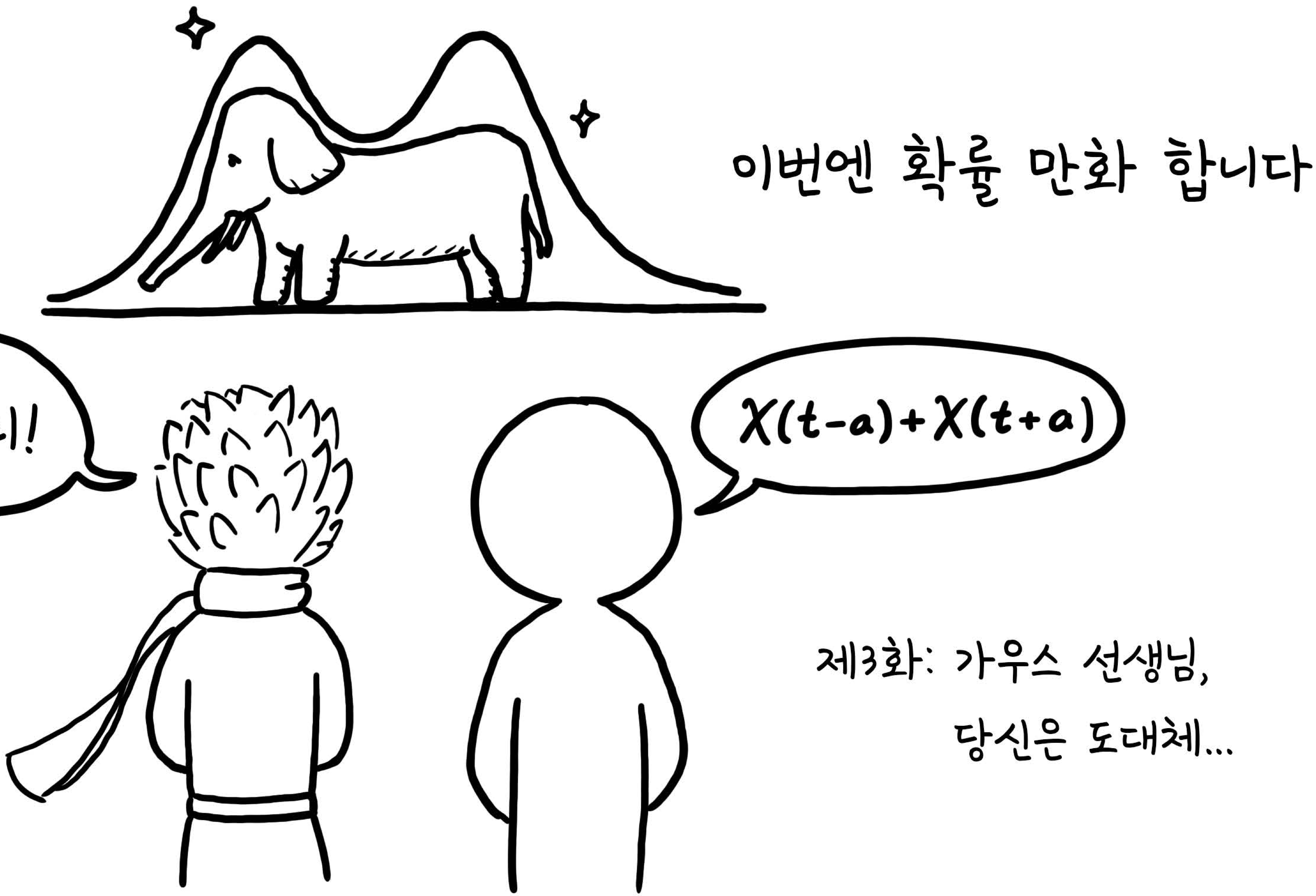
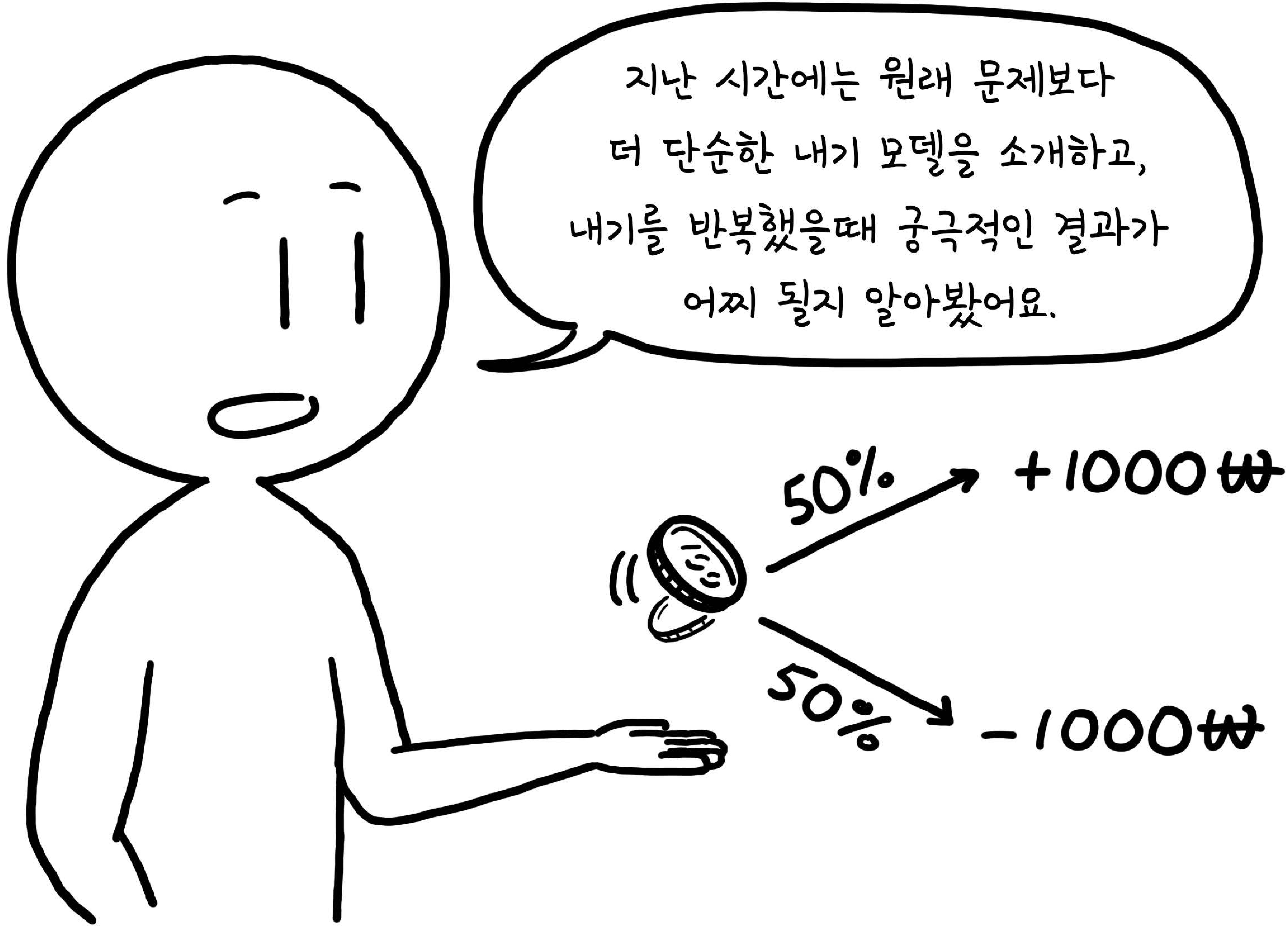
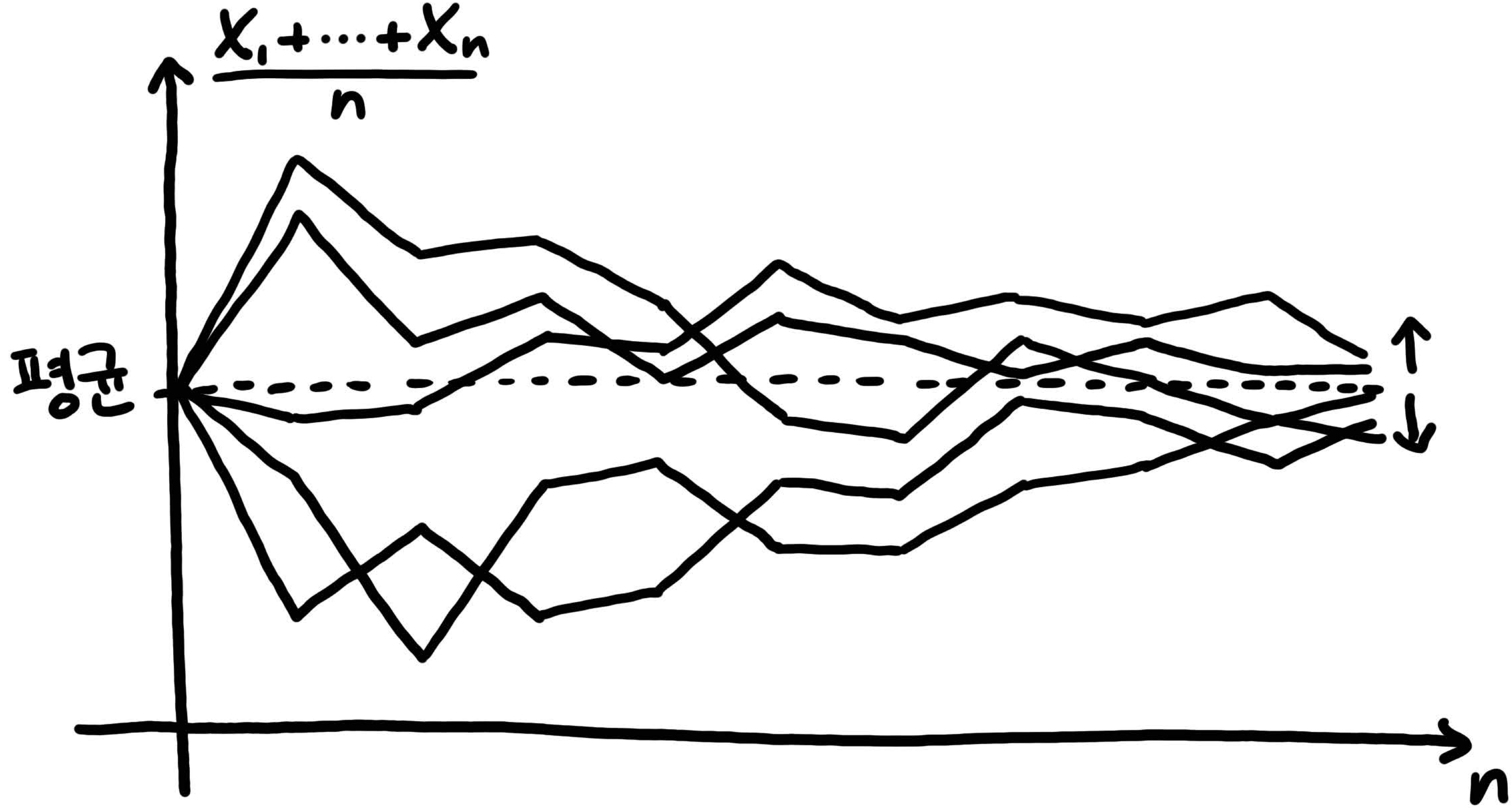

이번엔 확률 만화 합니다
코끼리!
X(t-a)+X(t+a)
제3화: 가우스 선생님,
당신은 도대체...


지난 시간에는 원래 문제보다 더 단순한 내기 모델을 소개하고, 내기를 반복했을때 궁극적인 결과가 어찌 될지 알아봤어요.
50%
+1000₩
50%
-1000₩

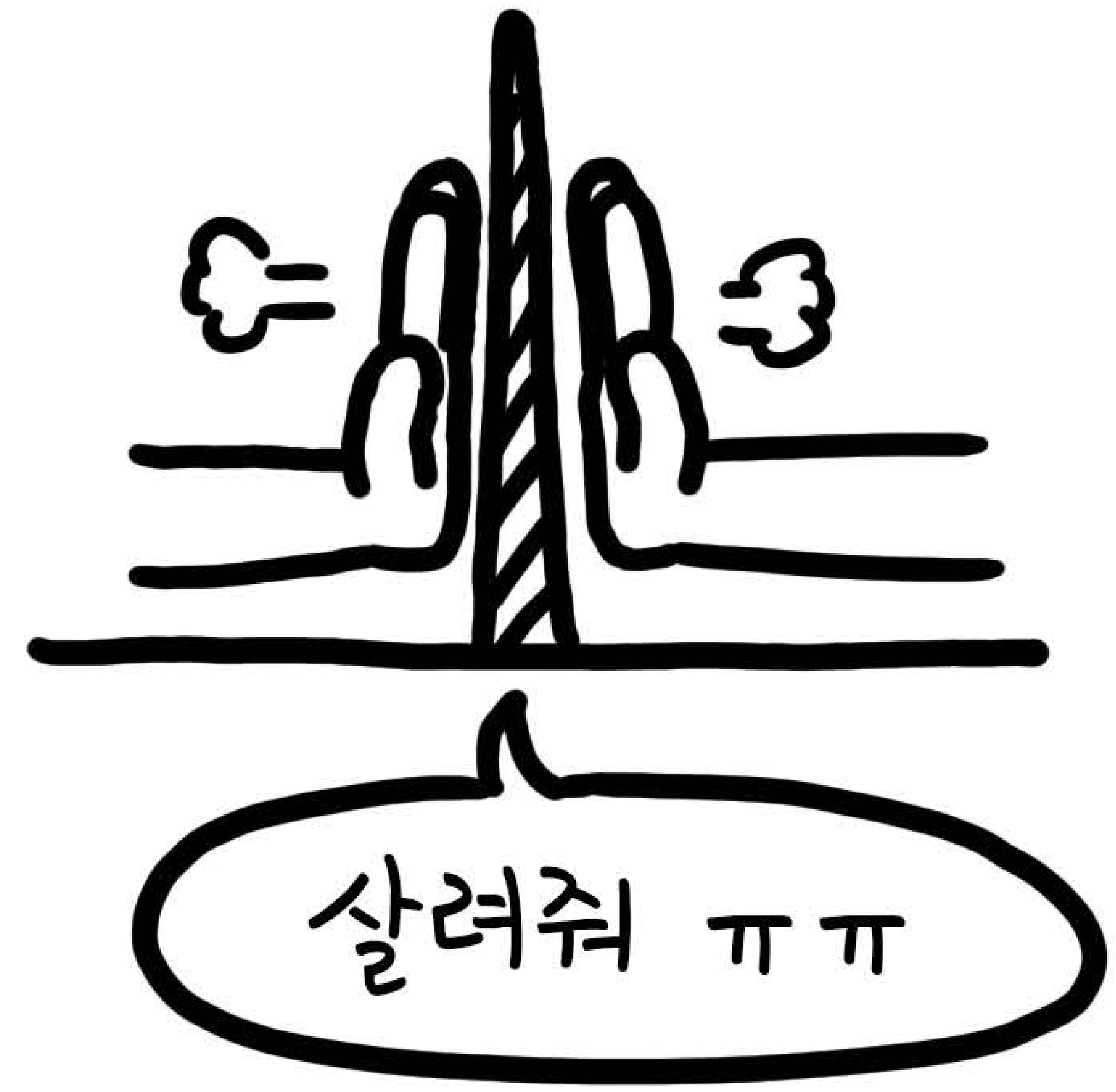
평균값이 잘 정의되는 확률 분포를 계속 더해 나가면,



샘플의 평균도 '거의 확실히' 그 값으로 수렴한다는 법칙이었죠.

하지만 이건 정보를 납작하게 합쳐 버렸다는 느낌이 조금 들죠.

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \Longrightarrow$$

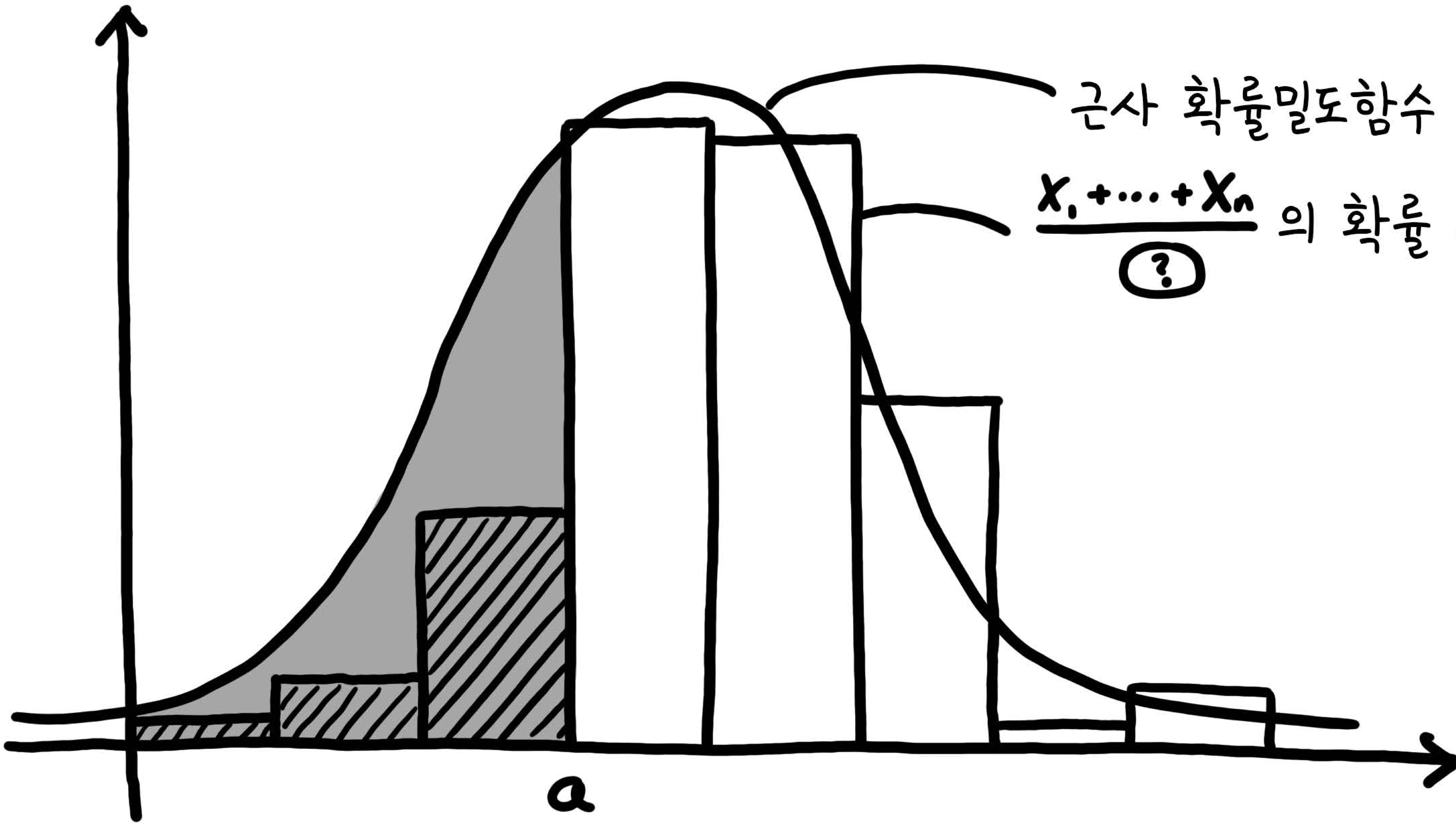


$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{?} \Longrightarrow$$

이것보다는 조금 더 정보를 살리는 극한 과정을 보고 싶은데요,

그래야 반복된 내기 결과에 대한 확률값을 어림할 수 있어

구체적인 계산에 도움이 될 테니까요.



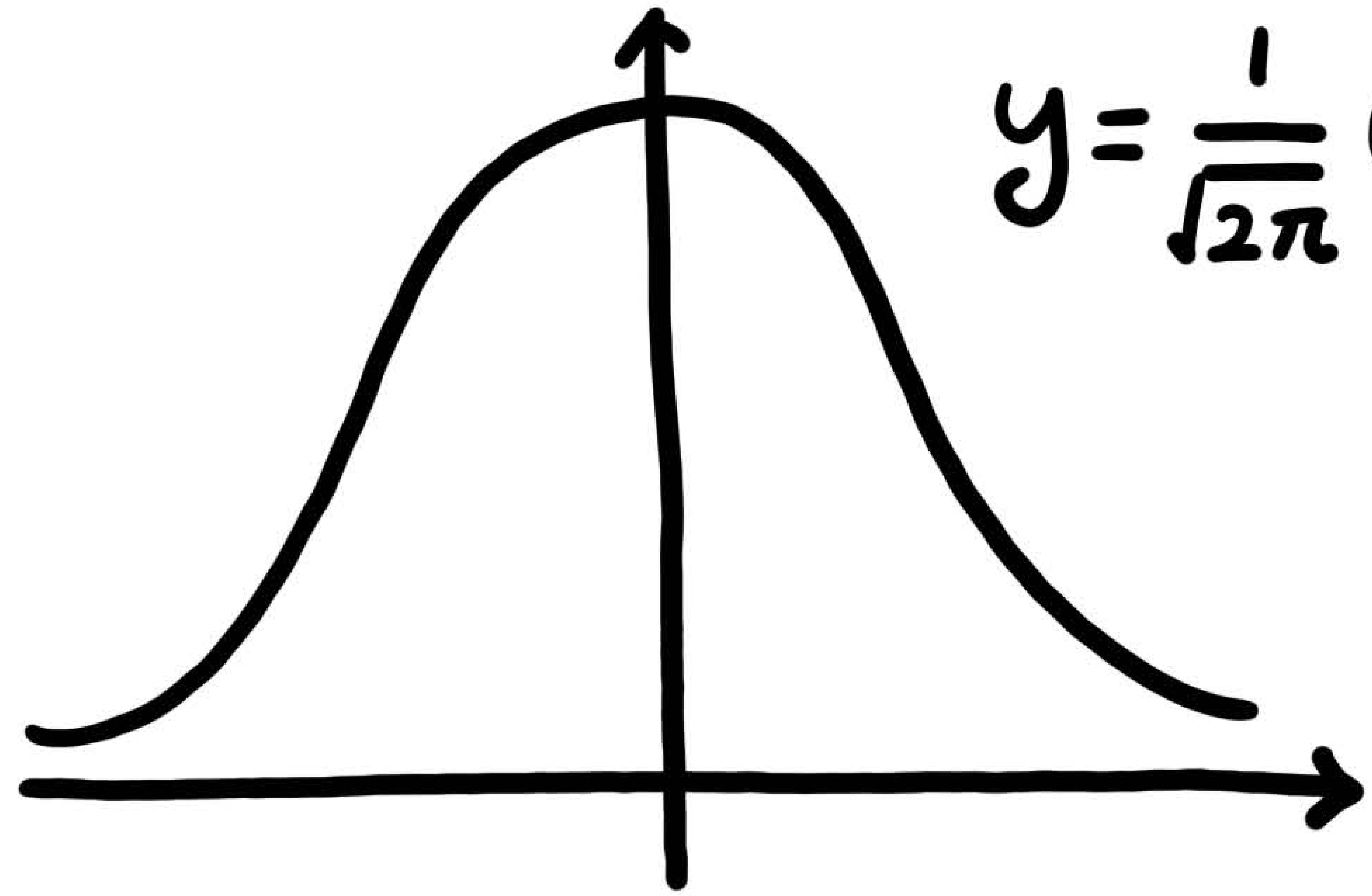

여기서 근사값을 주는 분포는
사실 우리가 이미 경험해 본
익숙한 함수 모양인데요,
??

예를 들어 레이저에서 나오는 광선의 형태를 기술하거나,

이미지를 흐릿하게 만드는 필터에서도 나타나는 녀석이죠.

바로 칼 프리드리히 가우스(Carl Friedrich Gauß)의

이름을 딴 가우시안 분포입니다.

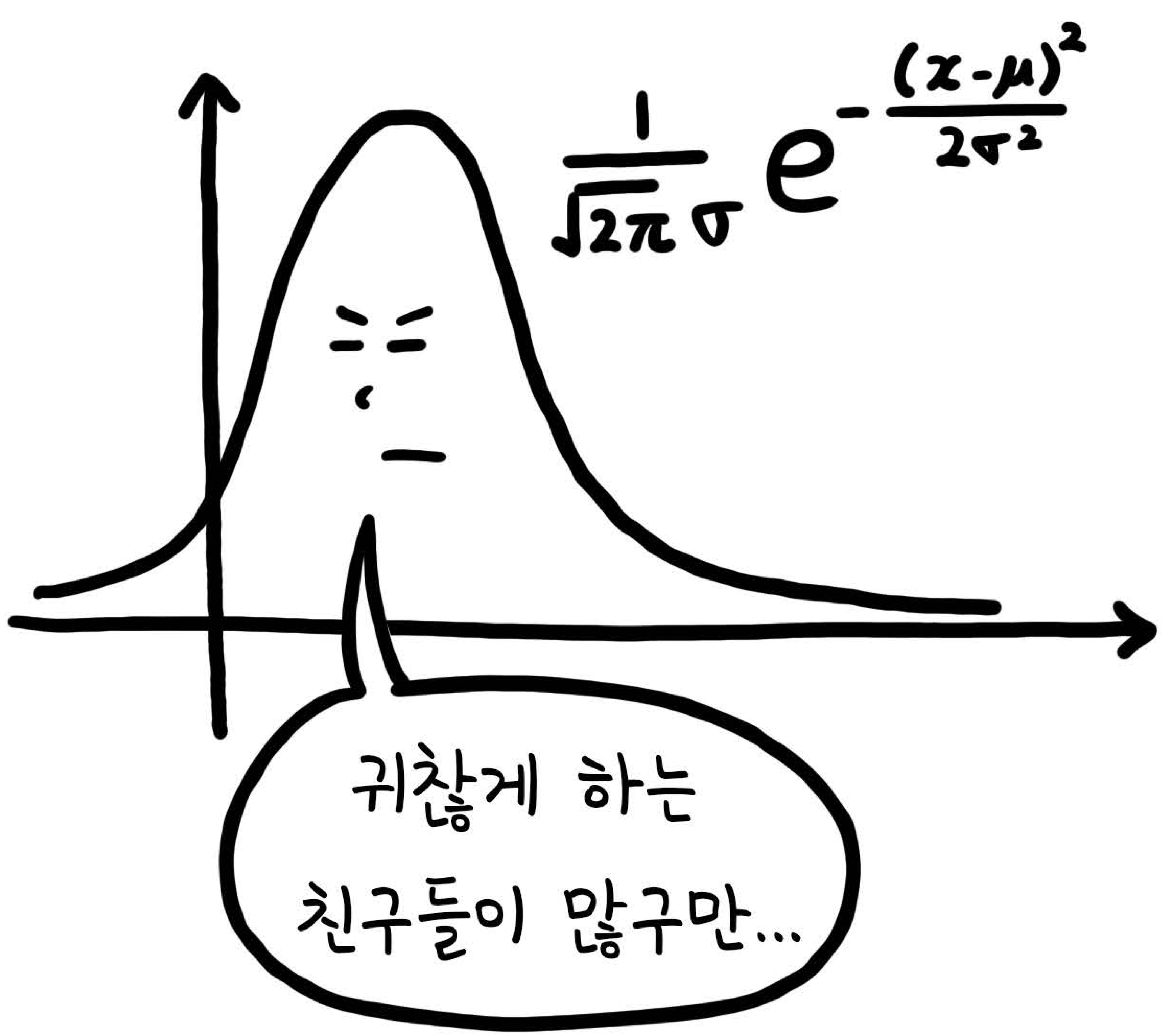


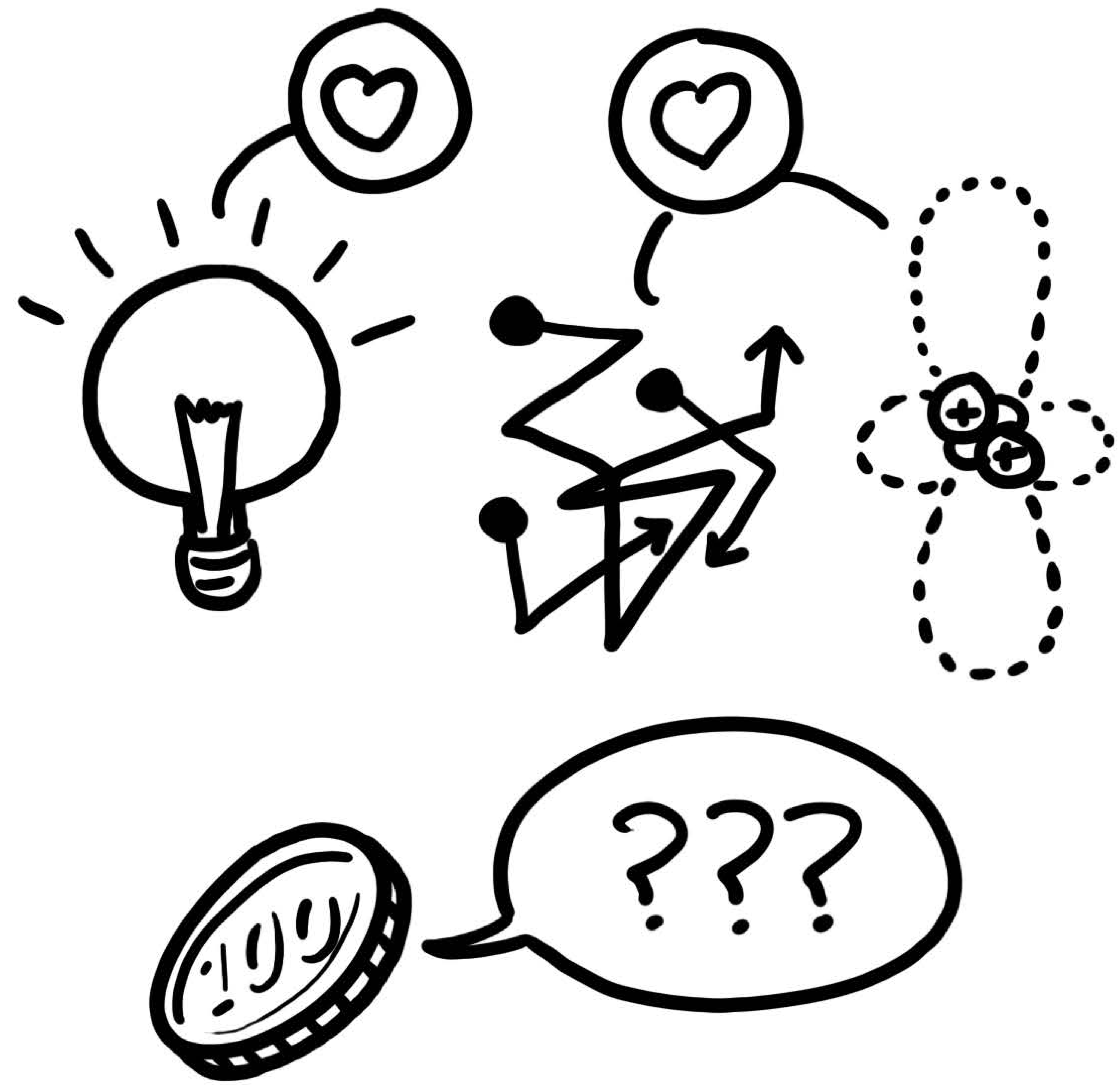
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

식이 조금 복잡하게 생겼죠...

사실 이 함수는 식도 복잡하고 다루기도 까다로운 녀석인데,

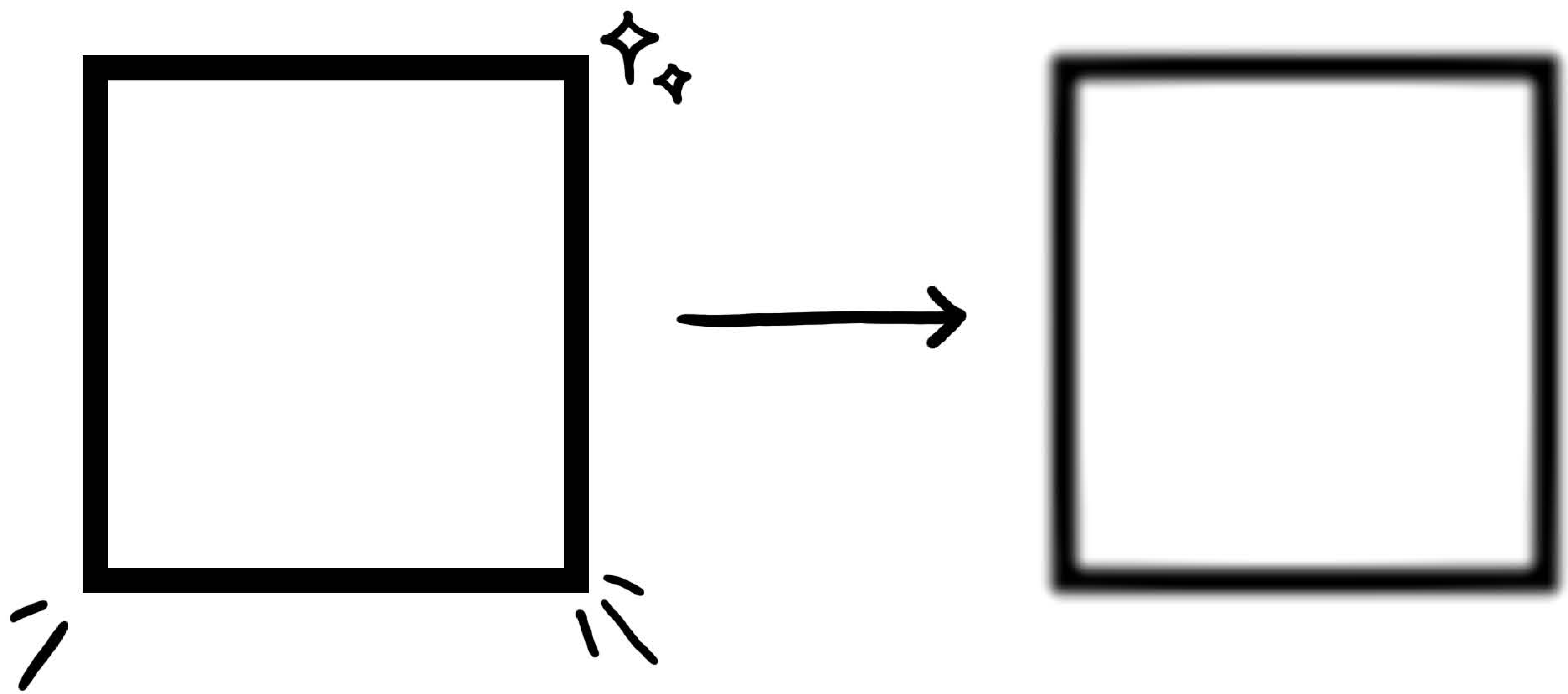
온갖 자연현상들이 이 녀석을 편애하는 것은 물론이고,





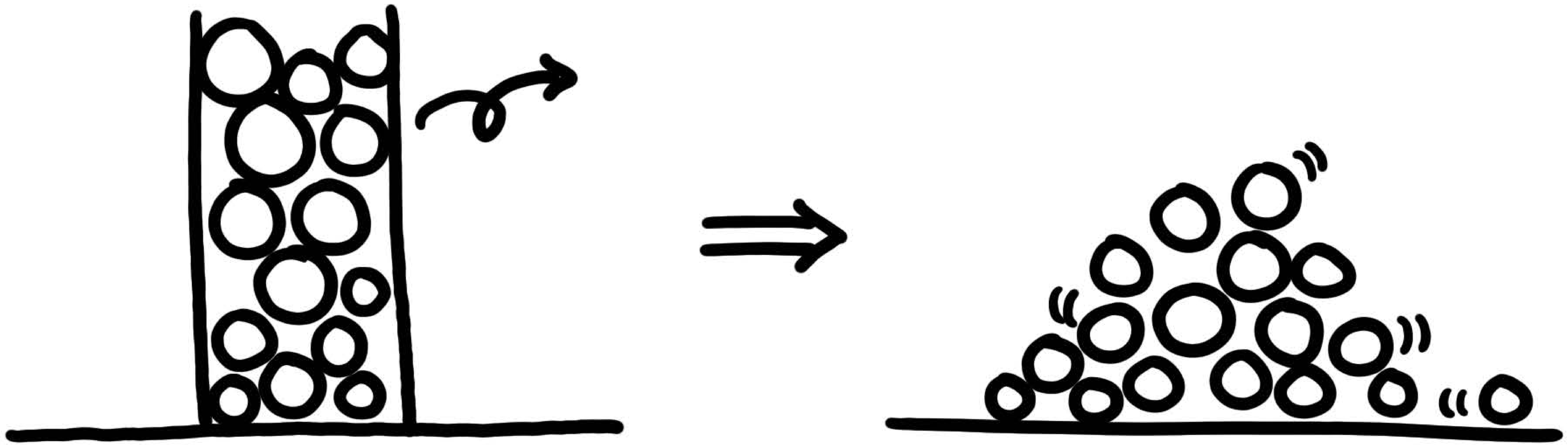
확률론에서마저 중요하다고 하네요. 그 이유가 뭘까요?

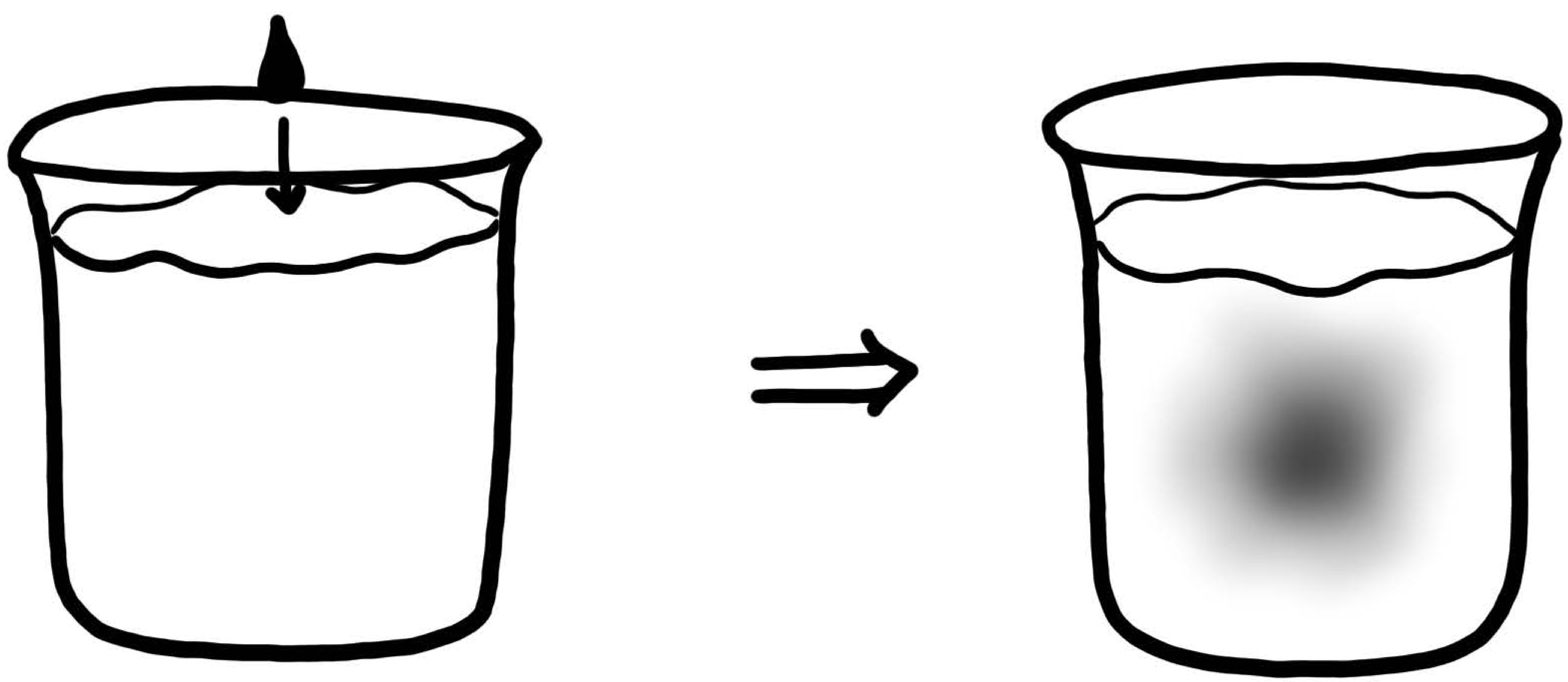
가우시안 분포가 등장하는 상황들 중에는 다음과 같이
'불확실성'이 수반되는 경우가 종종 있습니다.



딱 맞아떨어지던 각도나 직선이 흐릿해진다던지 말이죠.

이런 불확실성은 거시적인 구조가 안정하지 않기에 생겨날 수도 있고,

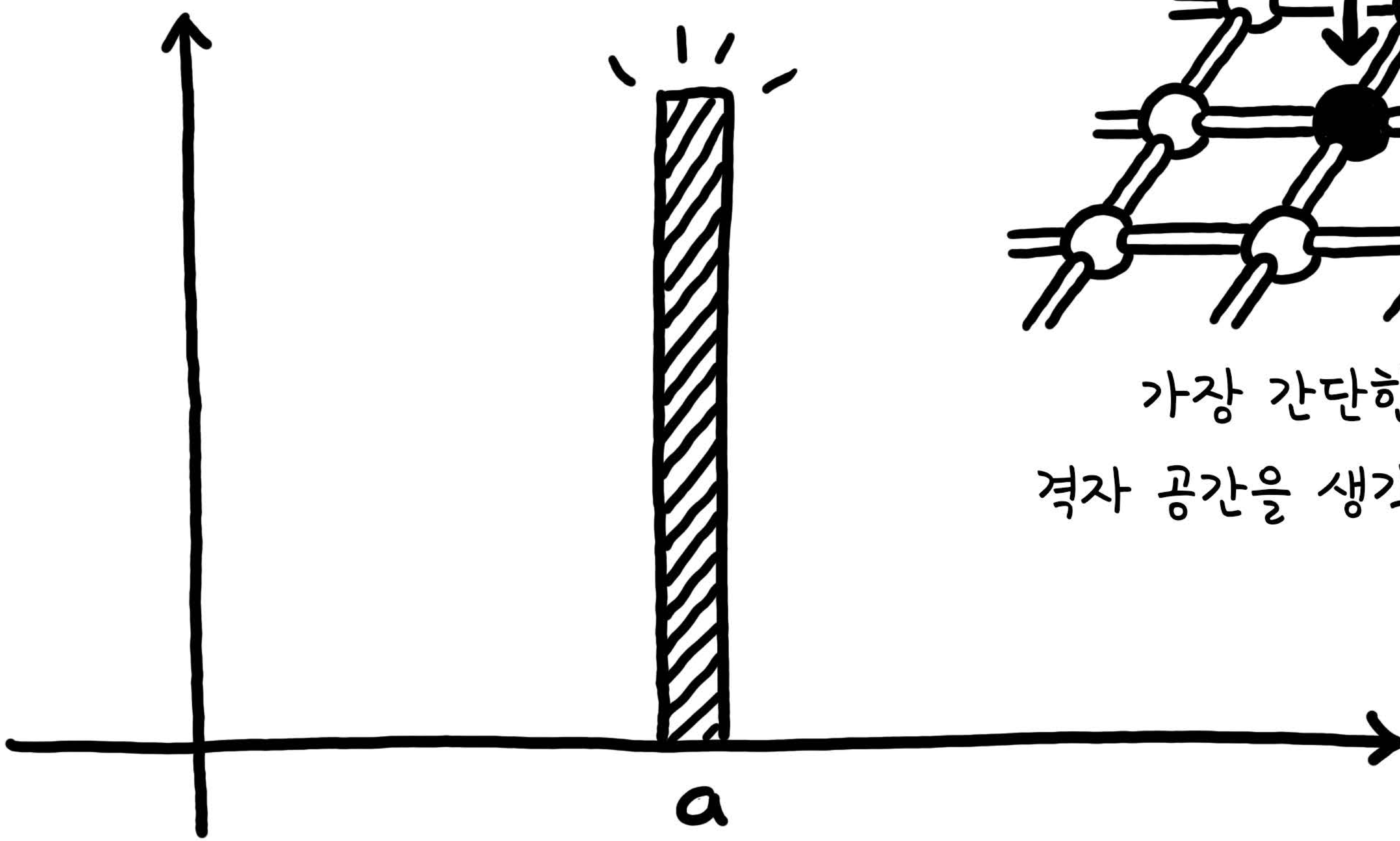


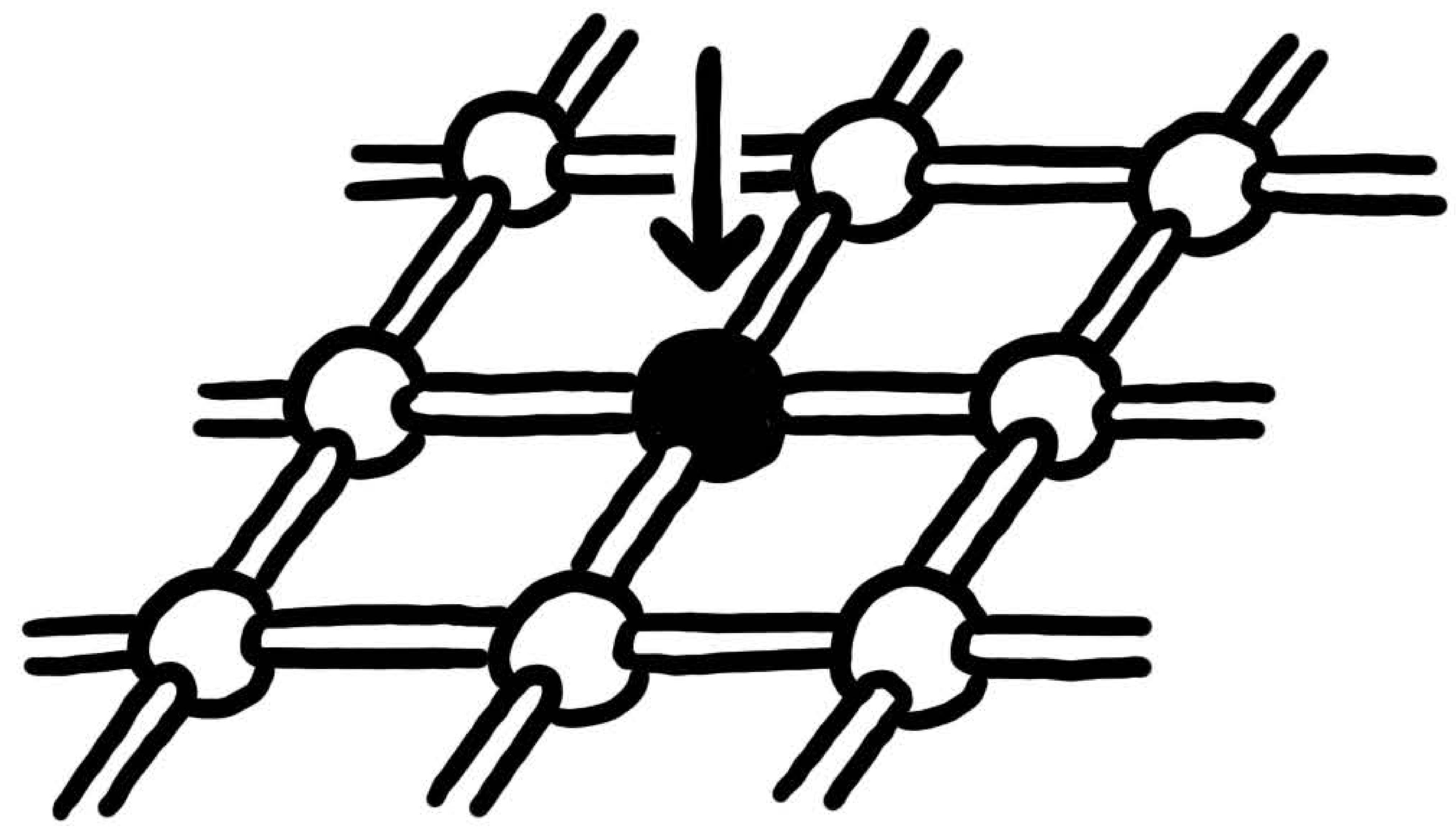


미시적인 열적 요동 때문에 생겨날 수도 있죠. (사실 서로 통하는 얘기지만요!)

이런 입자나 열의 **확산**이 '자연스럽게 퍼진 패턴'을 만드니,
확산의 메커니즘을 이해하면 도움이 되겠군요.

한번 분자의 입장이 되어 상상해 봅시다. 처음에는 특정 지점에 뭉쳐져 있었다고 가정하구요.

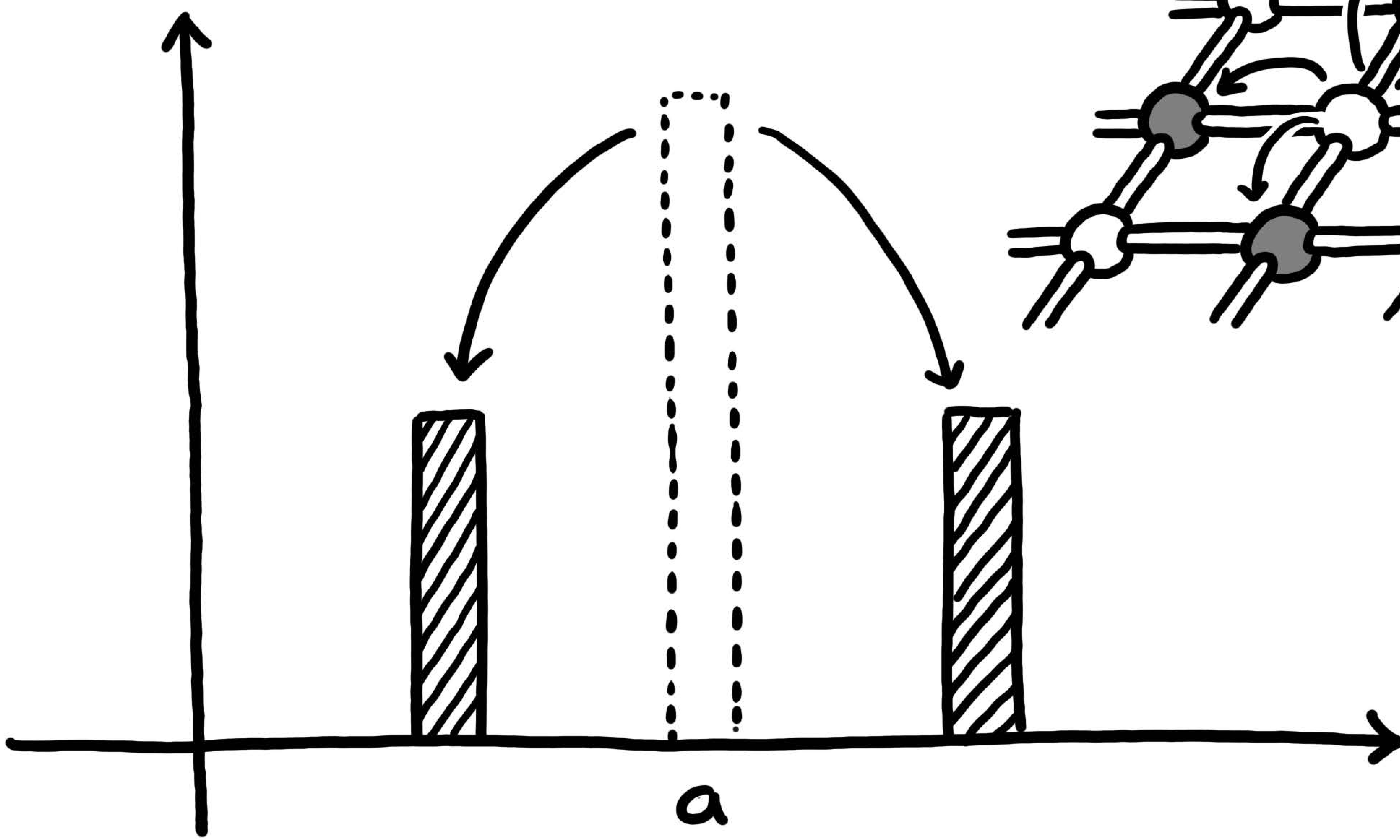


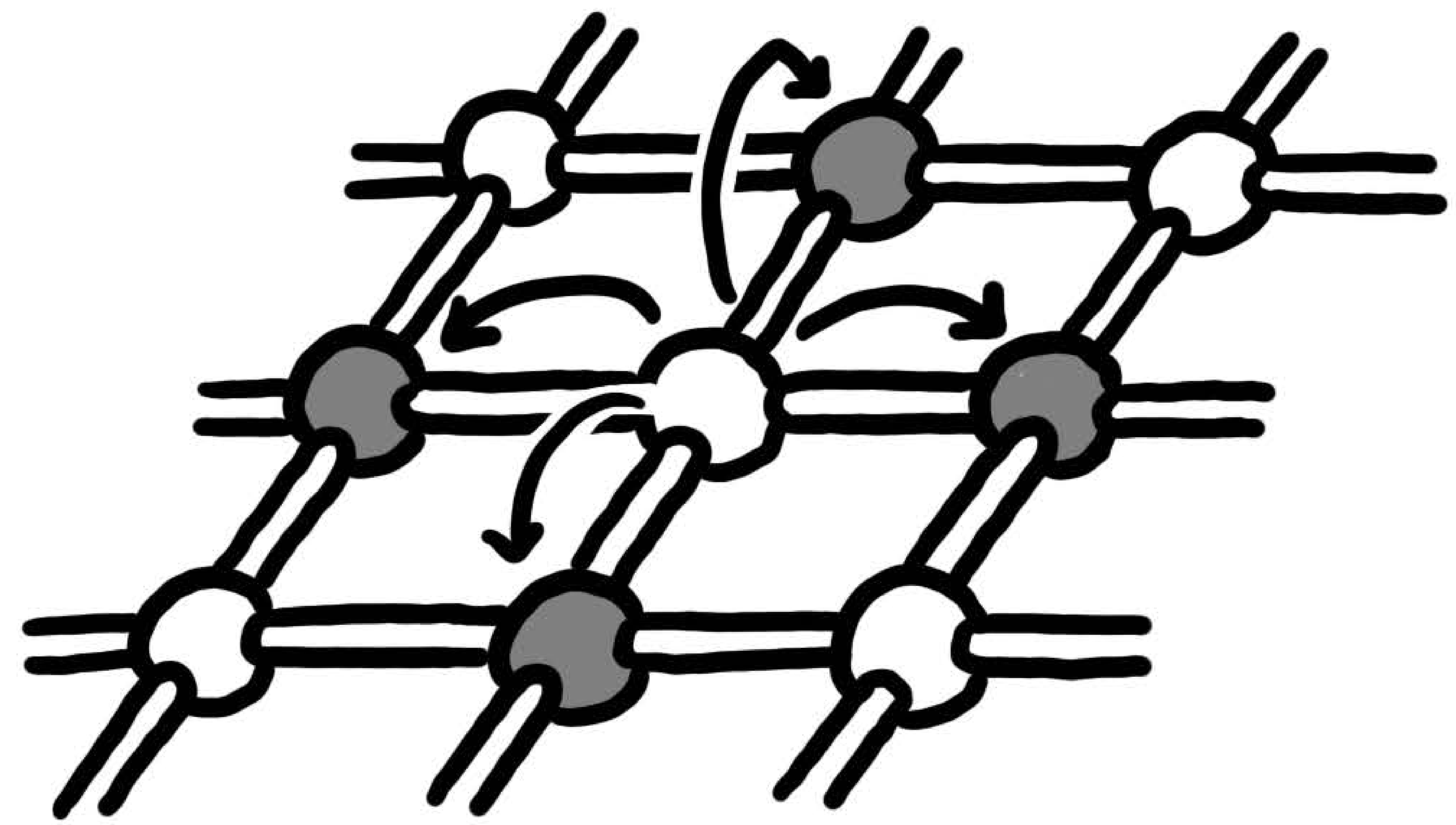


가장 간단한 모델은
격자 공간을 생각하는 것입니다.

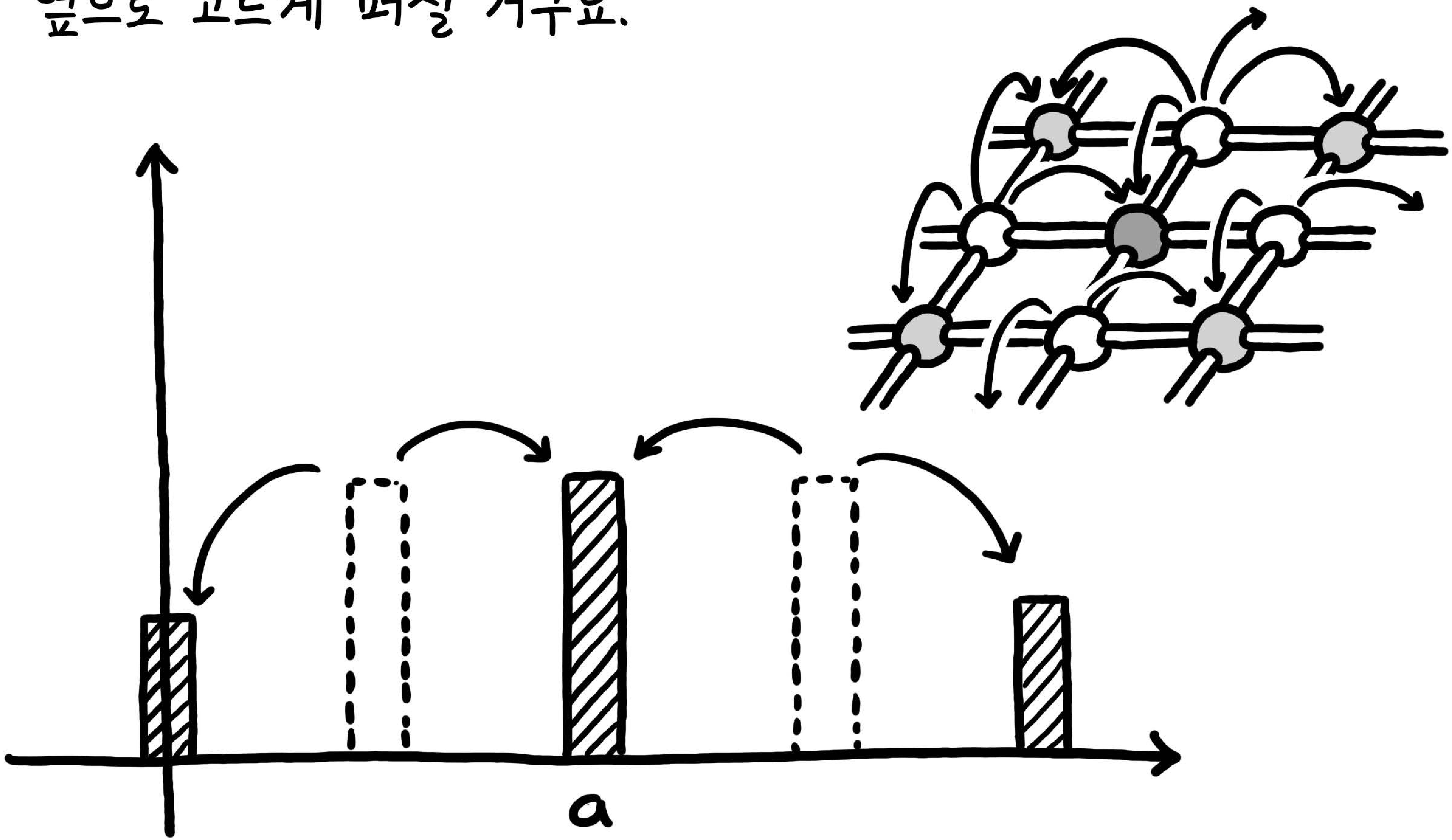
그런데 옆에 공간이 남아 있는데 안 퍼져나가는 게 이상하겠죠.

다음 순간이 되면 고르게 옆으로 퍼질 겁니다.

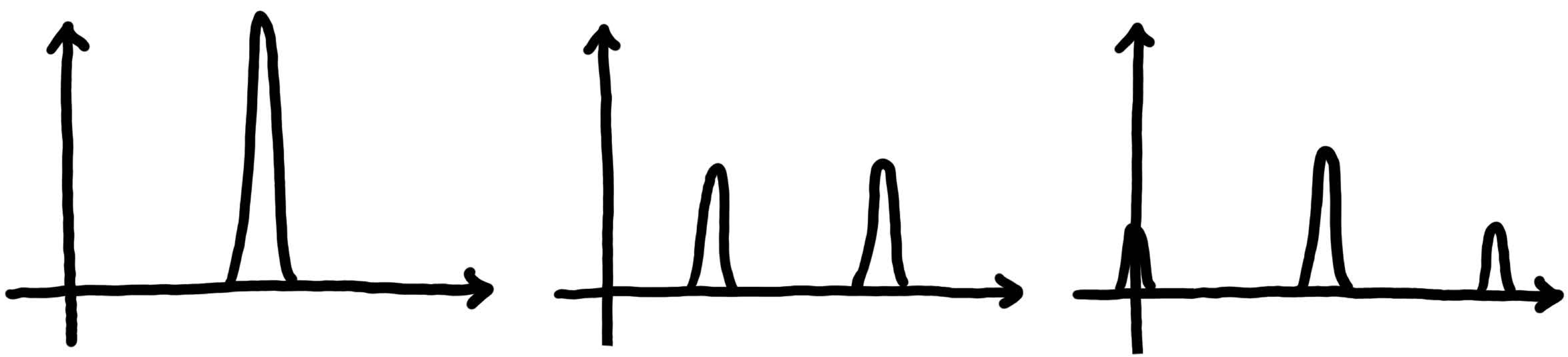


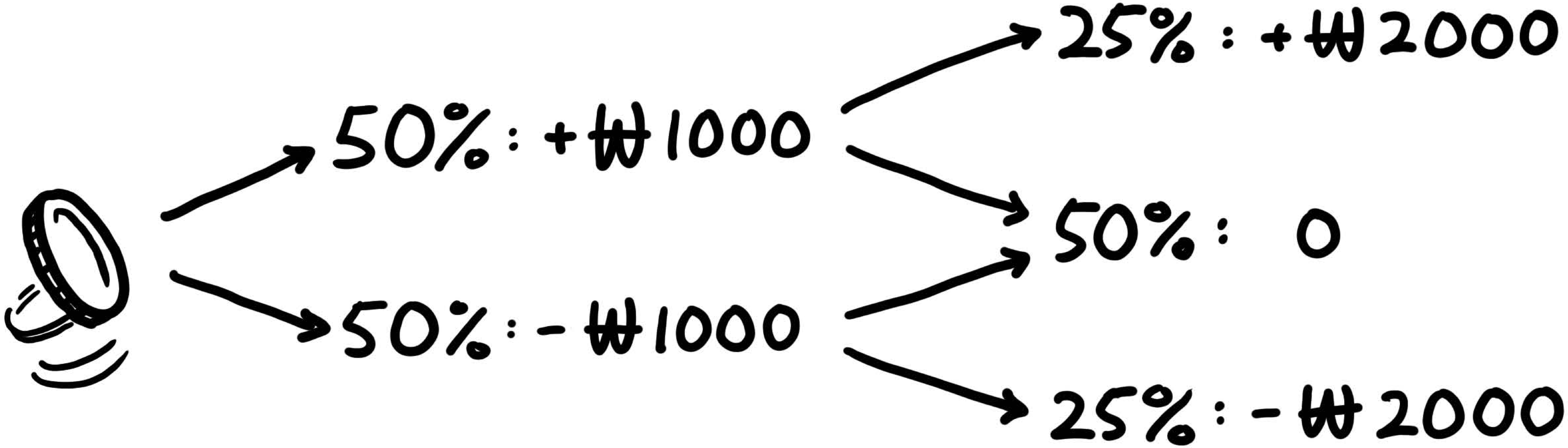


이렇게 한번 퍼진 분자들도 그다음 순간 자기 위치를 기준으로 옆으로 고르게 퍼질 거구요.

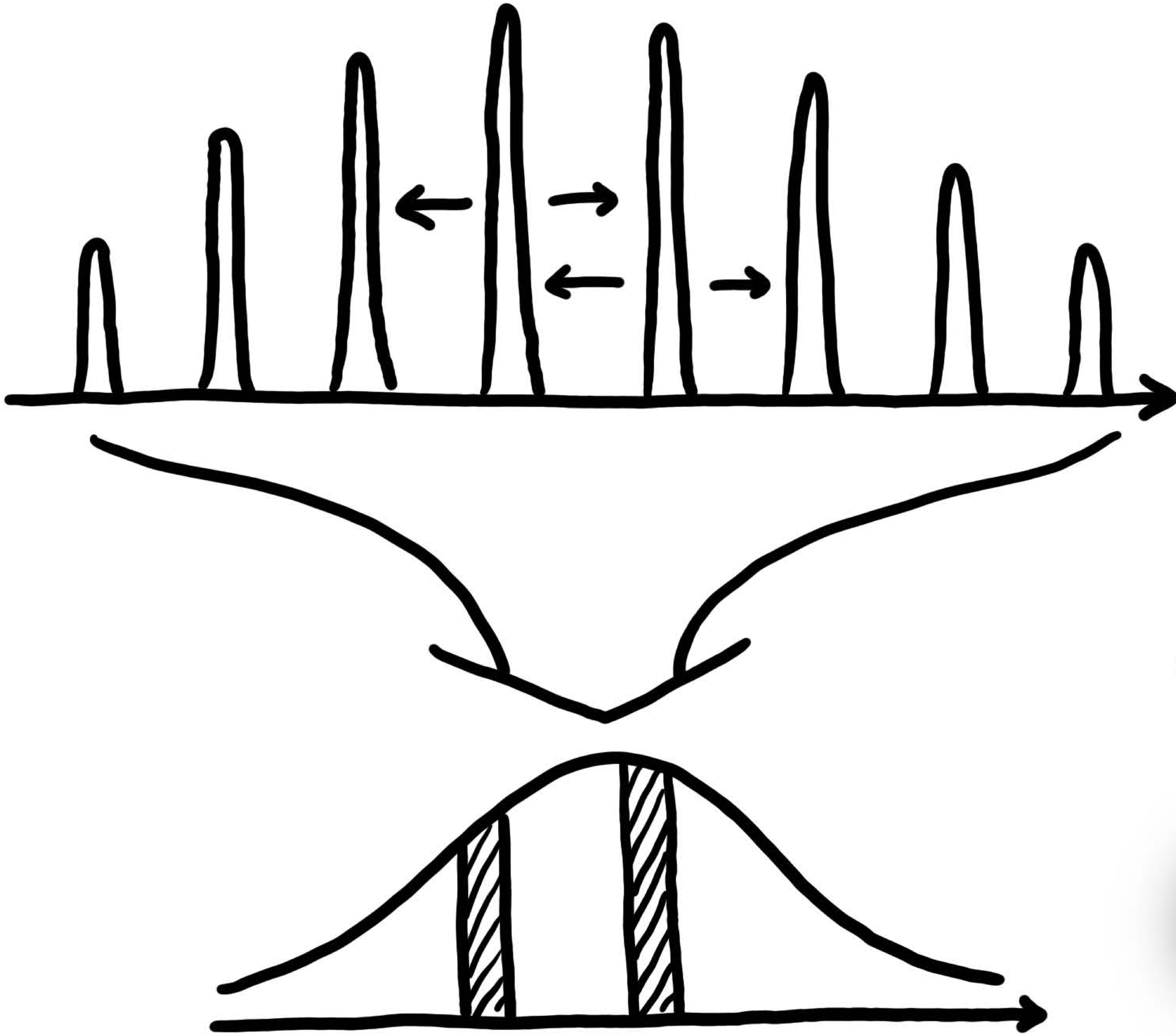


이렇게 퍼져나가는 모습은 지난번에 본 내기 결과와 똑같죠!





이런 미시적인 확률 모델을 만들고 조사하는 연구 분야도 있습니다.



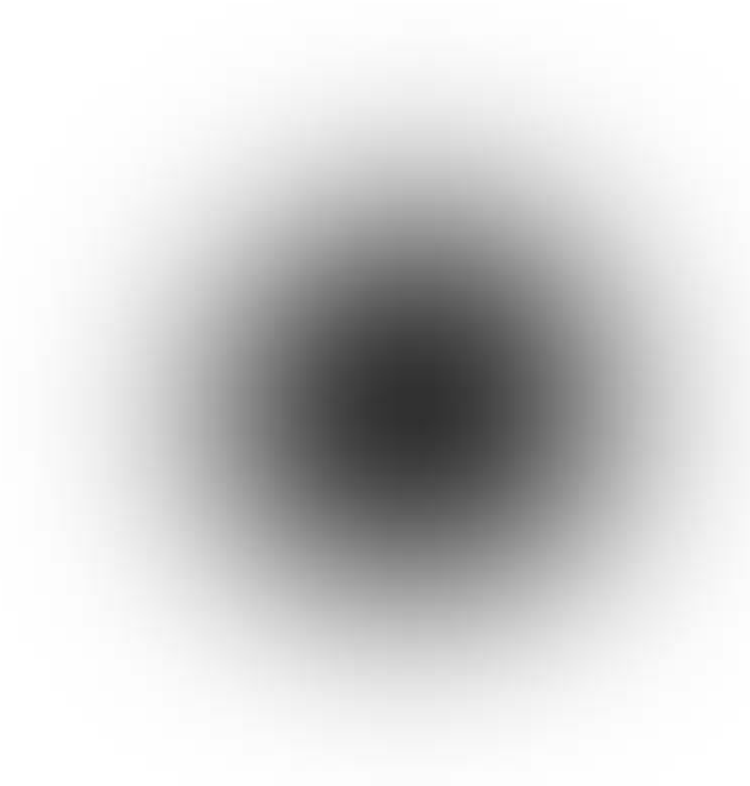
이런 미시적인 효과가 쌓여,

시간이 충분히 지났을 때

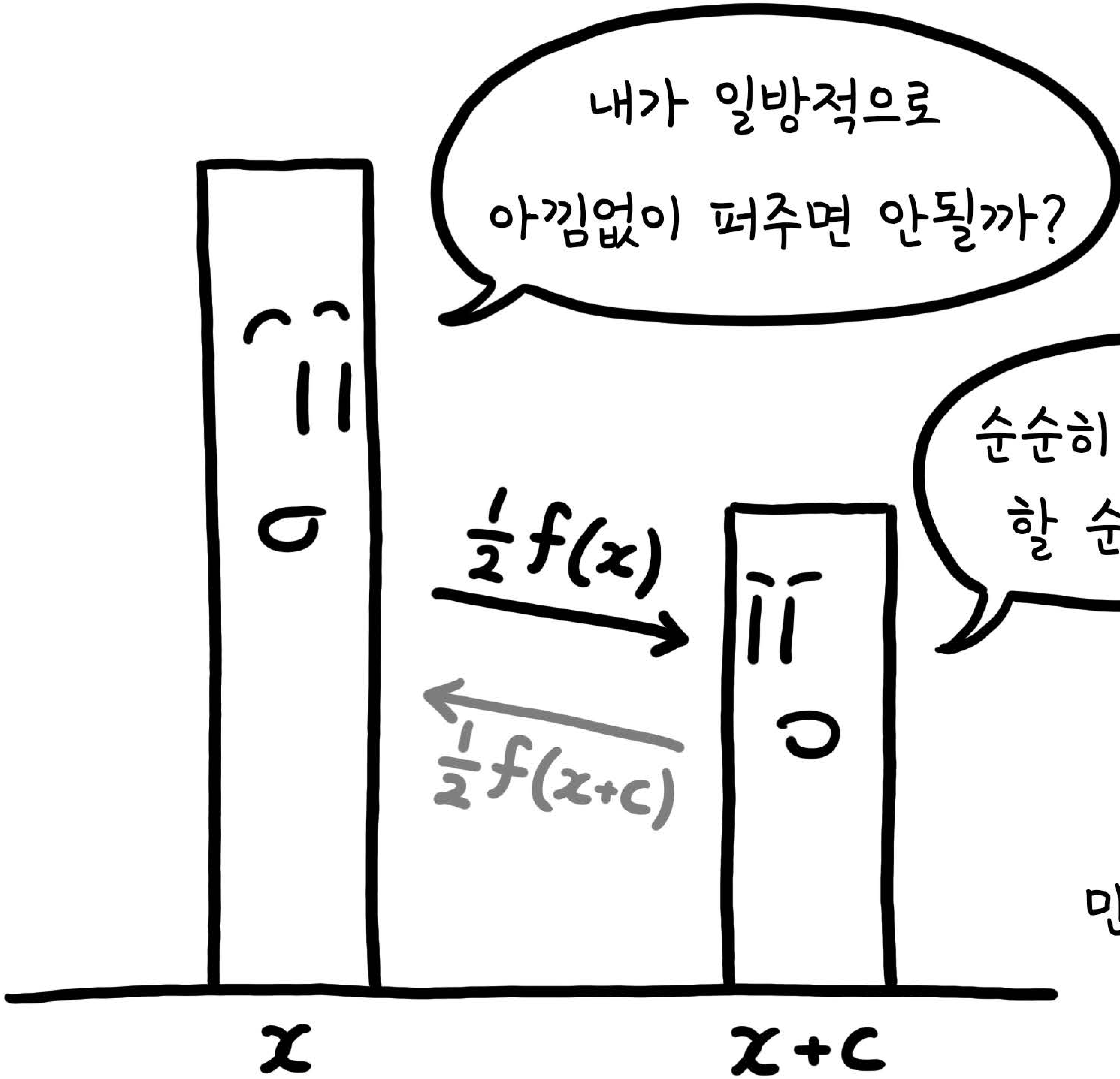
멀리서 바라보면...

아래와 같이 흐려진 패턴이

보이게 되죠.



이렇게 연속해 보이는 스케일에서는 미분방정식이 필요하겠네요.

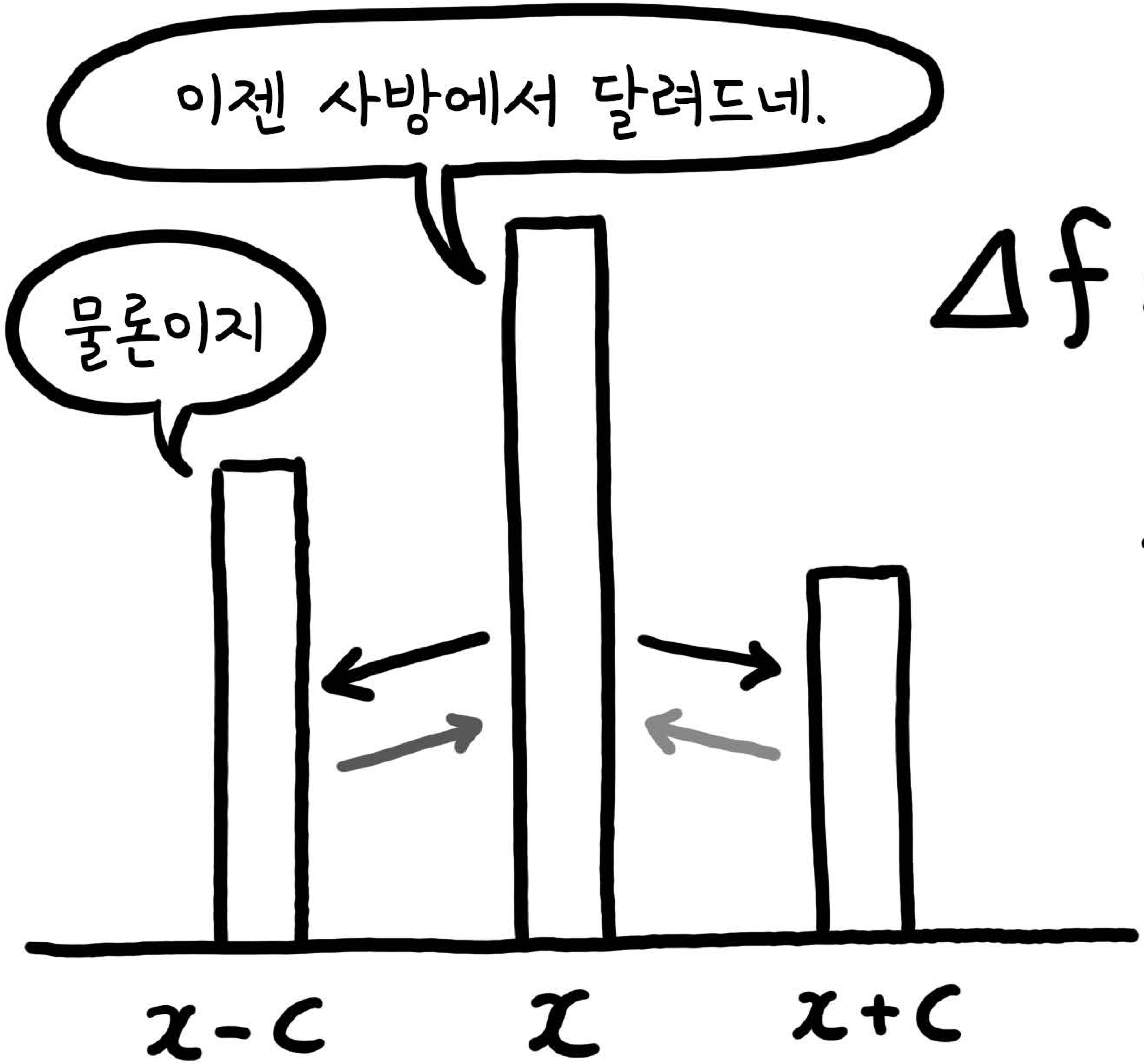


먼저, 이렇게 각 지점과 인접 지점 간에 주고받는 양을 생각하면,

$$\frac{1}{2}\left[f(x+c)-f(x)\right]$$

만큼 x 지점의 양이 변하겠네요.

그런데 각 지점은 왼쪽, 오른쪽 둘 다와 상호작용하니까,

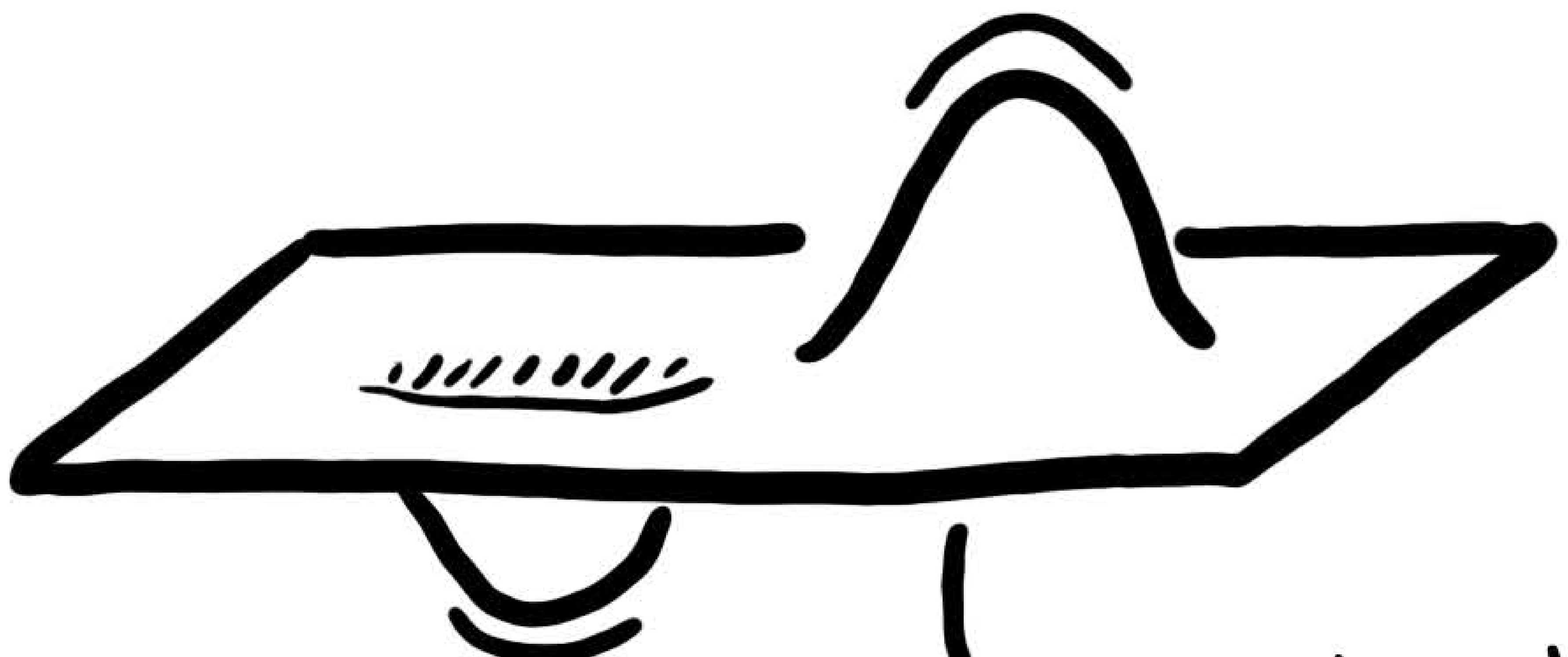


$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[f(x+c) - f(x)\right] - \frac{1}{2}\left[f(x) - f(x+c)\right] \sim \frac{1}{2}\cdot c^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

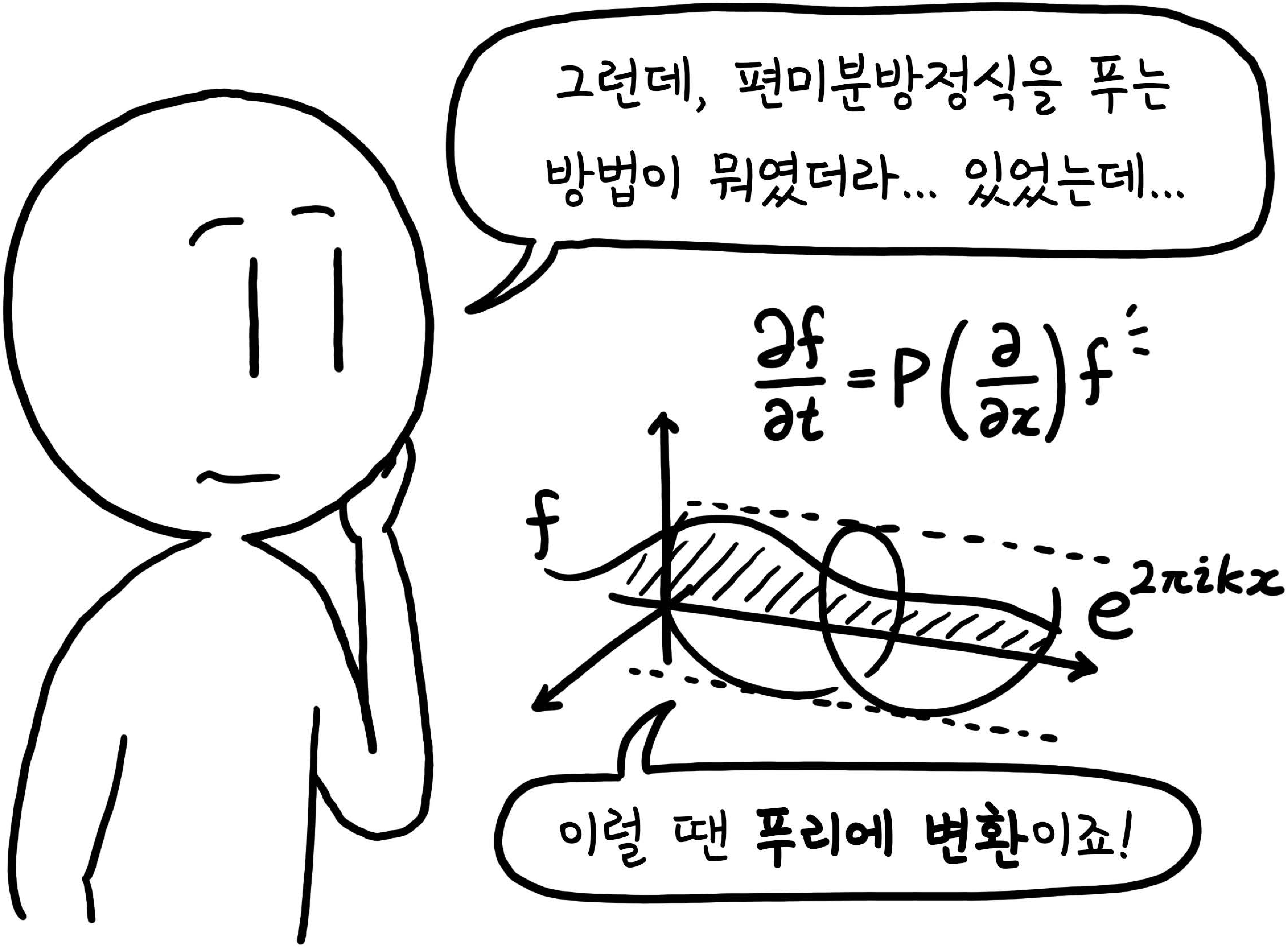
양쪽 값을 참조하는 '이계도함수'를 읽어야 올바른 값이 나오죠.

이걸 편미분방정식 형태로 고치면 아래와 같아지죠.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$



이 '라플라시안'은
해석학 만화에서도
등장했죠!



그런데, 편미분방정식을 푸는 방법이 뭐였더라... 있었는데...
$$\frac{\partial f}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f$$
f
$e^{2\pi ikx}$
이럴 땐 푸리에 변환이죠!

해석학 만화에서 정의한
푸리에 변환을 생각해 보면,

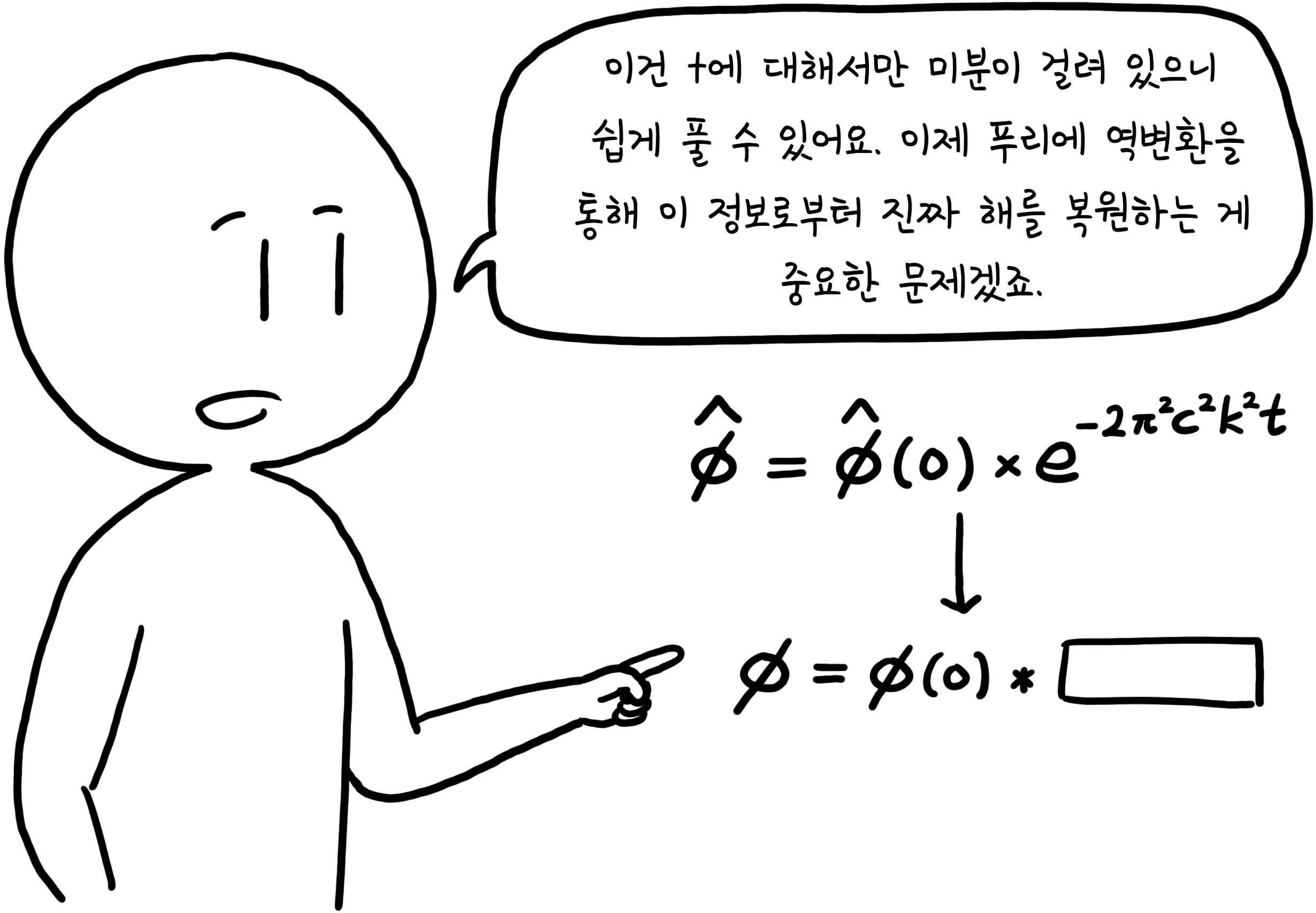
$$\hat{\phi}(k) = \int \phi(x)\, e^{-2\pi i k x}\, dx$$

$$e^{ikx} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} 2\pi i k\, e^{ikx}$$

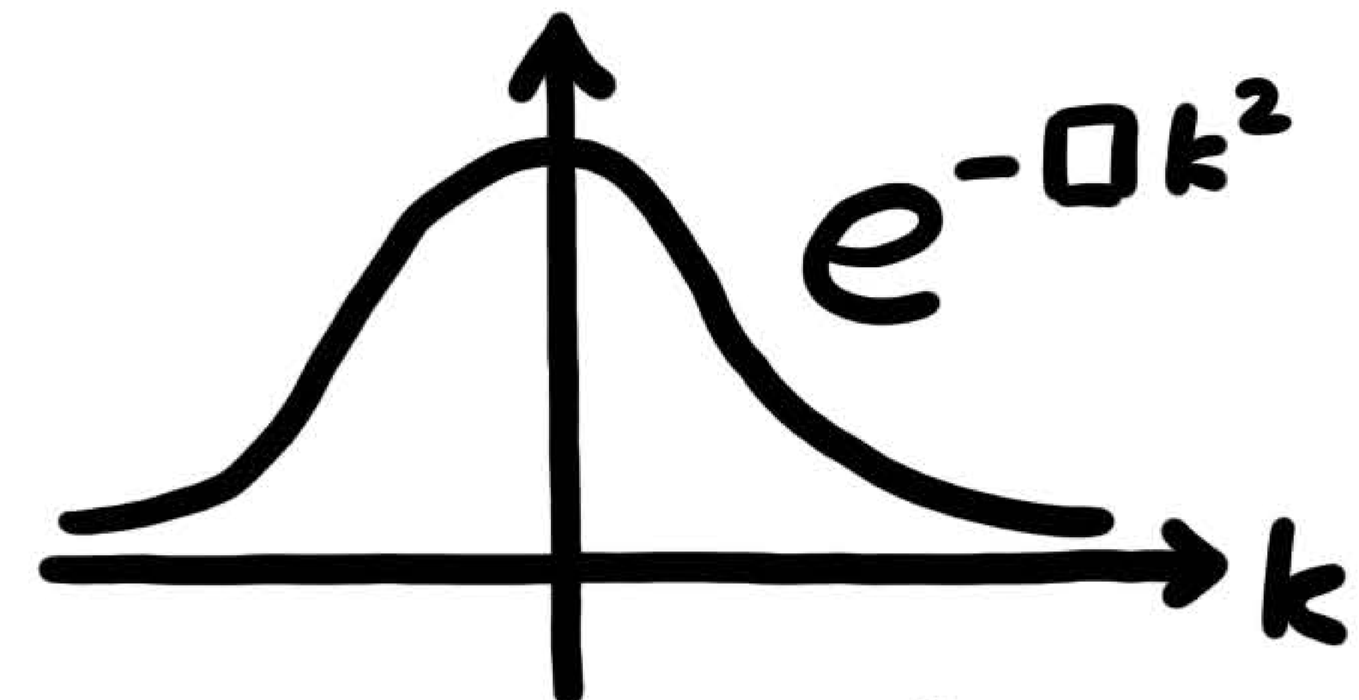
각 '파동 요소'는 미분을
곱셈 효과로 인식하니,

$$\partial_t \phi = \frac{c^2}{2} \partial_{xx} \phi \;\Rightarrow\; \partial_t \hat{\phi} = -2\pi^2 c^2 k^2 \hat{\phi}$$

이렇게 편미분방정식을 미분방정식으로 바꿀 수 있었죠!


이건 t에 대해서만 미분이 걸려 있으니 쉽게 풀 수 있어요. 이제 푸리에 역변환을 통해 이 정보로부터 진짜 해를 복원하는 게 중요한 문제겠죠.
$\hat{\phi} = \hat{\phi}(0) \times e^{-2\pi^2 c^2 k^2 t}$
$\phi = \phi(0) * \boxed{}$

여기서 중요한 성질이 등장하는데요, 가우시안 분포는 그 푸리에 변환도 가우시안 분포 꼴이라는 것이죠.

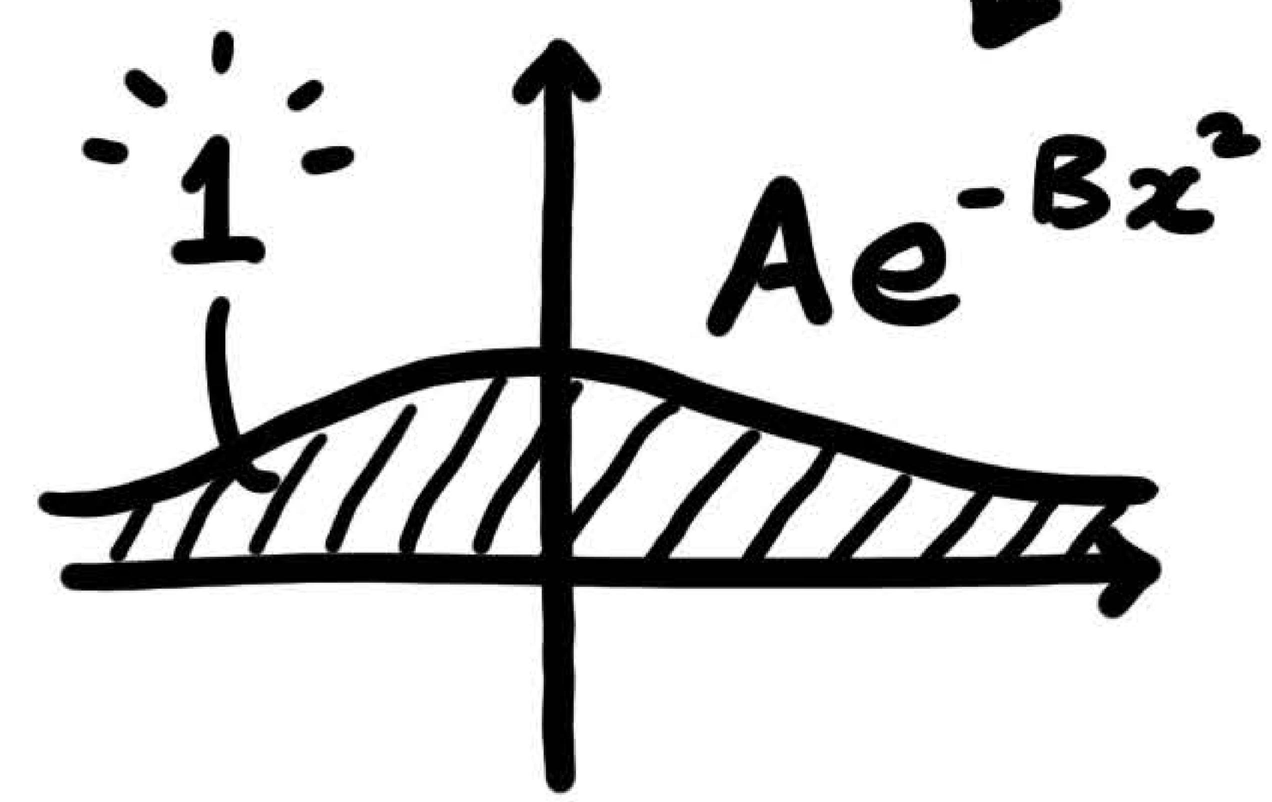


$$\int e^{-2\pi^2 c^2 k^2 t} \cdot e^{ikx}\, dk$$

$$= \int e^{-\frac{1}{2}\left(u - \frac{ix}{c\sqrt{t}}\right)^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2c^2 t}} \cdot \frac{du}{2\pi c\sqrt{t}}$$

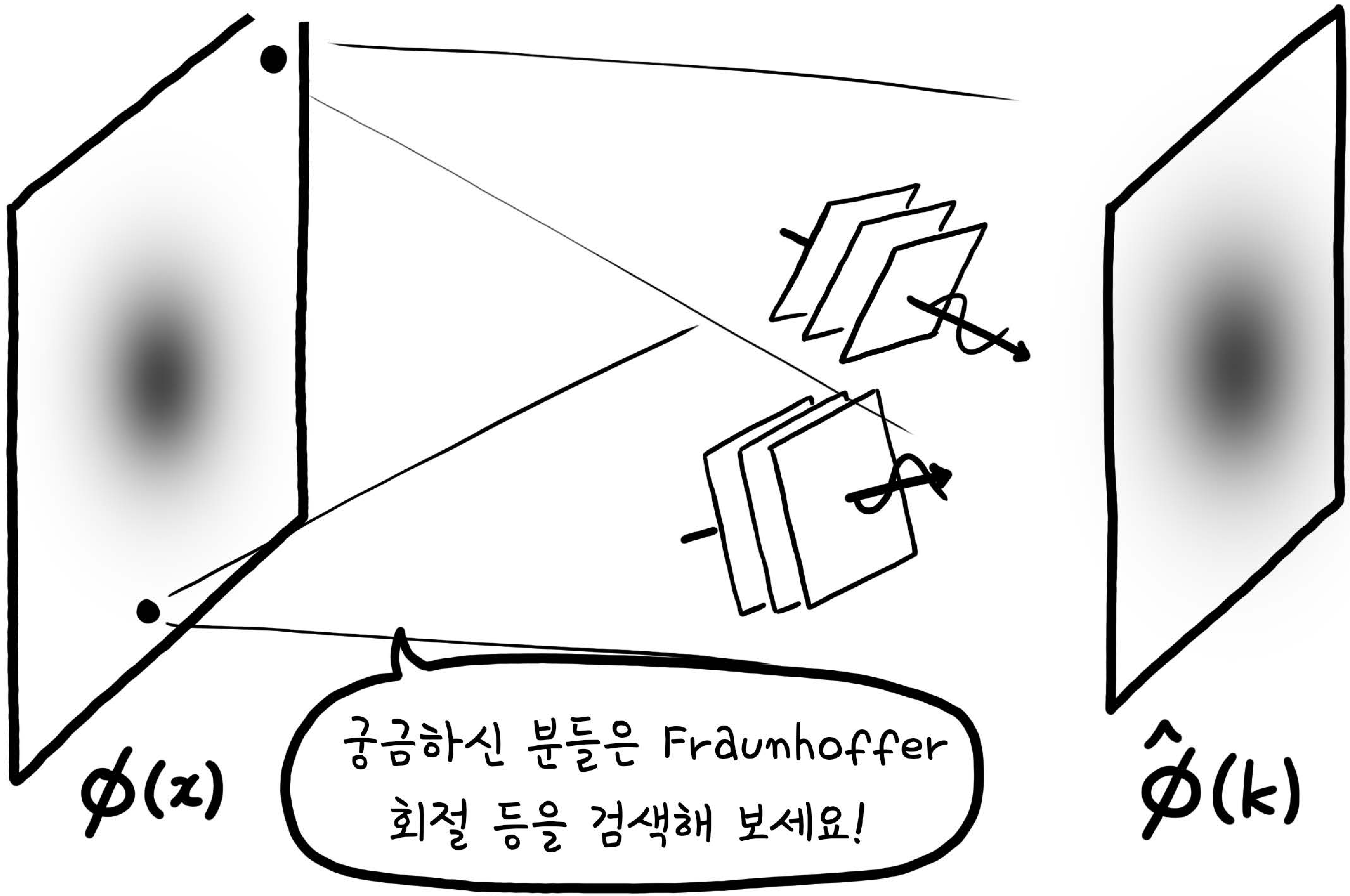
$u = 2\pi c k\sqrt{t}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi c^2 t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2c^2 t}}$$



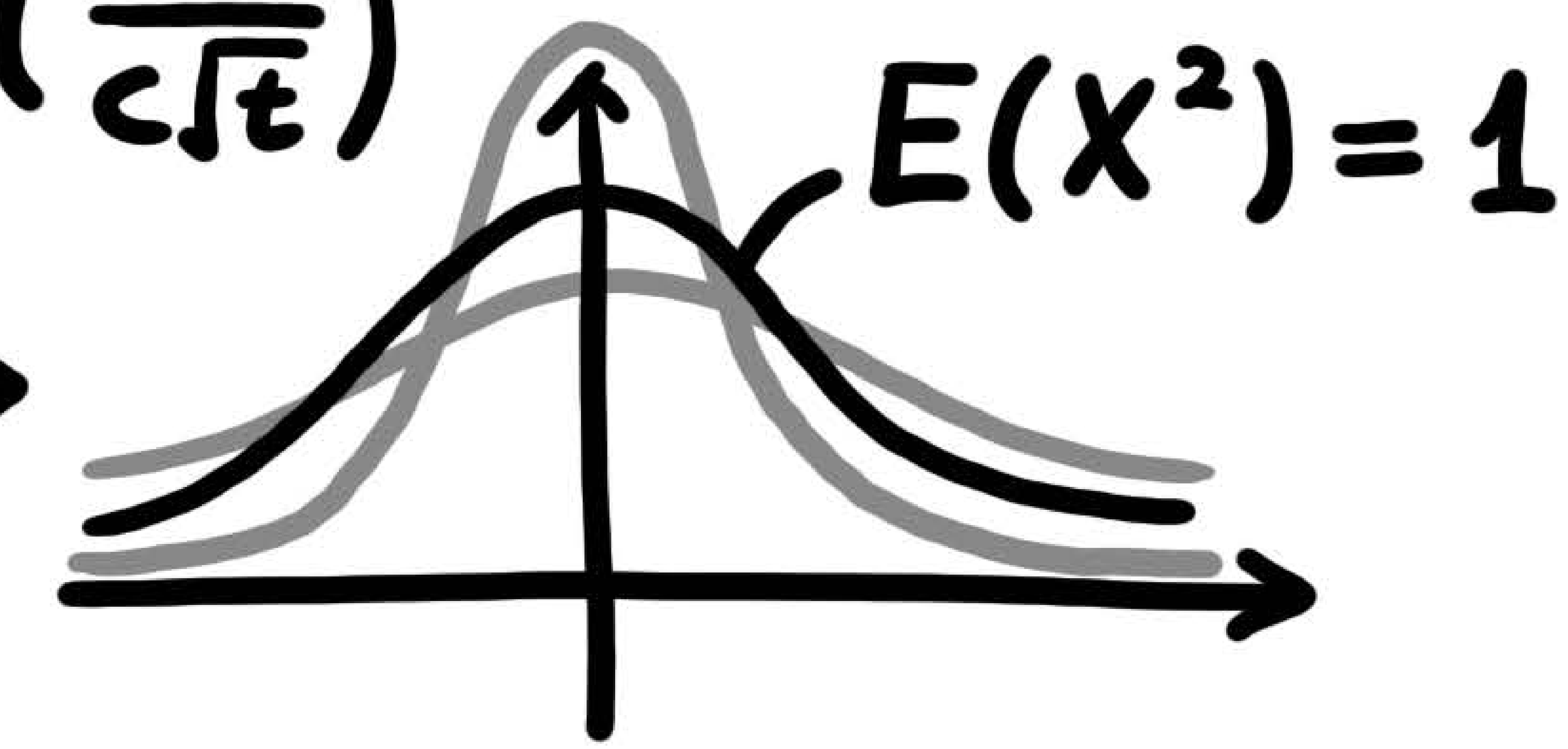
특히, 우리 경우 반드시 넓이가 1인 = 확률 분포로 간주하기 좋은 가우시안 분포를 얻을 수 있습니다.

이건 광학/양자역학 등에서 가우시안 분포가 등장하는 이유와도 관련 있지만...
자세한 설명은 다음에 기회가 되면 하겠습니다.



다시 확산 방정식의 해 얘기로 돌아오면, 사실 같은 함수를 시간에 따라 다르게 스케일링한 형태라는 걸 알 수 있습니다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi c^2 t}} e^{-\frac{x^2}{2c^2 t}} = \frac{1}{c\sqrt{t}} X\left(\frac{x}{c\sqrt{t}}\right)$$

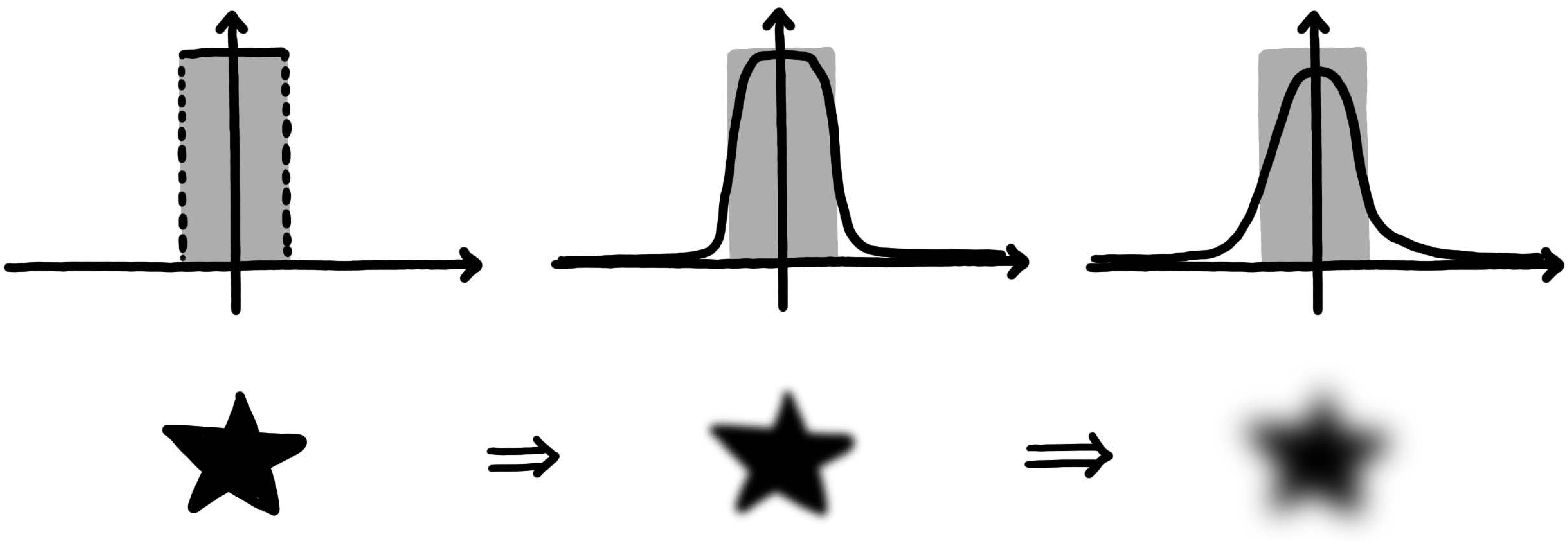


$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

사실 정확히는 초기 분포에
가우시안 커널을 취해야 하지만,

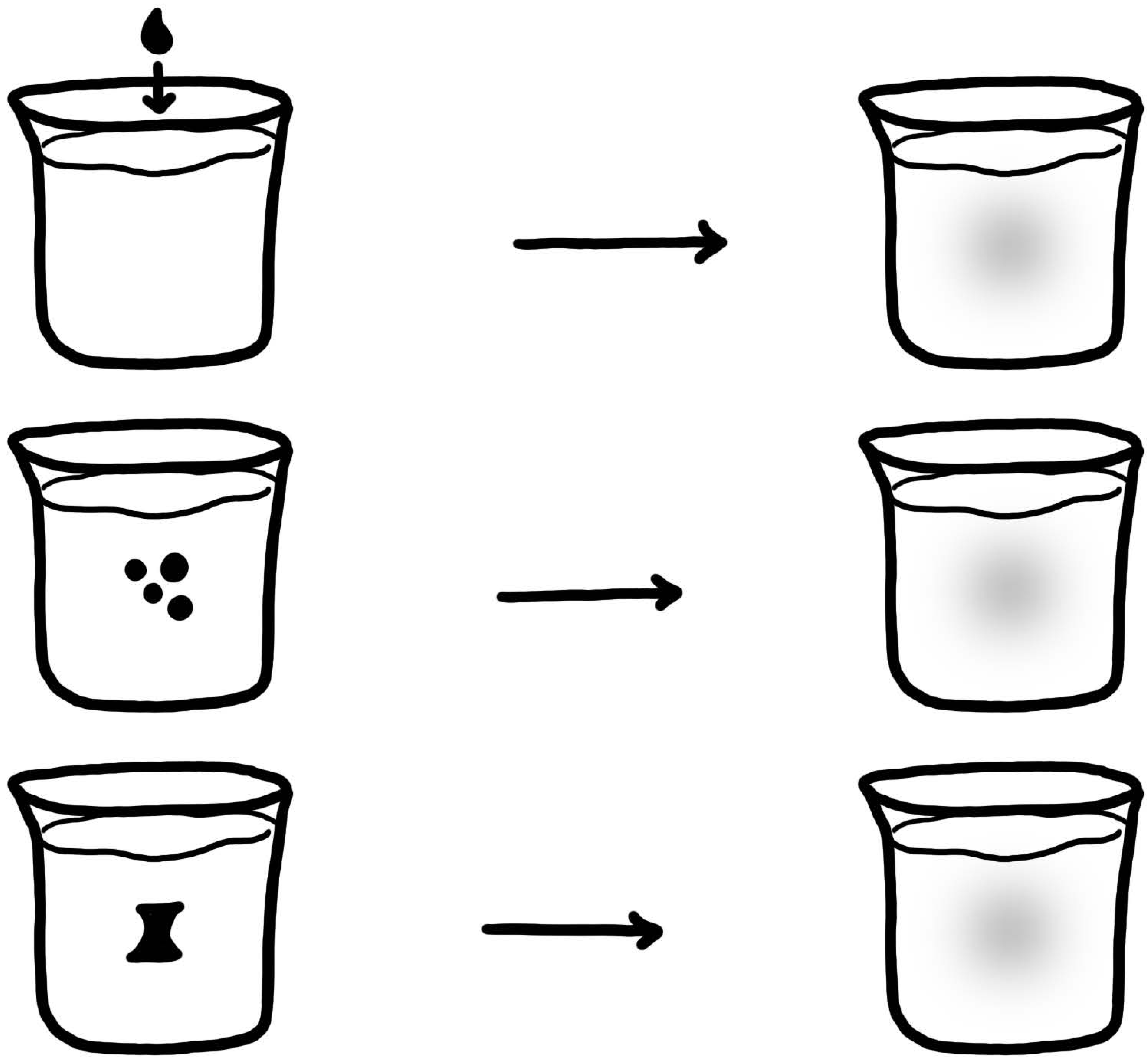
$$\boxed{\phi(x,t) = \phi(x,0) * \frac{1}{c\sqrt{t}}\,\chi\left(\frac{x}{c\sqrt{t}}\right)}$$

가우시안 커널의 너비가 넓어질수록 초기 분포의 디테일에 둔감해지는 효과가 있죠.



그래서 처음 분포가 무엇이었든, 시간이 충분히 지나면 '거의' 가우시안 형태가 된다고 볼 수 있습니다.

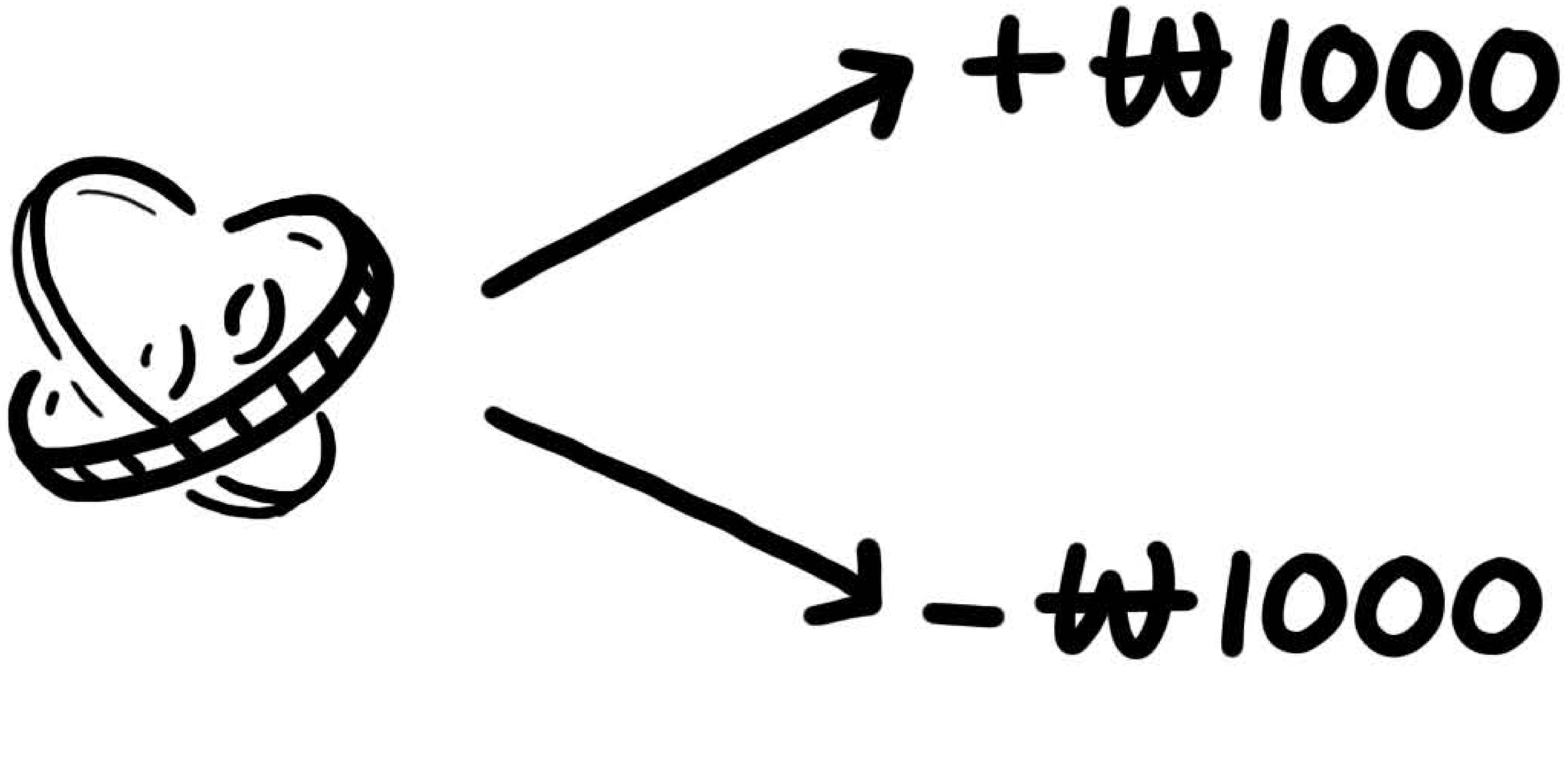
이 덕분에, 초기 분포와 관계없이 동일한 '흐릿한 패턴'을 자주 볼 수 있는거죠.

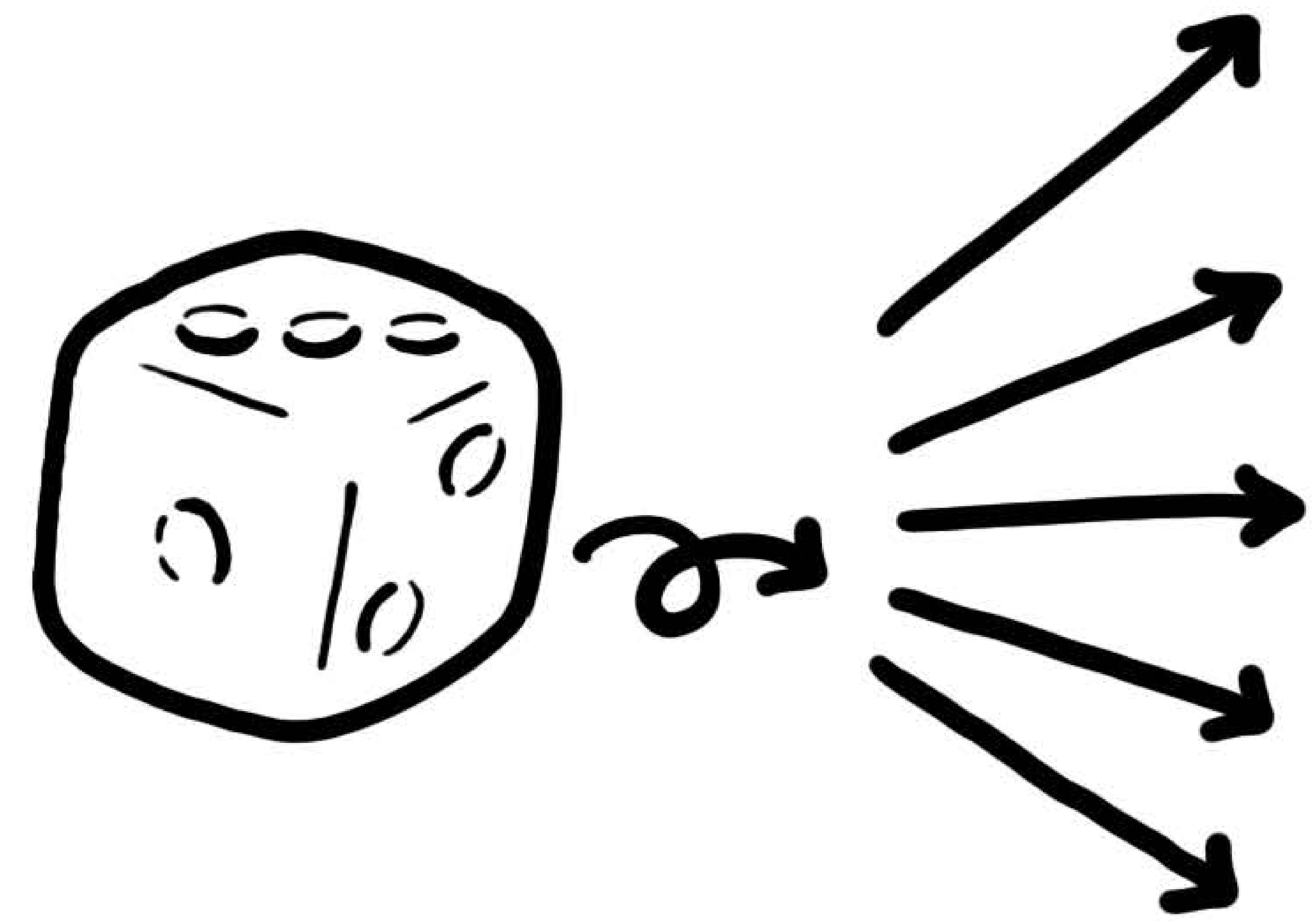


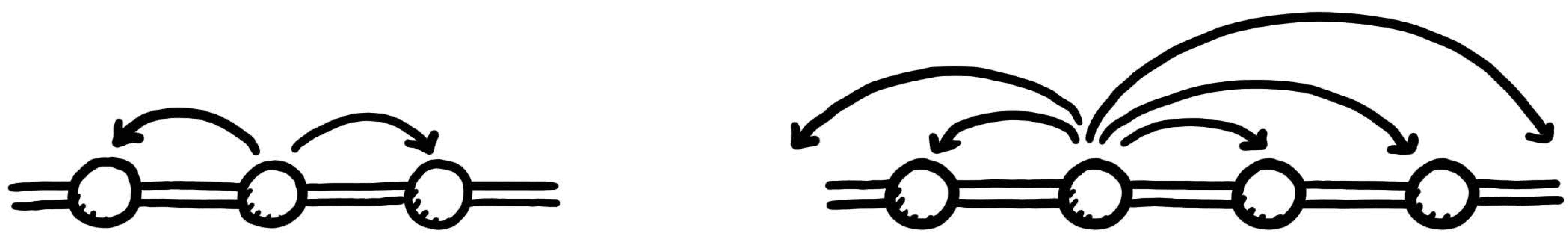
이것 말고도, 가우시안 분포가 가장 흔히 나타나는 이유는 또 있습니다.

바로, '퍼져 나가는 방식'에도 크게 영향을 받지 않는다는 점이죠.

예를 들어, 방금처럼 절반씩 바로 옆 칸으로 퍼질 수도 있지만,

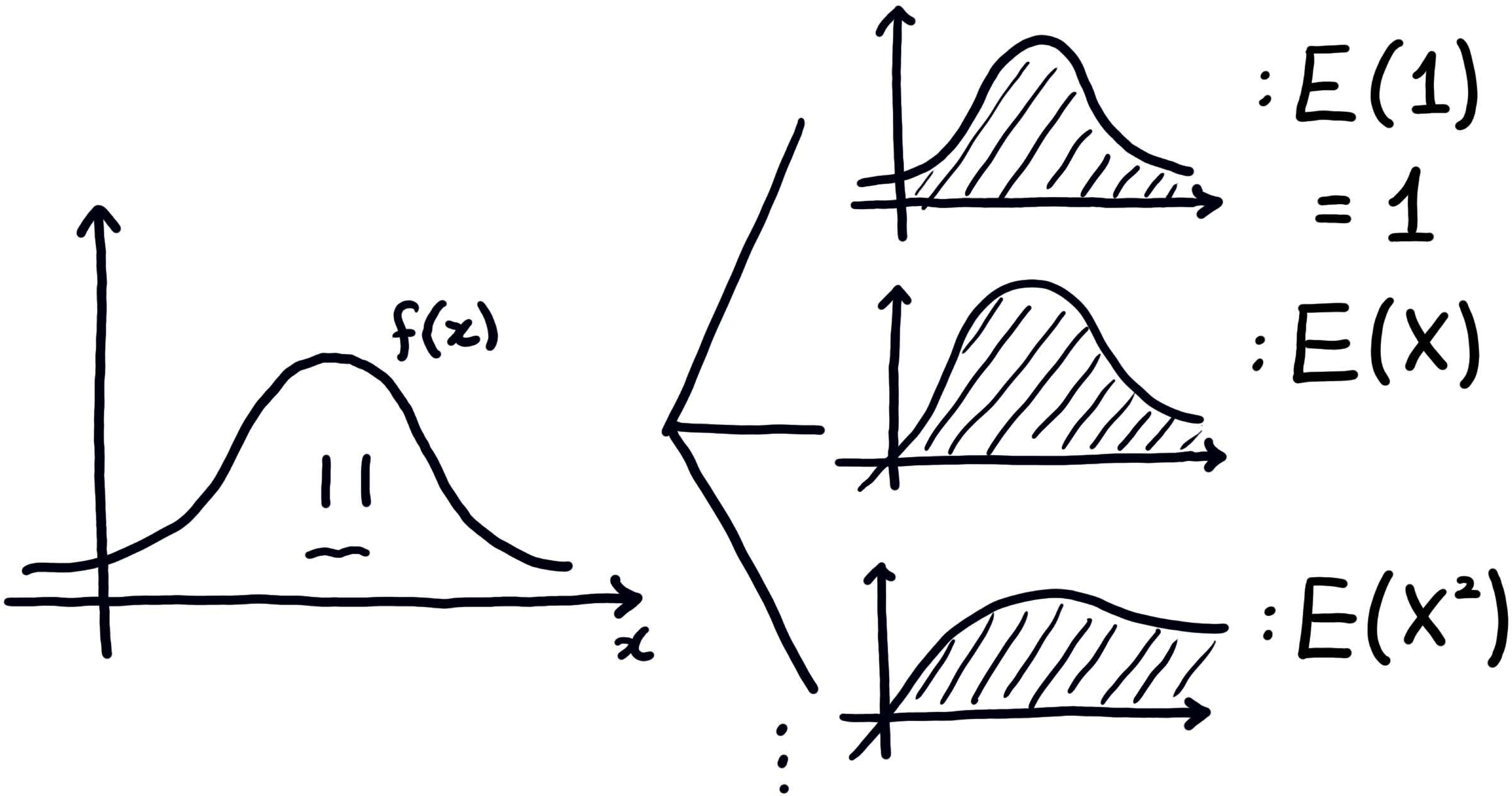






더 복잡한 방식으로 분자가 퍼져 나가는 모델도 생각할 수 있죠.

이럴 때는 확률변수 값을 n승한 것의 기댓값인 'n차 모멘트'를 관찰합니다.

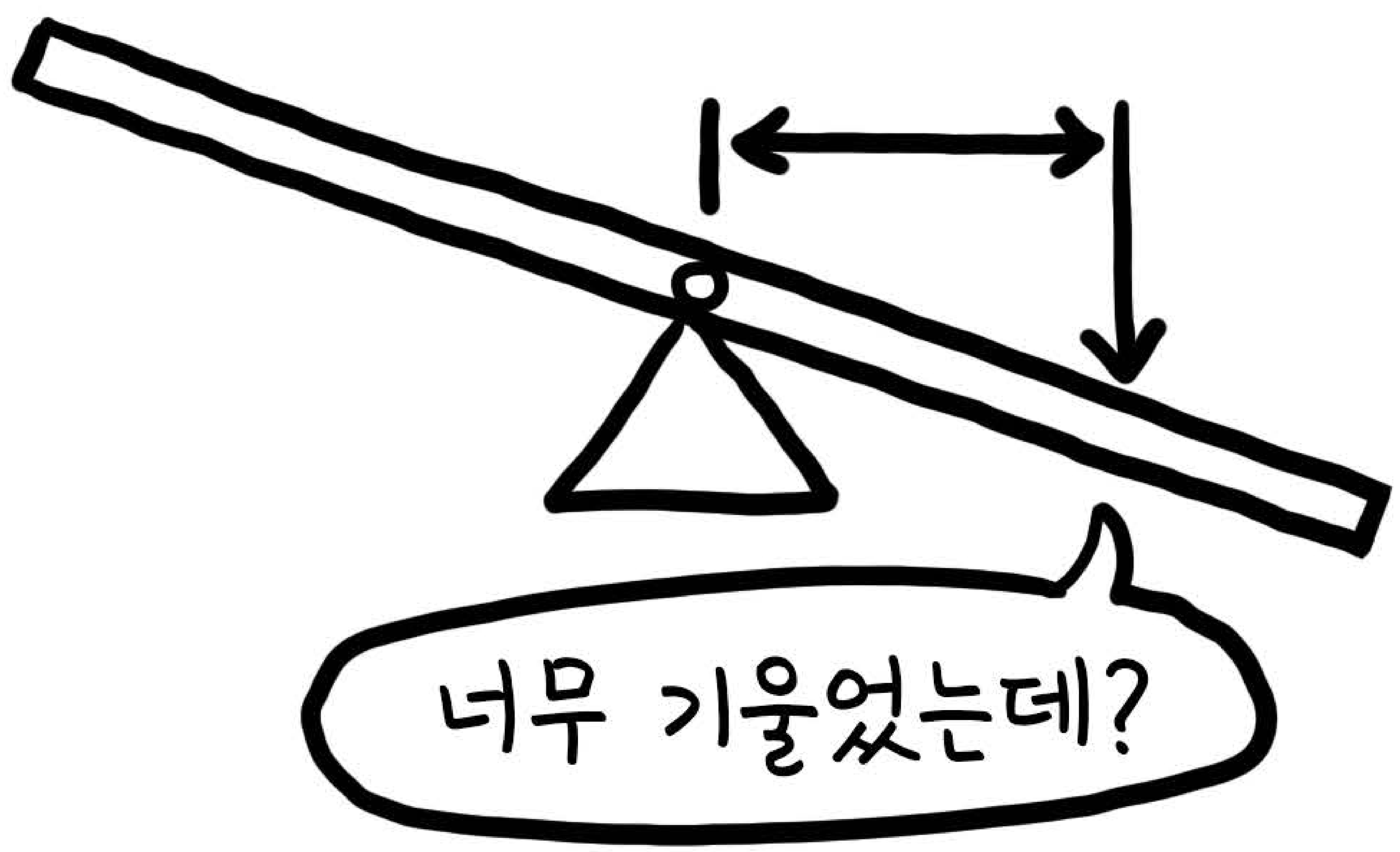


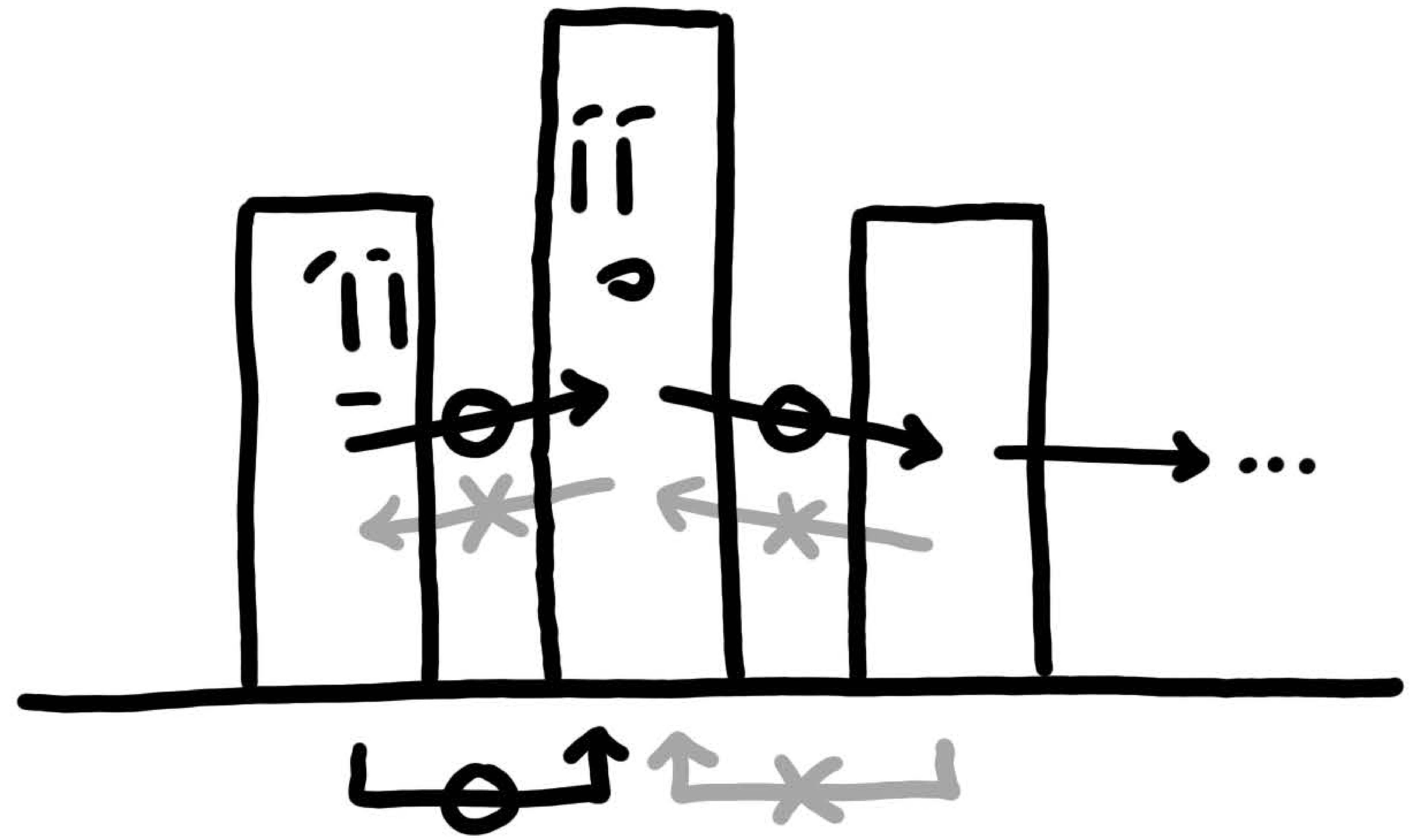
예를 들어, 1차 모멘트는 변수값 자체의 기댓값이니, 확률변수의 평균이 되겠죠.

다양한 n차 모멘트를 알수록 그 변수에 대한 정교한 정보를 얻는다고 할 수 있습니다.


이중 평균값, 즉 확률분포의 첫번째
모멘트가 0이 아닌 경우를 생각해 봅시다.
전체 시스템에 비대칭이 있다는 뜻이죠.
v
예를 들면, 특정 방향으로 흐르고 있는 물에서
잉크가 확산하는 상황 같은 거죠.

이 경우, 분포가 양쪽이 아니라 한쪽으로부터 일방적으로 밀리는 상황이기 때문에, 아까와는 방정식이 조금 달라집니다.



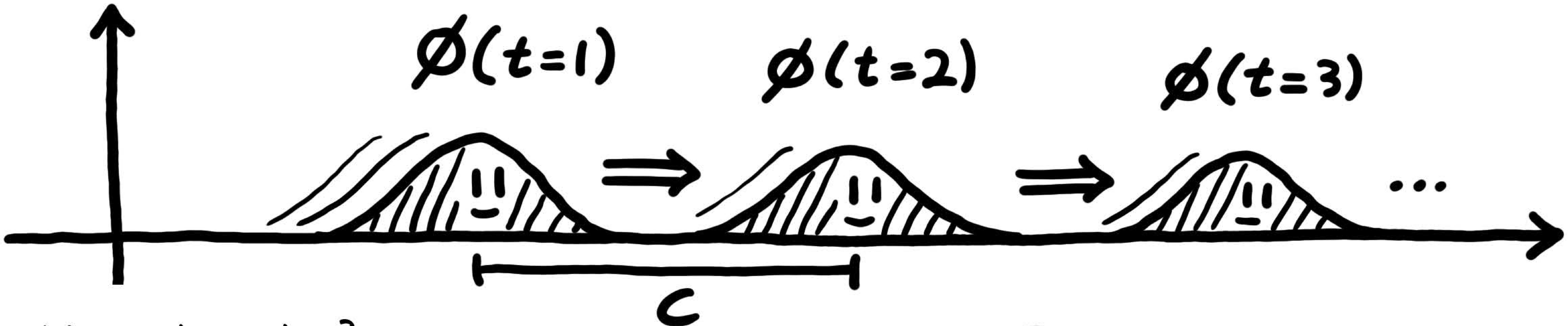


이계미분이 아니라 일계미분이 포함되는, 일종의 파동방정식 형태가 나오게 되죠.

$$
\begin{array}{lll}
 & \phi(x,t+1) & = \phi(x-c,t) \\
-) & \phi(x,t) & \quad \phi(x,t) \\
\hline
\end{array}
$$

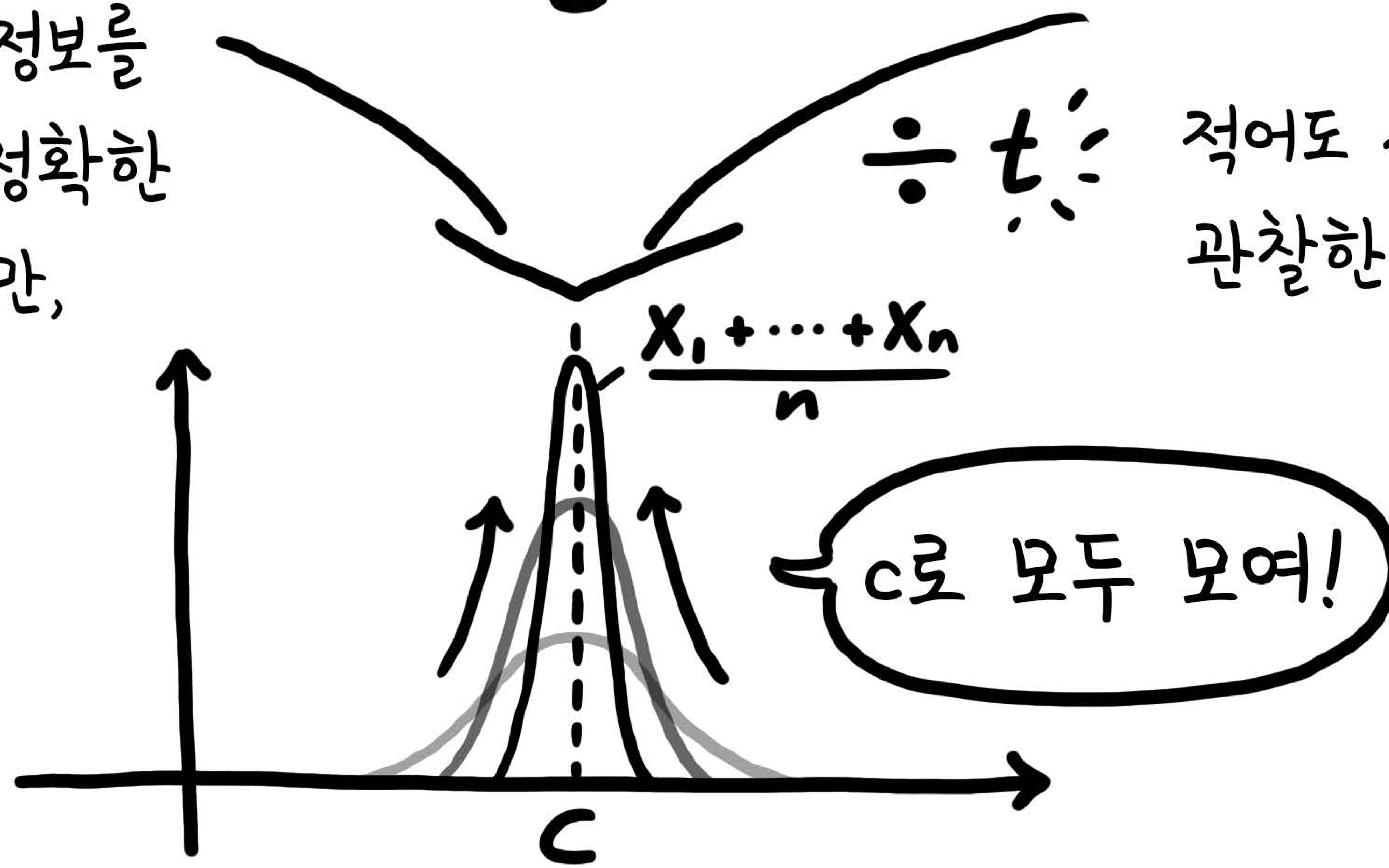
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

이렇게 하면 속도 c로 그대로 이동하는 파동 해가 얻어지는데요,



물론 고차 모멘트 정보를 안 썼기에 이게 정확한 실제 해는 아니지만,

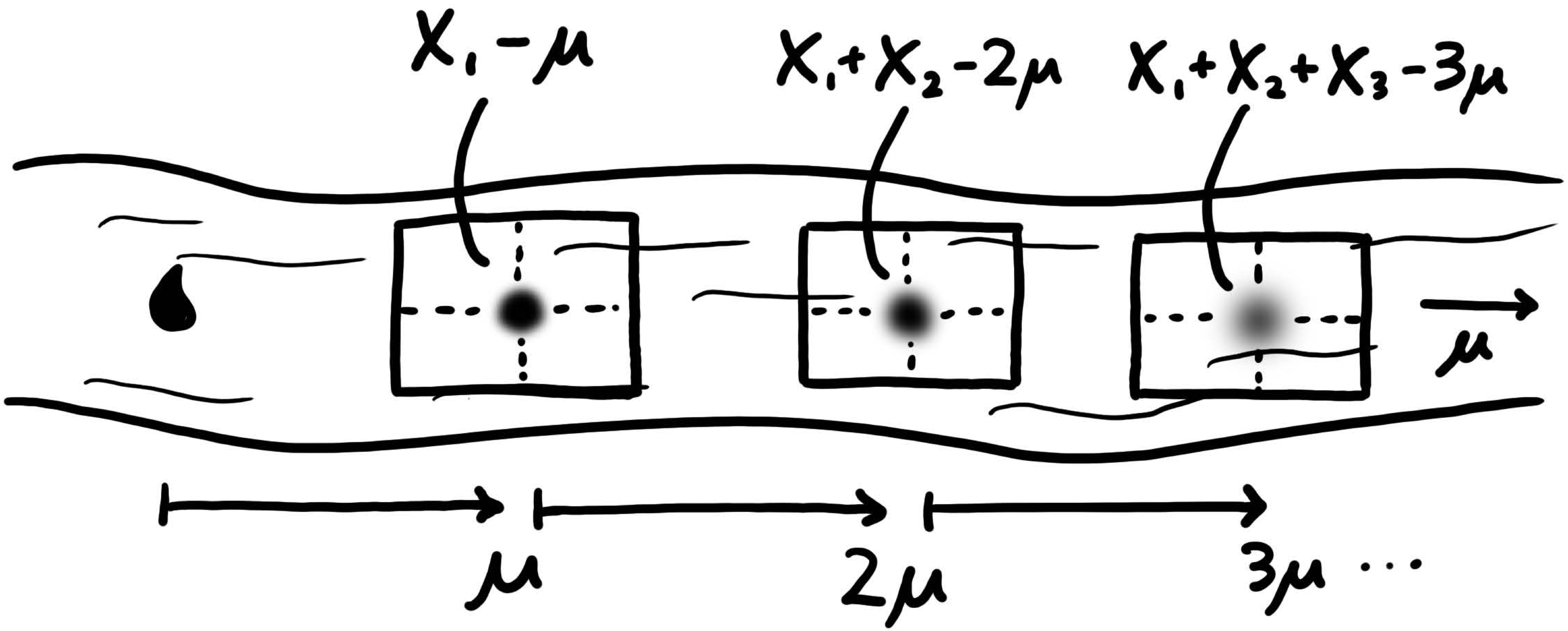
적어도 시간 t 오더에서 관찰한다고 치면...



강한 큰수의 법칙이 성립한다는 건 볼 수 있죠.

이런 '비대칭 추진력' 효과를 제외하고, 더 정밀한 '퍼짐'을 보고 싶으면 어떻게 하죠?

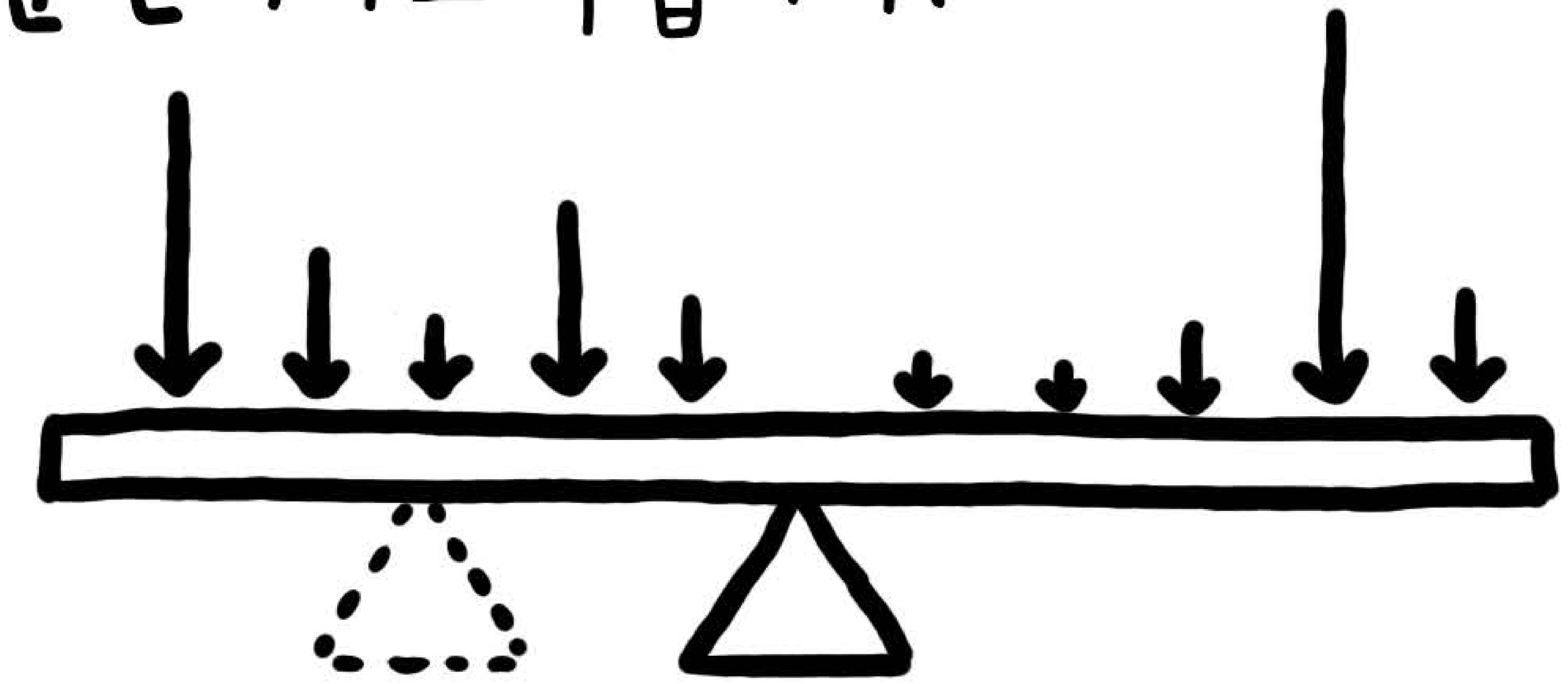
시간 X 평균 속력만큼 흘러내려가는 건 이제 아니까, 그만큼 상쇄해주면 되겠네요.



즉 X 대신 $\bar{X} = X - E(X)$를 반복 시행하는 문제로 바꾸는 거죠. 이 상태에서

n 오더 말고 더 미세한 수준의 거동을 관찰하고 싶습니다.

이렇게 하면 평균이 0이 되니, 그 다음 모멘트를 봐야 합니다. 이 '보정된 2차 모멘트'를 **분산**이라고 부릅니다.

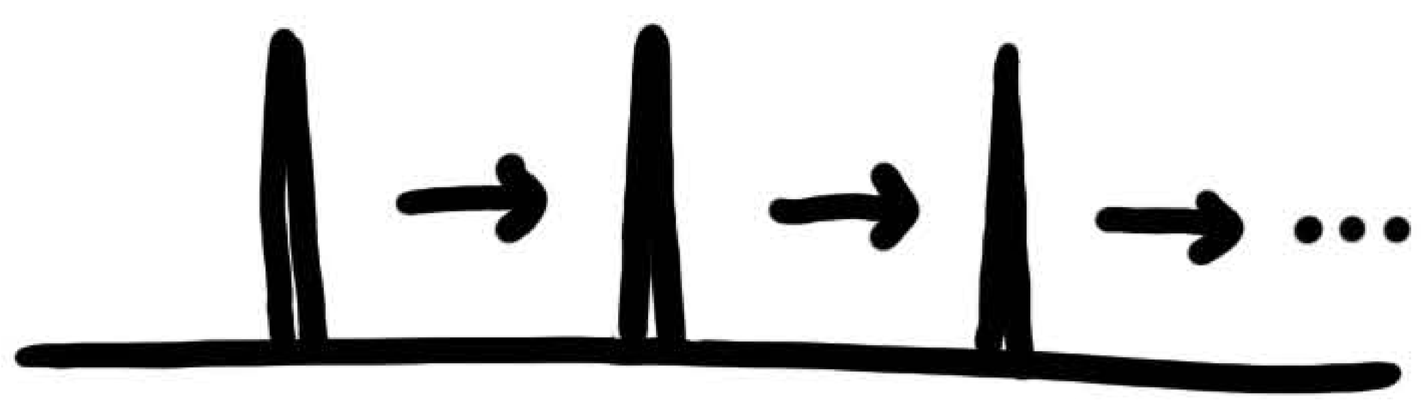


$0 \longrightarrow \mu$

$E(\bar{X}) = 0$

$$\Rightarrow E(\bar{X}^2) = \underline{E(X^2) - \mu^2}$$

$$* \begin{cases} \underline{E(\bar{X}^2) = 0} \Rightarrow X = \text{상수} \\ \underline{E(\bar{X}^2) > 0} \end{cases}$$



참고로, 아주 특수한 경우가 아니면 분산은 0보다 큽니다.

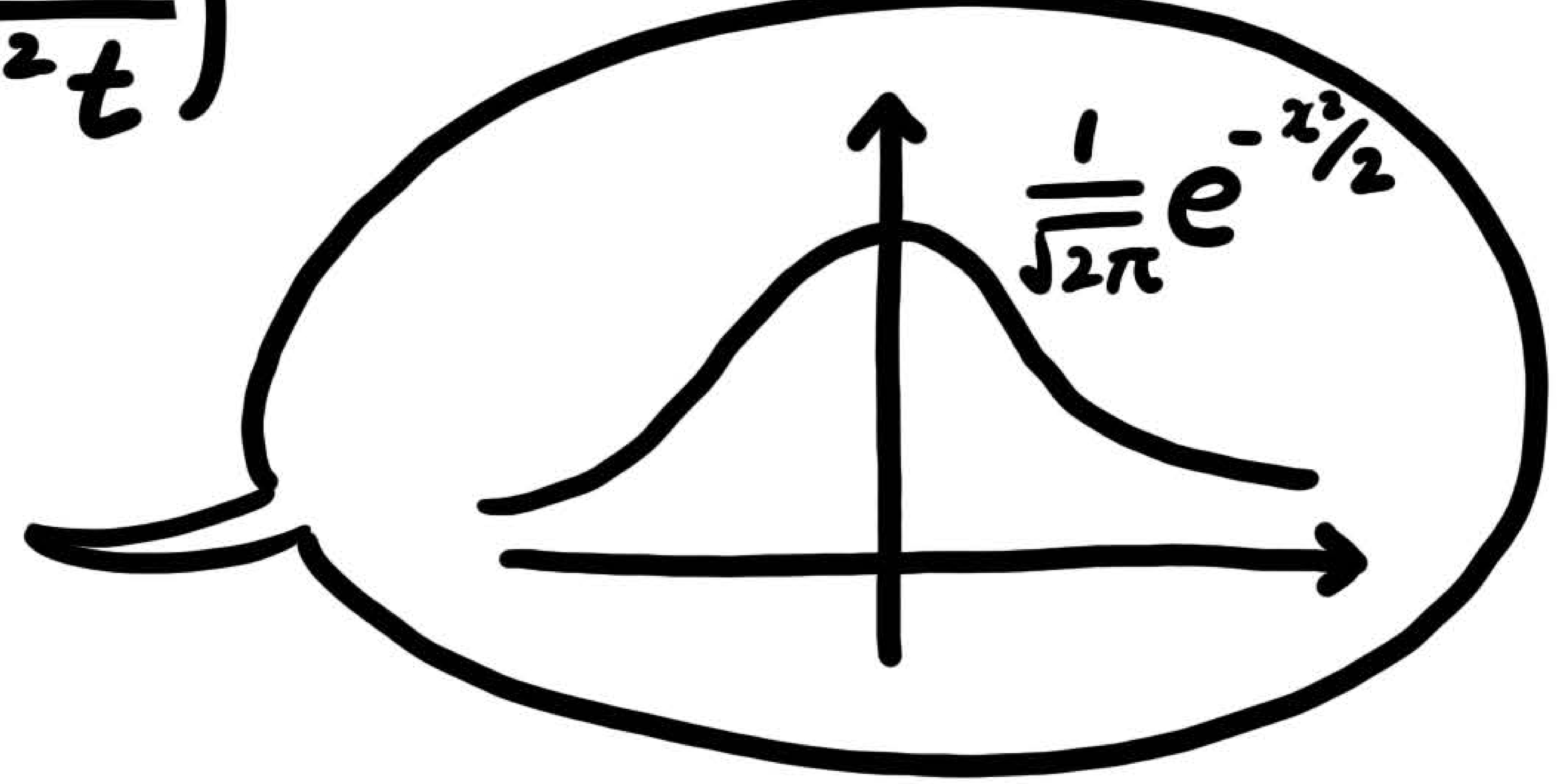
이 분산이 아까 방정식의 c^2 자리에 들어가야 한다고 생각하면, 해를 얻는 건 어렵지 않겠죠.

$$\sigma^2 = E(\bar{X}^2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \phi \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} \chi\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right)$$

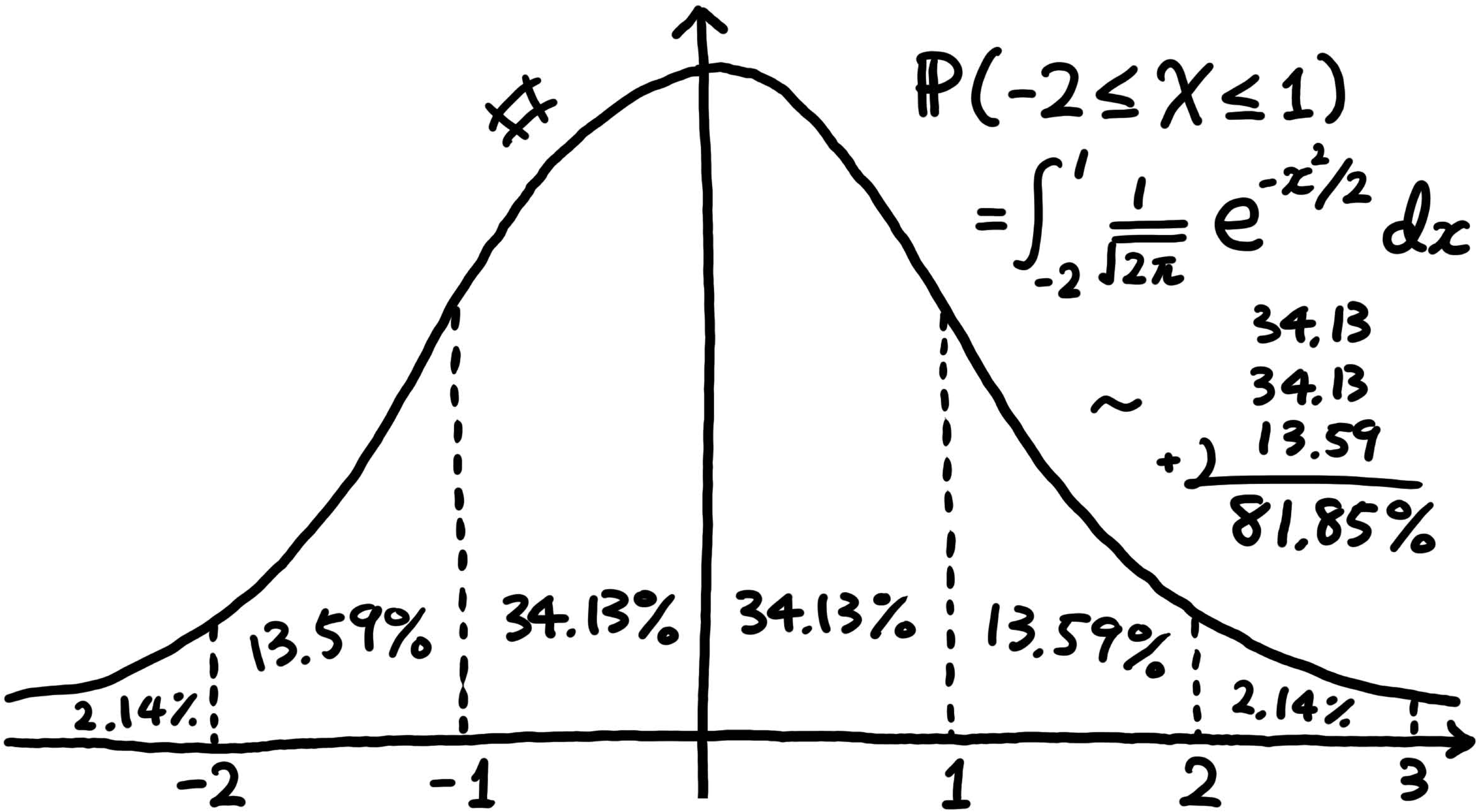
$$; \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}} \sim \chi$$



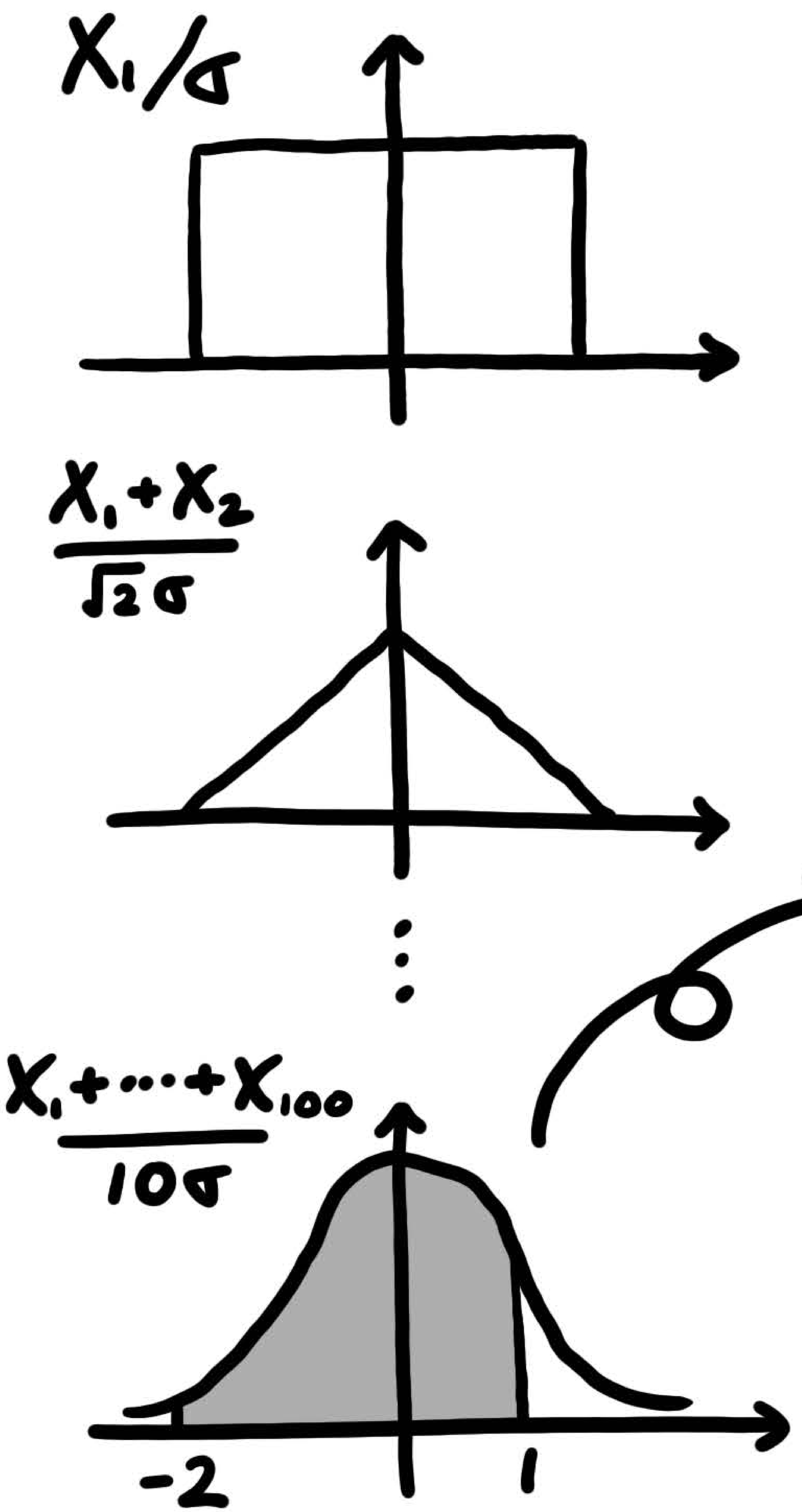
이렇게, n개의 독립시행 합의 "$\sqrt{n}$ 오더에서의" 분포가 가우시안 분포로 수렴합니다.

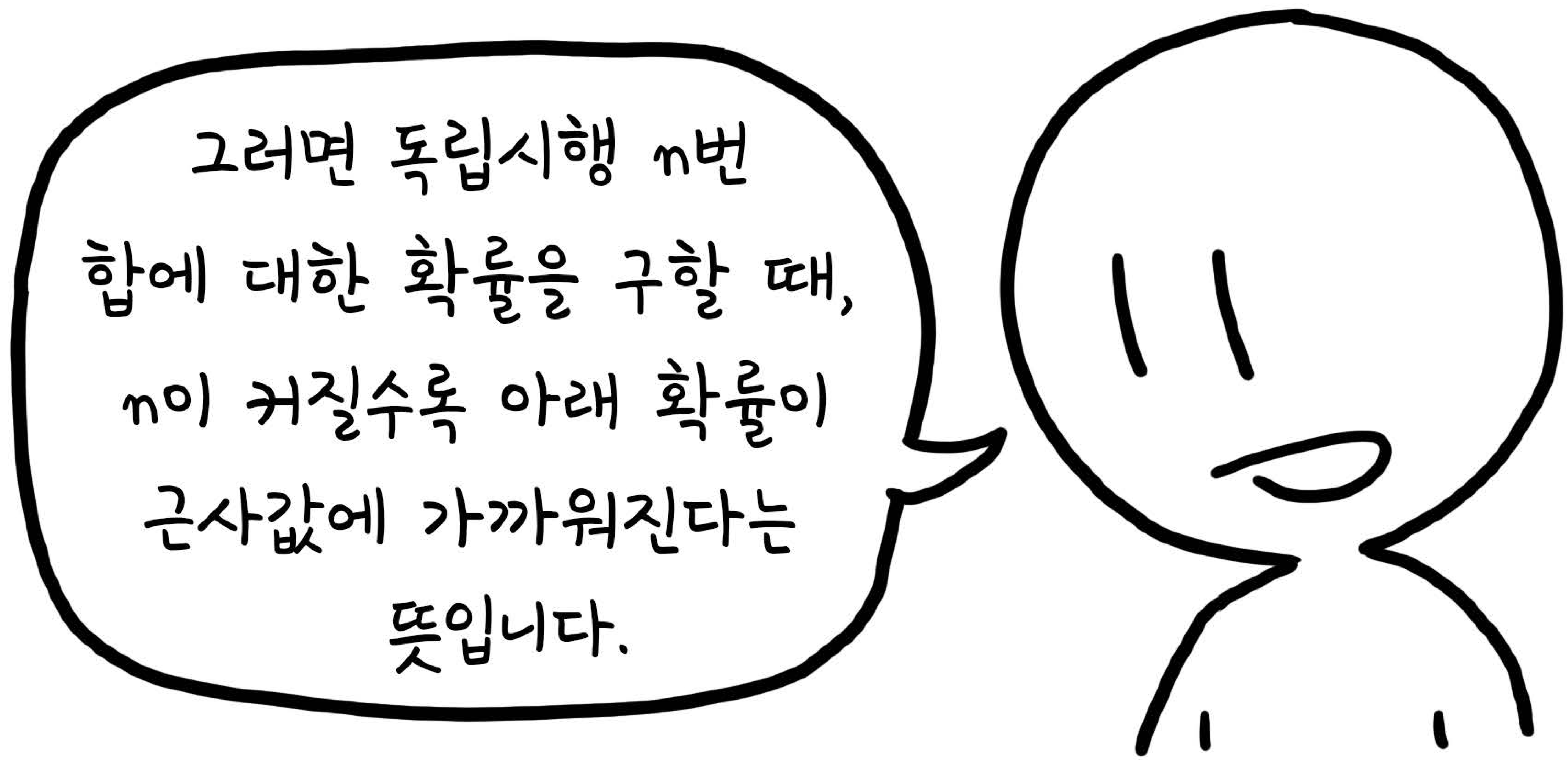
이것이 바로 **중심극한정리**입니다.

여기서 분포가 수렴한다는 말의 정확한 뜻은 이렇습니다. 먼저 가우시안 분포에 의한 확률은 가우시안 함수를 적분해서 계산할 수 있는데요,



위는 표준정규분포 X (분산이 1인 분포)의 예시입니다.

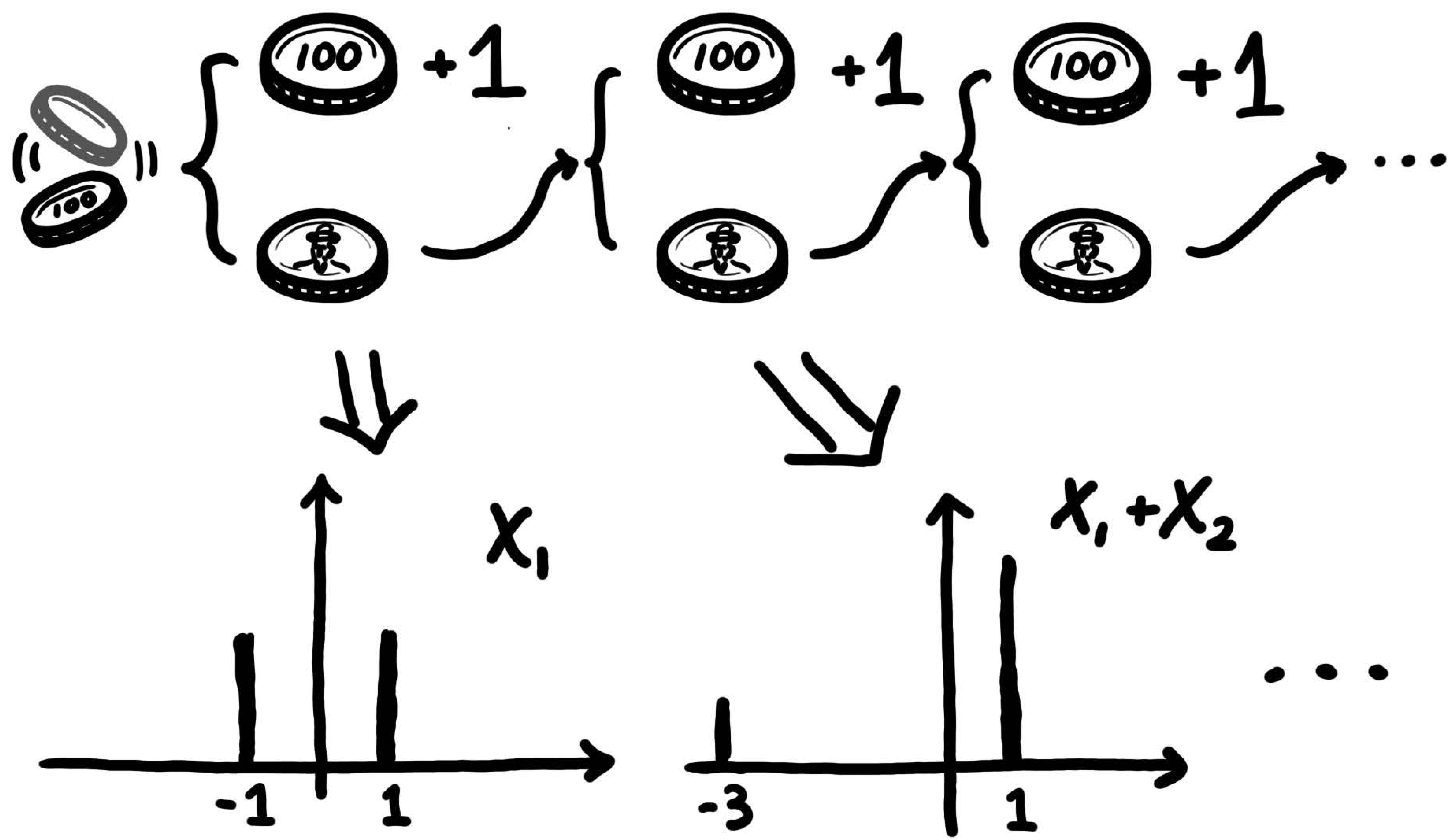




$$\mathbb{P}\left(-2 \le \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sigma\sqrt{n}} \le 1\right) \cong 81.85\%$$

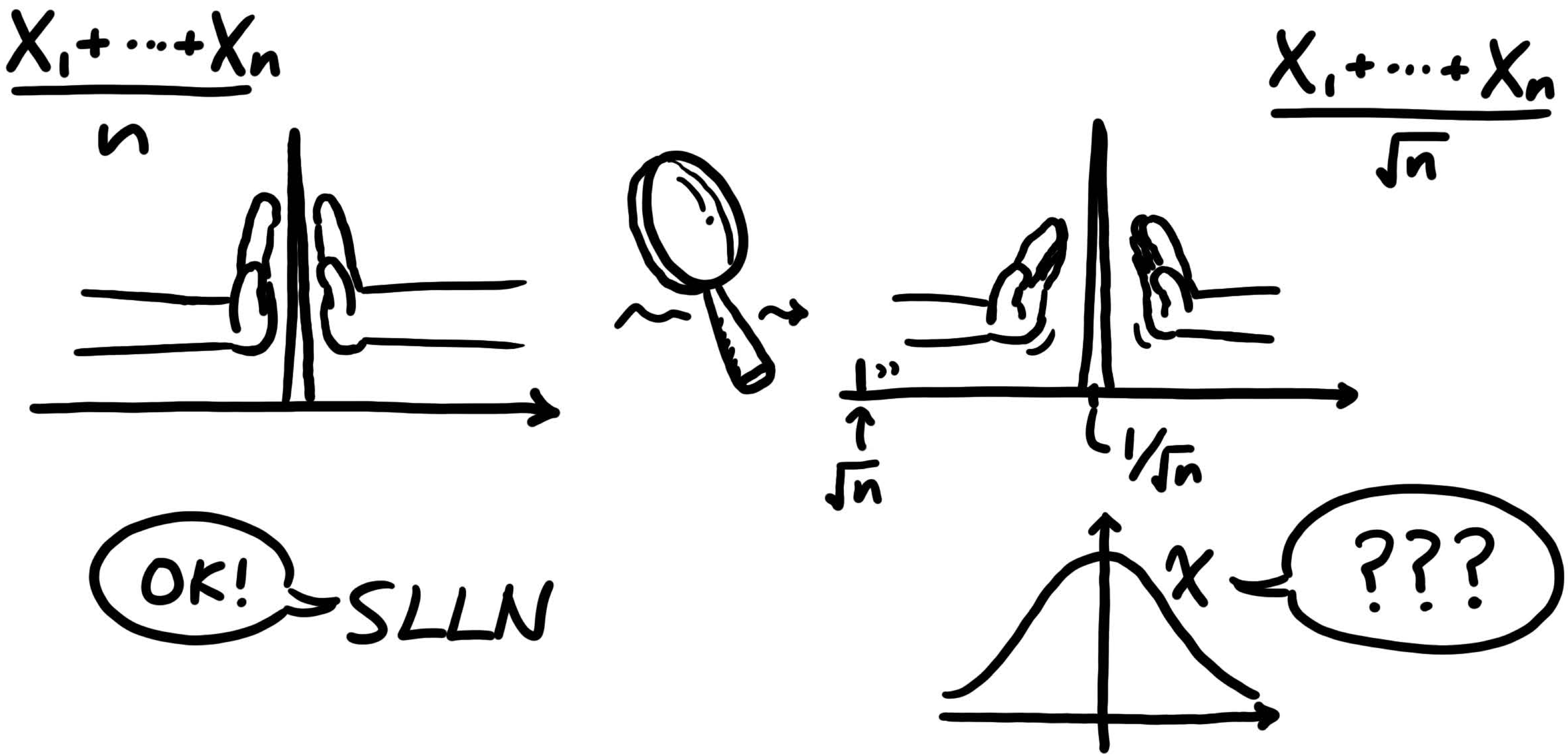
그러니 표준정규분포 확률만 잘 구해도 계산에 도움이 되는 것이죠.

이런 관점에서 보면, 우리가 맨 처음 고려했던 내기는 무언가
이 중심극한정리에 들어맞지 않아 보여요.



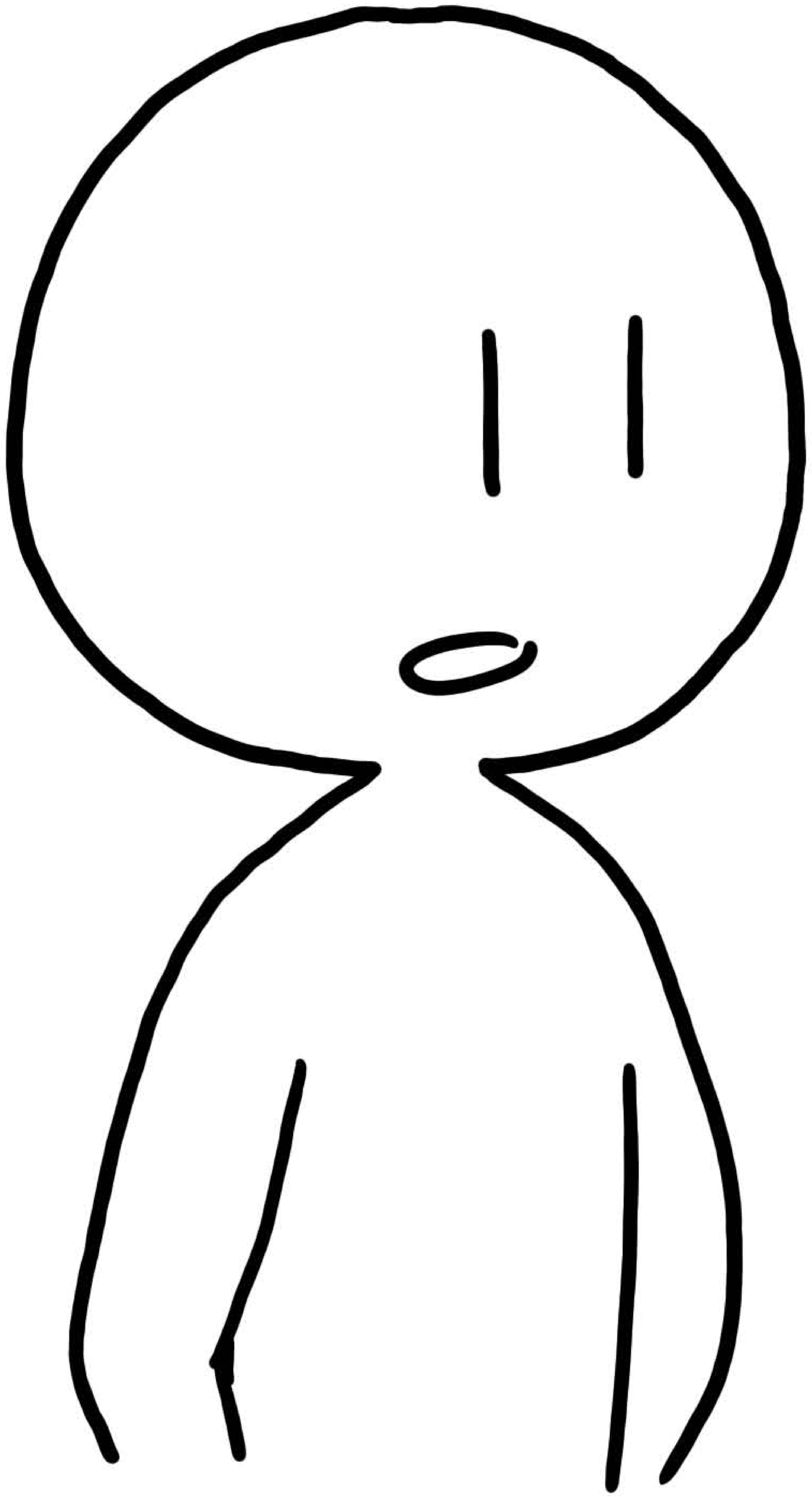
중간에 나오는 분포들은 '거의 중심'/'가장자리 조금'으로 나뉘는데요,

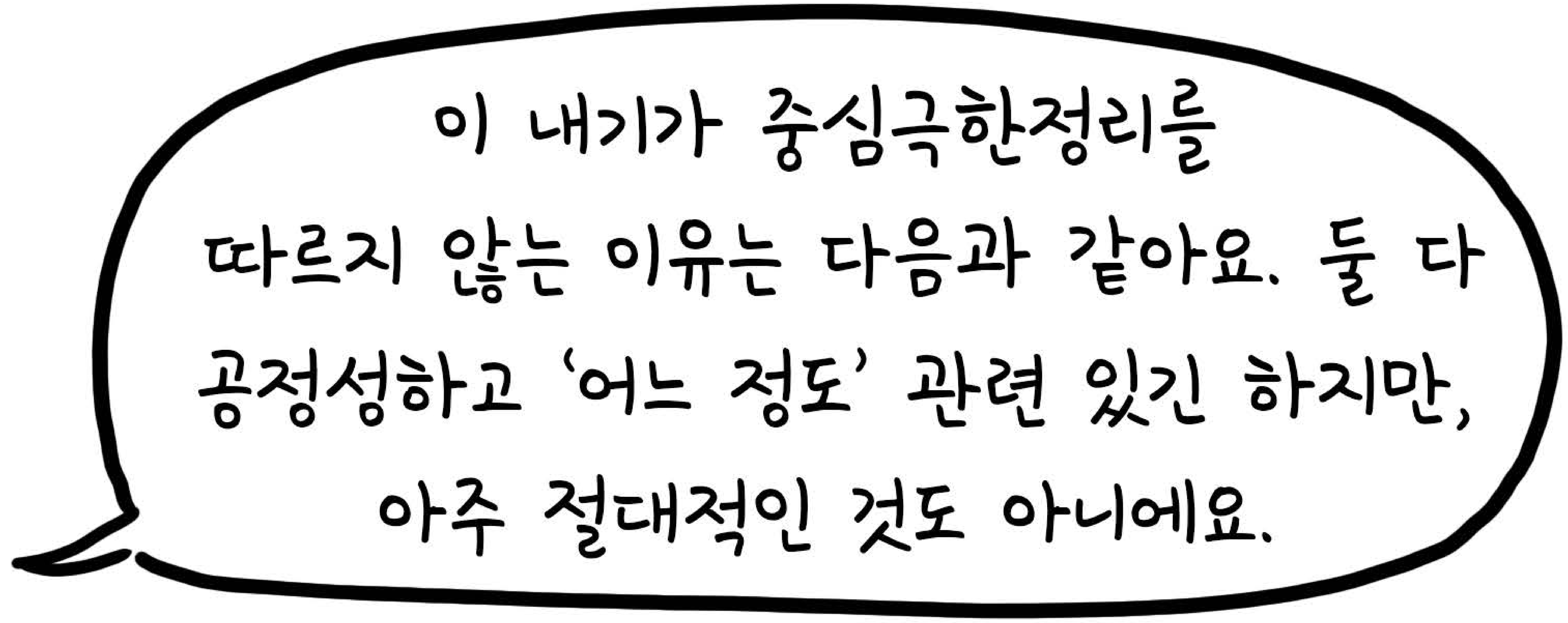
이렇게 가운데에 큰 피크가 나타나는 건 큰수의 법칙하고는 잘 어울리는 현상이지만, 그건 n 오더로 축소시켰을 때의 얘기고 $\sqrt{n}$ 오더일 때는 얘기가 다르죠.



이때는 가우시안 분포로 수렴해 가야하는데, 피크 하나만 덩그러니 있는 건 가우시안 분포와는 거리가 머니까요.

하지만 이 관찰만으로 불공평한 게임이라 단정지을 수 있을까요?

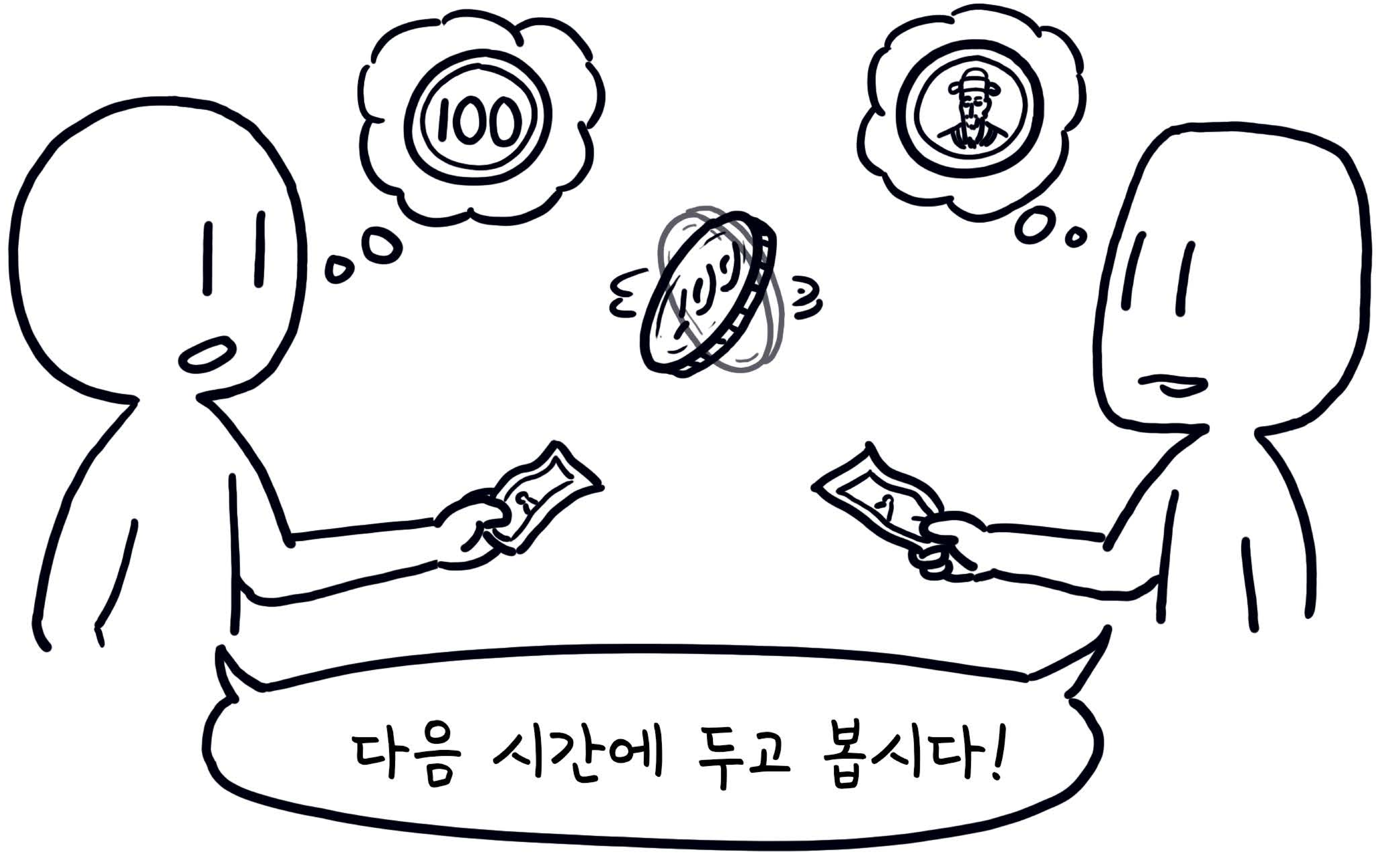




① X_i : "같은 규칙을 따르지 않음"

② <u>시행끼리 독립이 아님</u>

다음 시간에는 이 두 조건을 완화해서, 즉 중심극한정리의 범주 밖에서 '공정한 게임'을 다루는 법을 살펴볼 거예요. 원래 내기의 모순점도 같이 생각해볼 수 있을 거구요!



<참고문헌>

- S. I. Resnick, A Proabability Path. 2014, Birkhäuser.
- R. Durrett, Probability-Theory and Examples. (4th ed.) 2010, Cambridge University Press.
- W. Rudin, Real and Complex Analysis. (3rd ed.) 1987, McGraw Hill.
- R. M. Dudley, Real Analysis and Probability. (2nd ed.) 2010, Cambridge University Press.
- G. B. Folland, Real Analysis-Modern Techniques and Their Applications. (2nd ed.) 1999, Wiley.
- M. Born, E. Wolf, Principles of Optics. (7th ed.) 1999, Cambridge University Press.
- G. B. Arfken et al., Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide. (6th ed.) 2005, Academic Press.