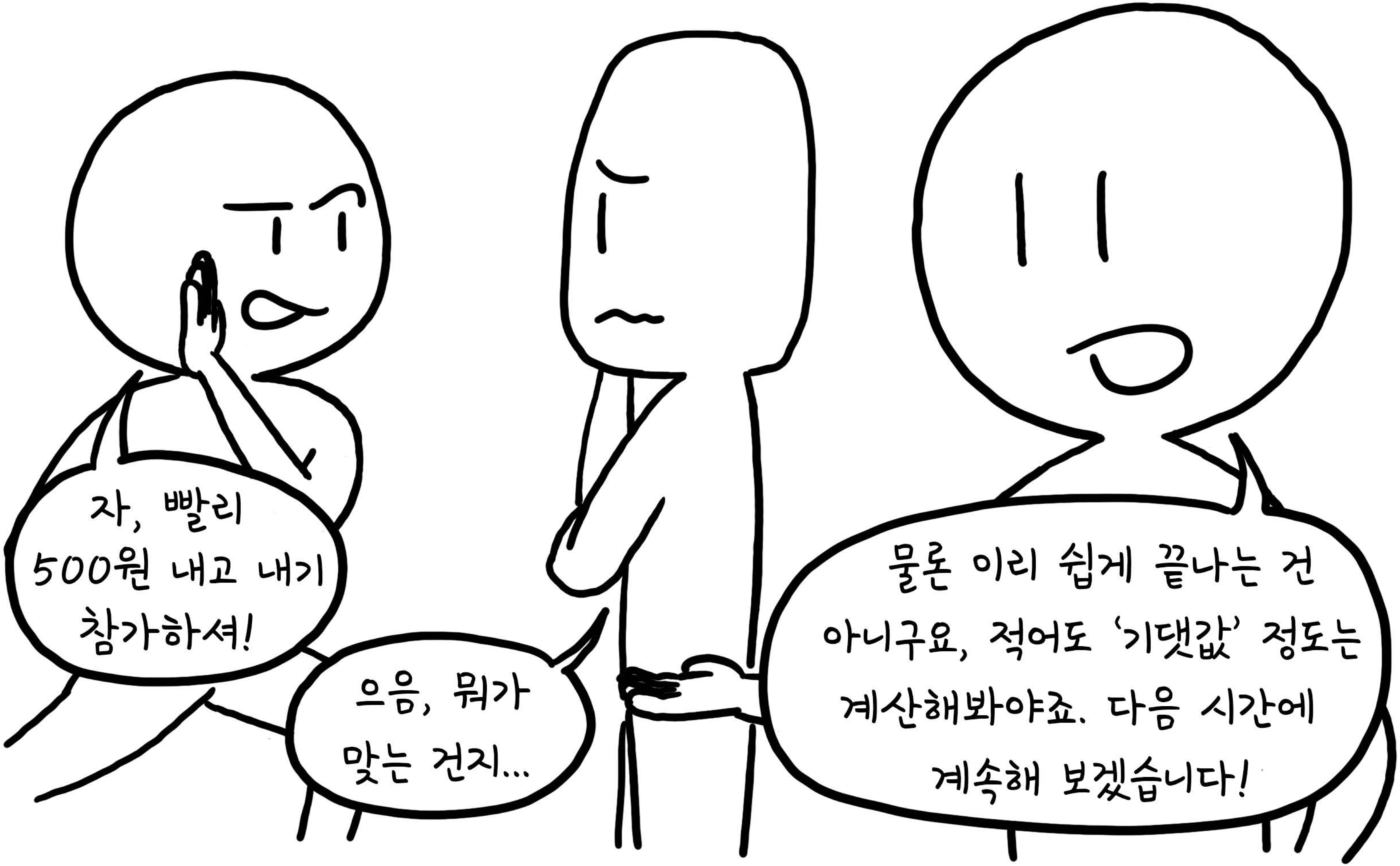


그런 집합들로 근사되는 집합에도, 또 그런 집합들로 근사되는 집합에도요.

그러면 이 규칙에 맞춰서 아까 나온 사건 확률을 계산해 볼까요?



으음, 그러면 저 내기꾼 말을 들어야 하는 걸까요...?



<참고문헌>

이번에는 역사 관련 책은 다 빼고
개념 관련 서적만 집어넣었습니다!

- S. I. Resnick, A Proabability Path. 2014, Birkhäuser.
- R. Durrett, Probability-Theory and Examples. (4th ed.) 2010, Cambridge University Press.
- W. Rudin, Real and Complex Analysis. (3rd ed.) 1987, McGraw Hill.
- R. M. Dudley, Real Analysis and Probability. (2nd ed.) 2010, Cambridge University Press.