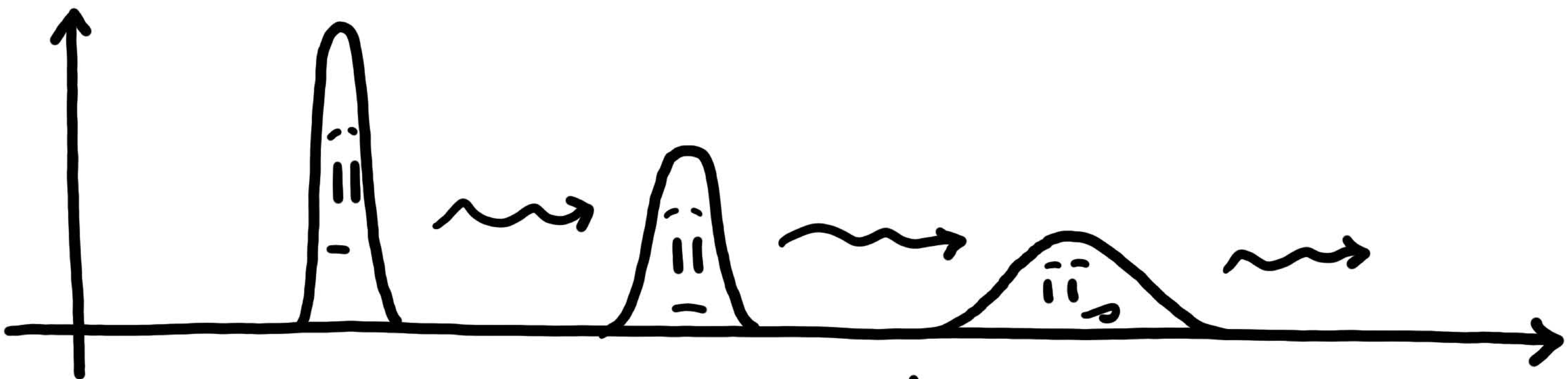
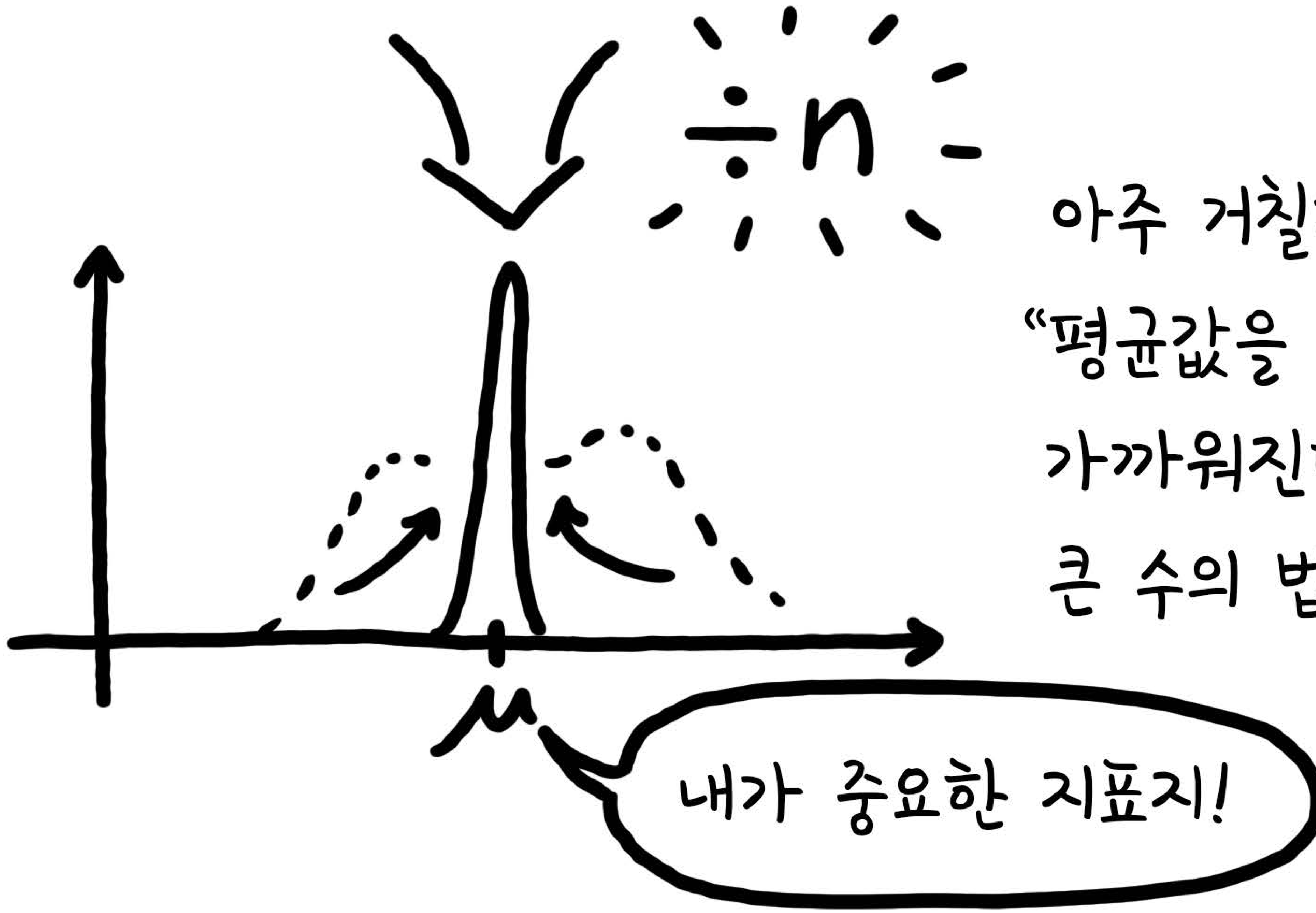

이번엔 확률 만화 합니다.
제4화: 세상에 공짜 점심은 없다


지난 시간에 이어 이번에도 '매 순간 바뀌는 확률 과정'을 계속 공부하려고 하는데요, 이번 시간에는 약간 더 일반화해 보려고 해요.

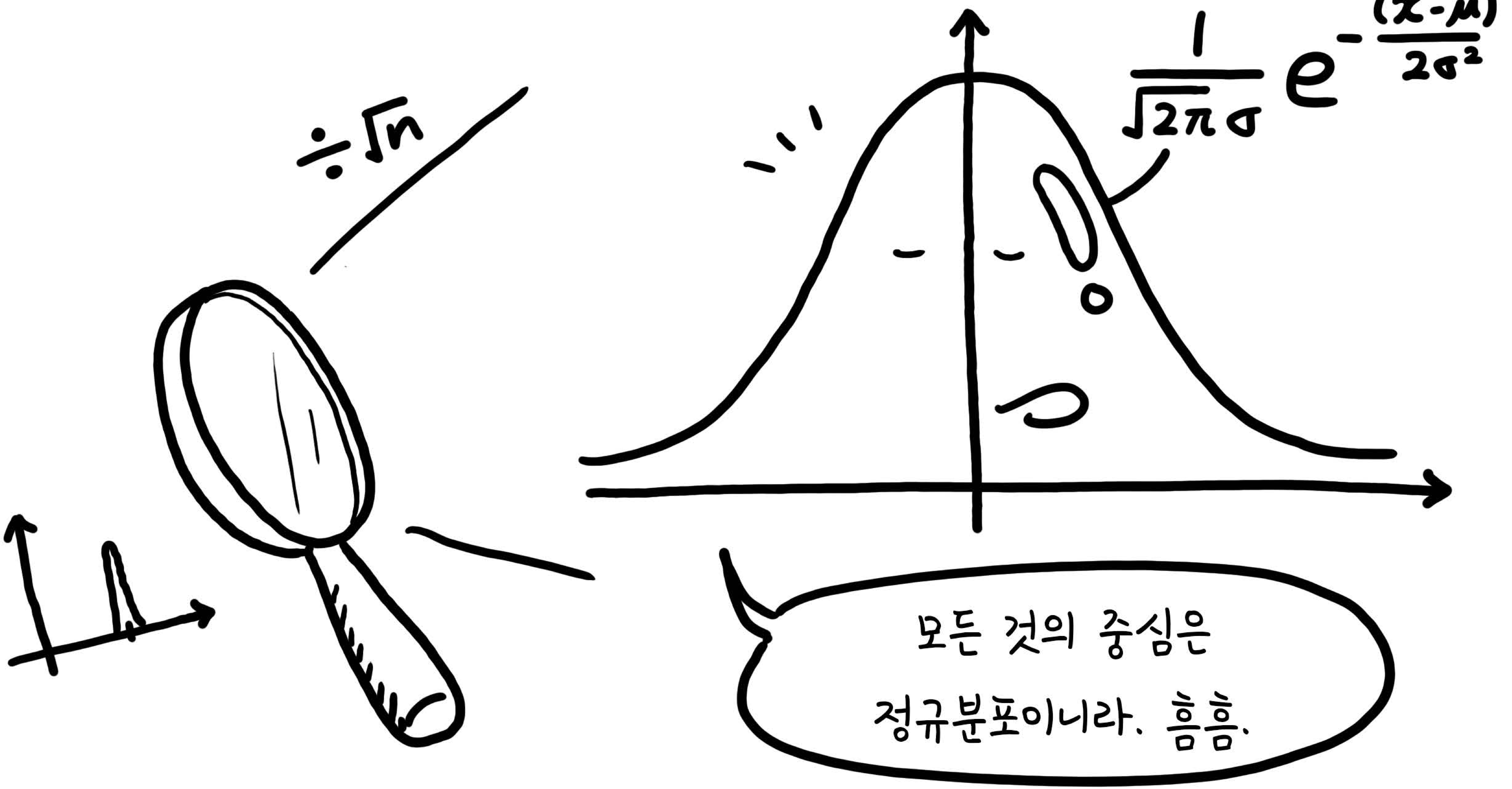
이전 화에서는 시행이 누적될 때 분포가 어떻게 바뀌는지를 살펴보았는데요,



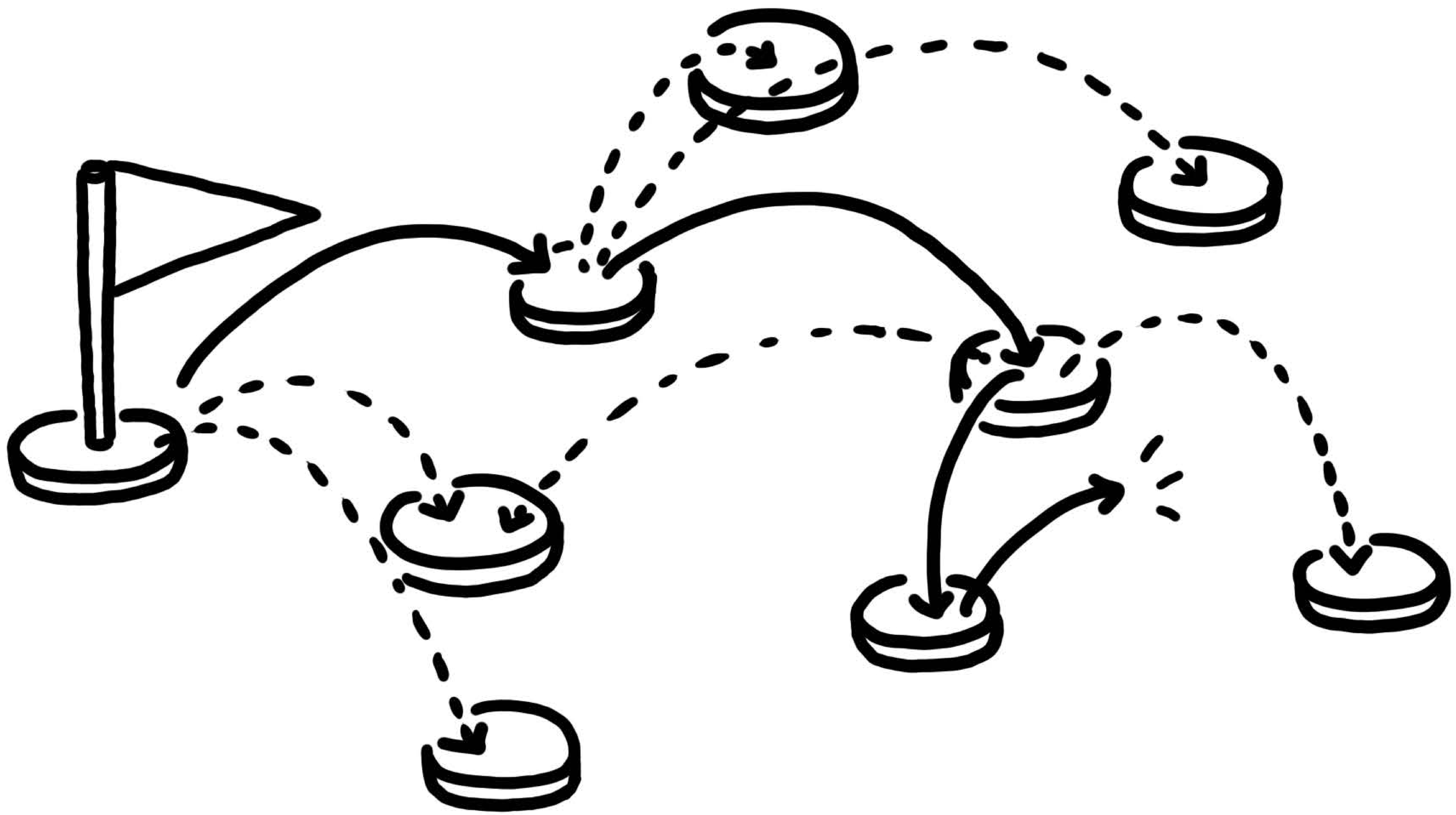


아주 거칠게 말해
"평균값을 n회 더한 것"에
가까워진다고 보는
큰 수의 법칙이 있었고요,

그리고 조금 더 정밀하게 관찰하면, 극한'값'이 아니라 극한 '분포'를 얻을 수도 있었죠.



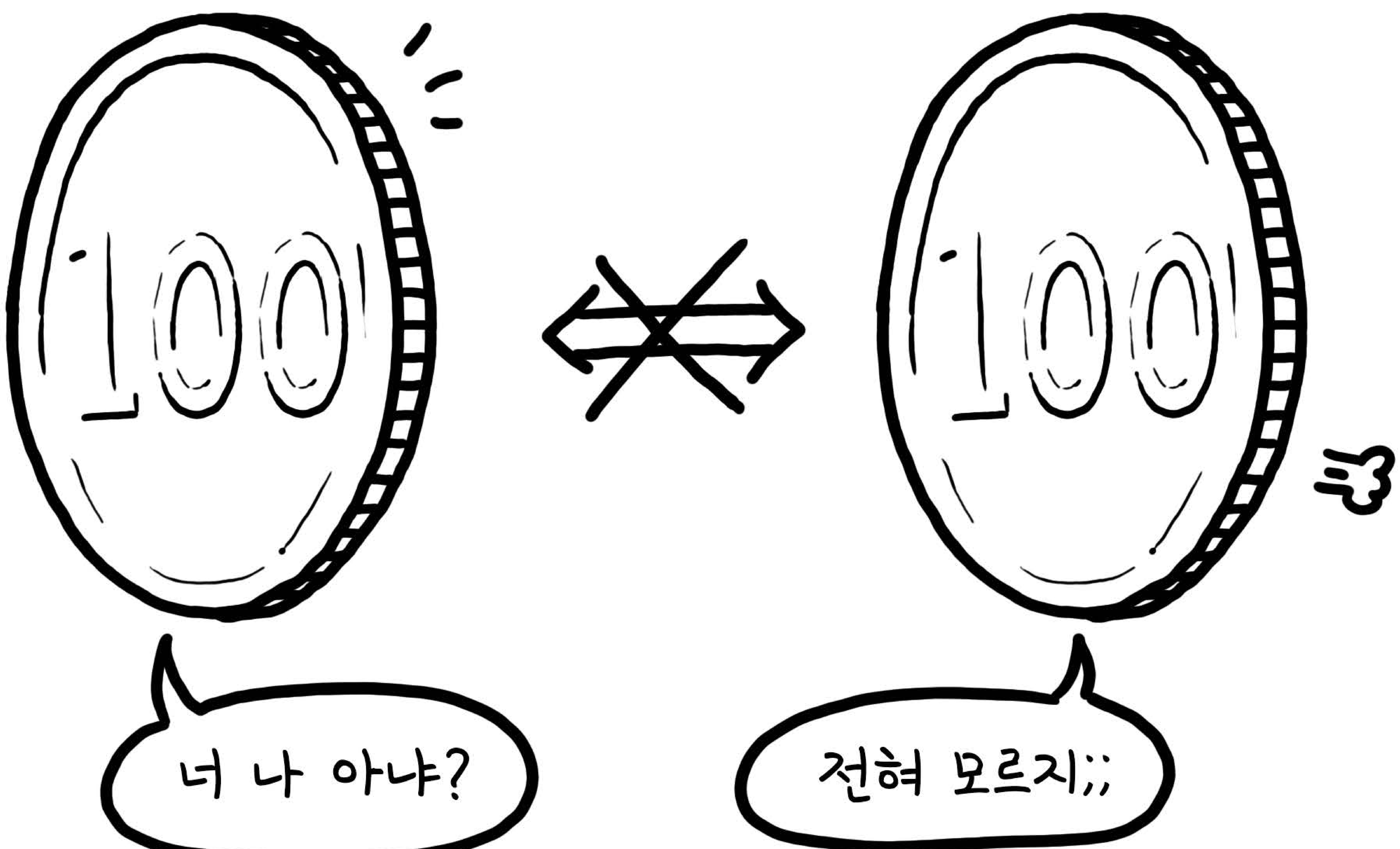
이 두 법칙은 일상 속 다양한 상황을 설명할 수 있지만,



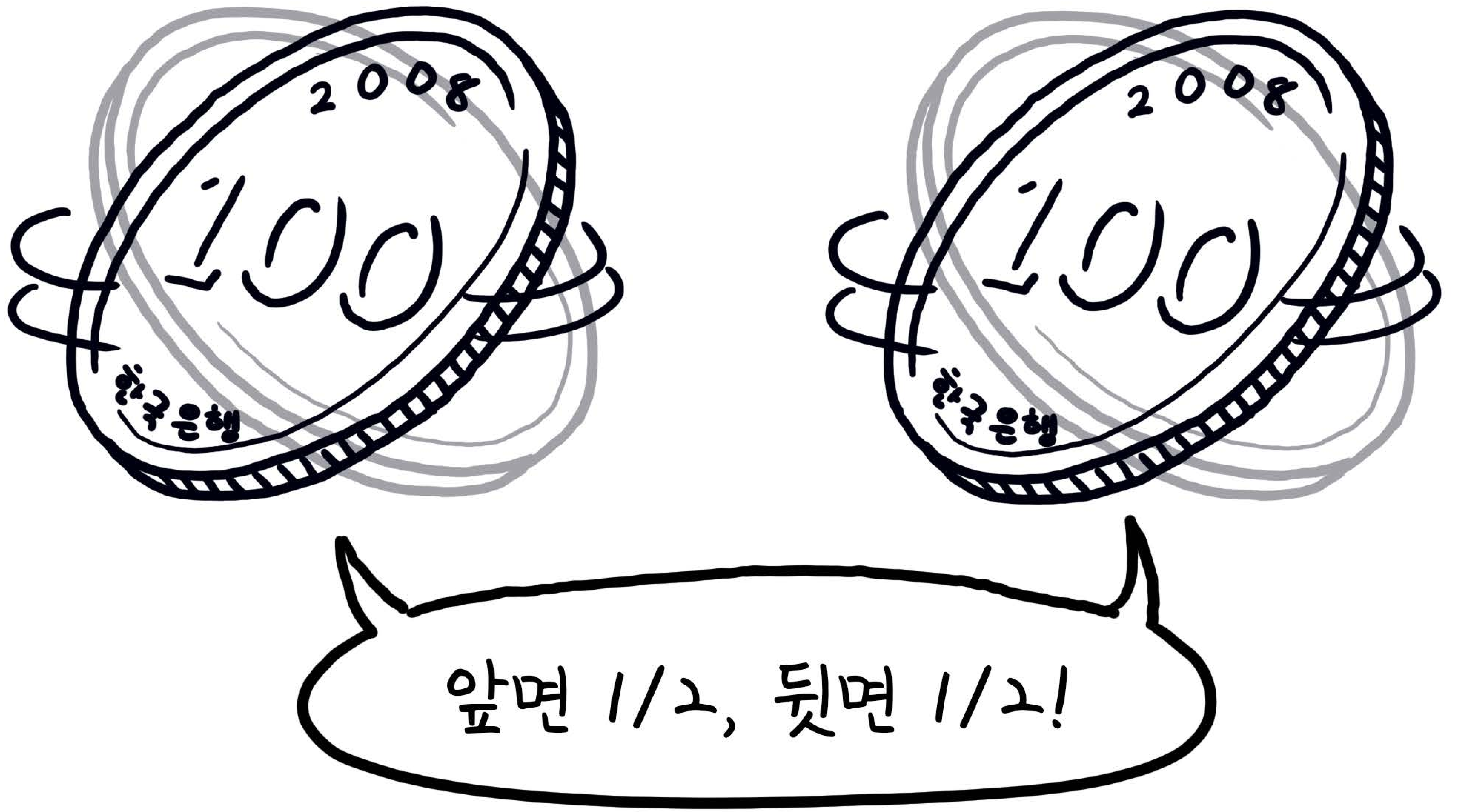
한편으로는 상당히 강한 제약이 붙어 있습니다.

일단 각 시행 결과가 다른 시행에 전혀 영향을 주지 않는

독립 상태여야 했구요,

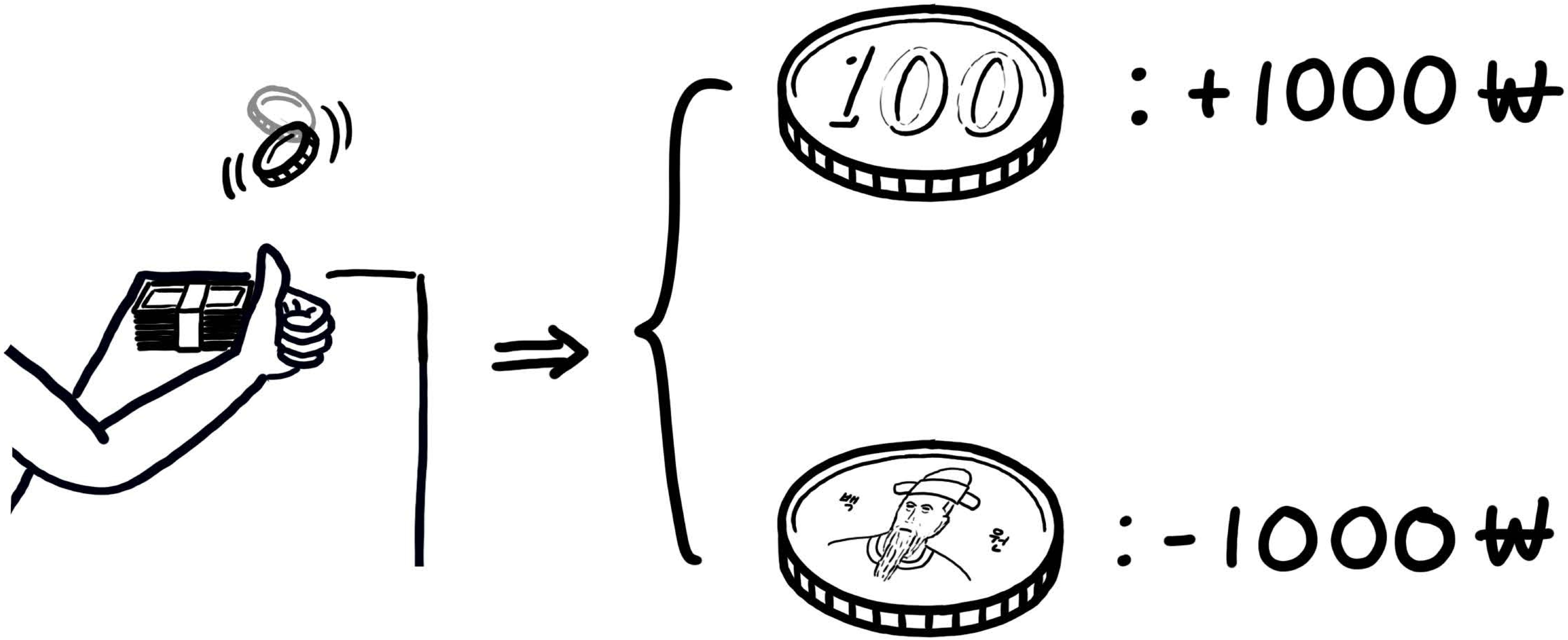


그러나 똑같은 재질의 동전이긴 해서, 던졌을 때 각 결과가 나오는 확률은 동일해야 한다는 전제도 필요했어요.



하지만 현실에는 꼭 이렇게 돌아가지 않는 과정도 있어요.

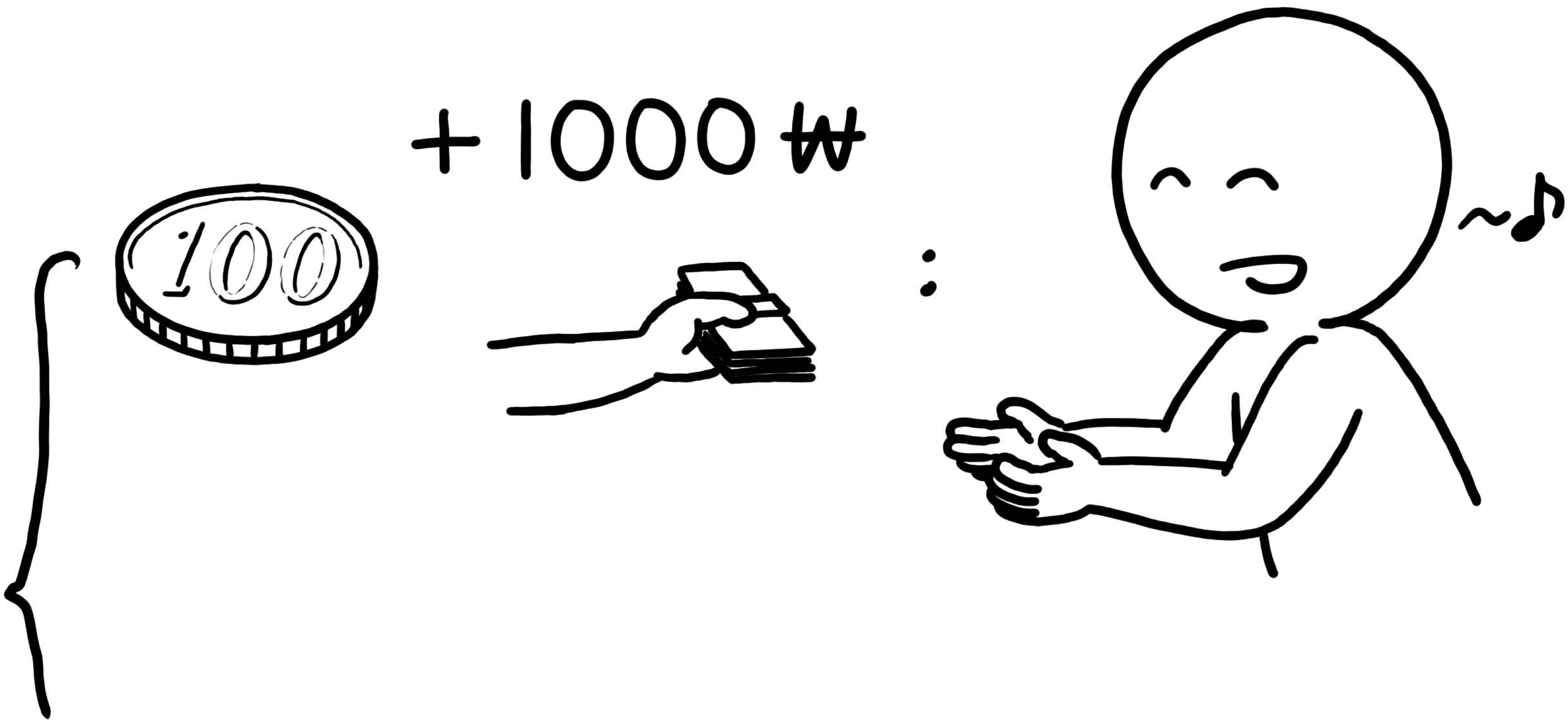
예를 들어 맨 처음 얘기했던 내기 규칙을 다시 떠올려 봅시다.



처음 동전을 던졌을 때 위와 같이 결과가 나오면,

여기서 '앞면이 나오면' 1000원을 얻는 거니 군말 않고

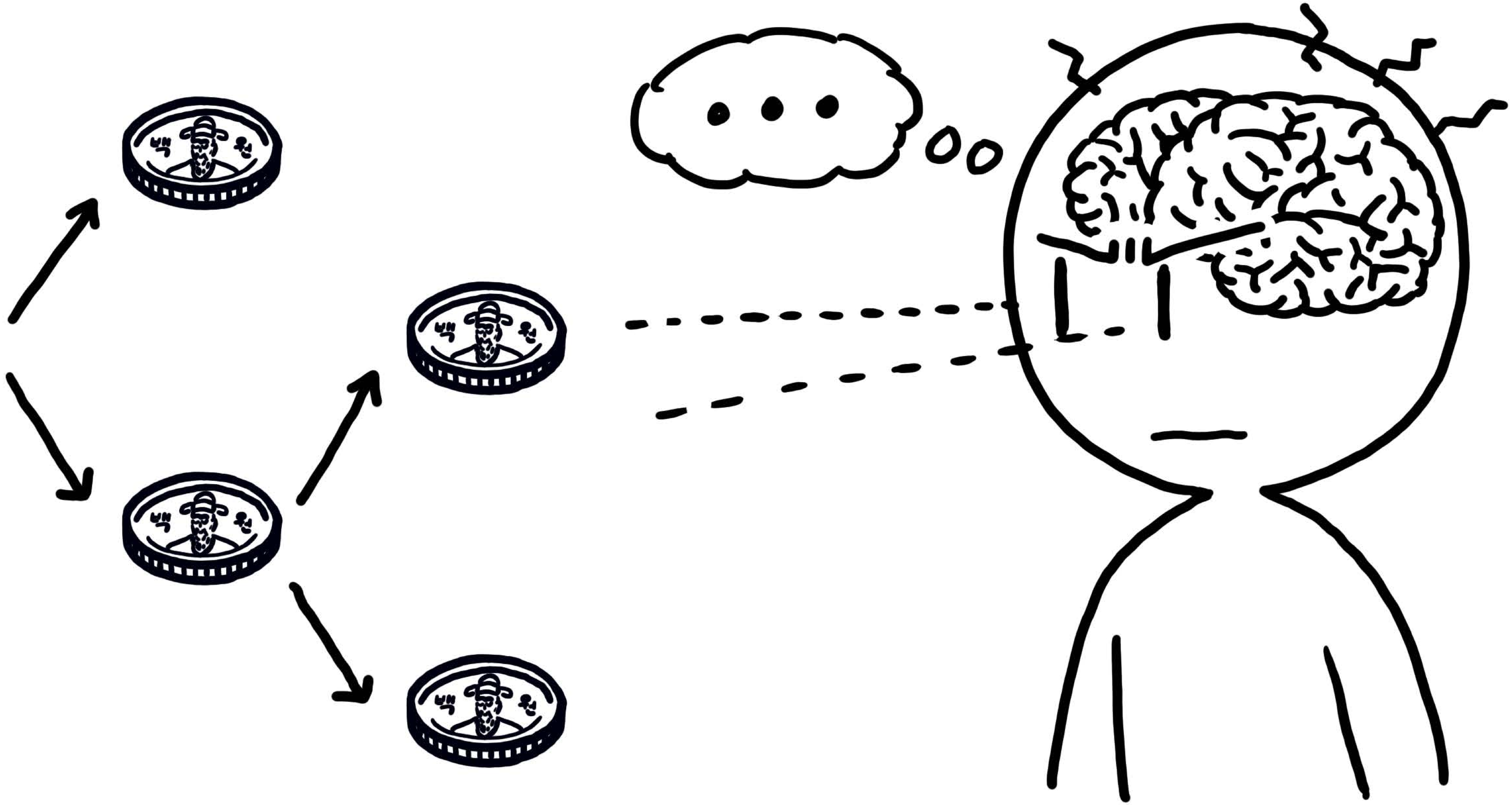
바로 받고 게임을 끝낸다고 했죠.



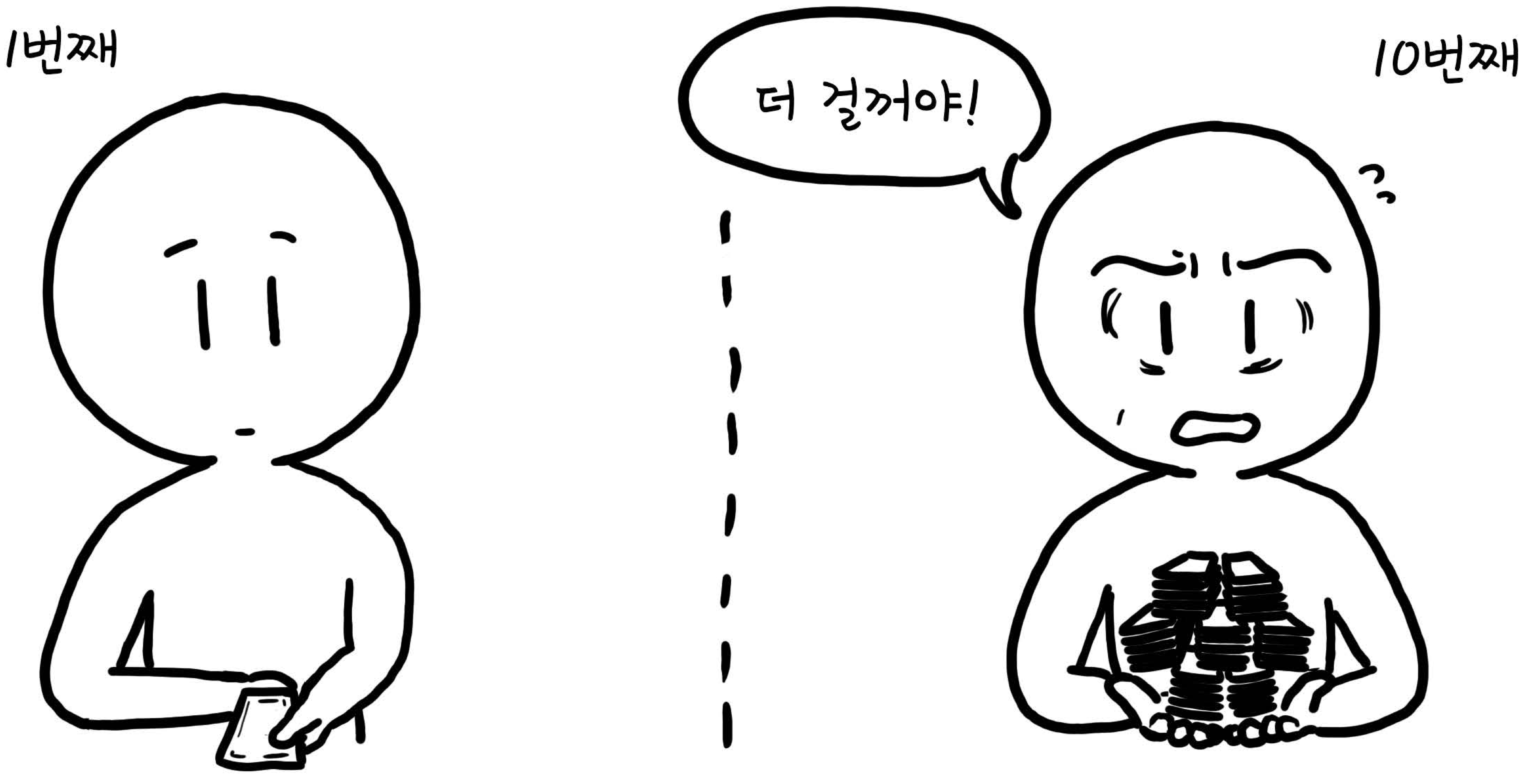

하지만 '뒷면이 나왔을 때는' 바로 승복하지 않고
판돈을 두 배로 올려 다시 내기에 임하기로 했었죠.
백
원
-1000₩
이대로 질 수는 없다!

이렇게 이전 결과를 참고해서 매 순간 의사 결정을 내린다면,

각 결정이 독립적이라고는 볼 수 없겠죠.



게다가 매 순간마다 거는 돈도 달라지니, 똑같은 시행을 반복하는 것도 아니죠.




그러니 지난 시간까지 배운
내용을 한층 더 일반화해야만 해요.
구체적으로,
① 매번 더해지는 시행이 꼭 같지 않고,
$+ X_2 \neq X_3$
X_1
$X_1 + X_2$
$X_1 + X_2 + X_3$
② 이전 결과들과 독립일 필요도 없는
상황까지 다룰 수 있으면 좋겠어요.

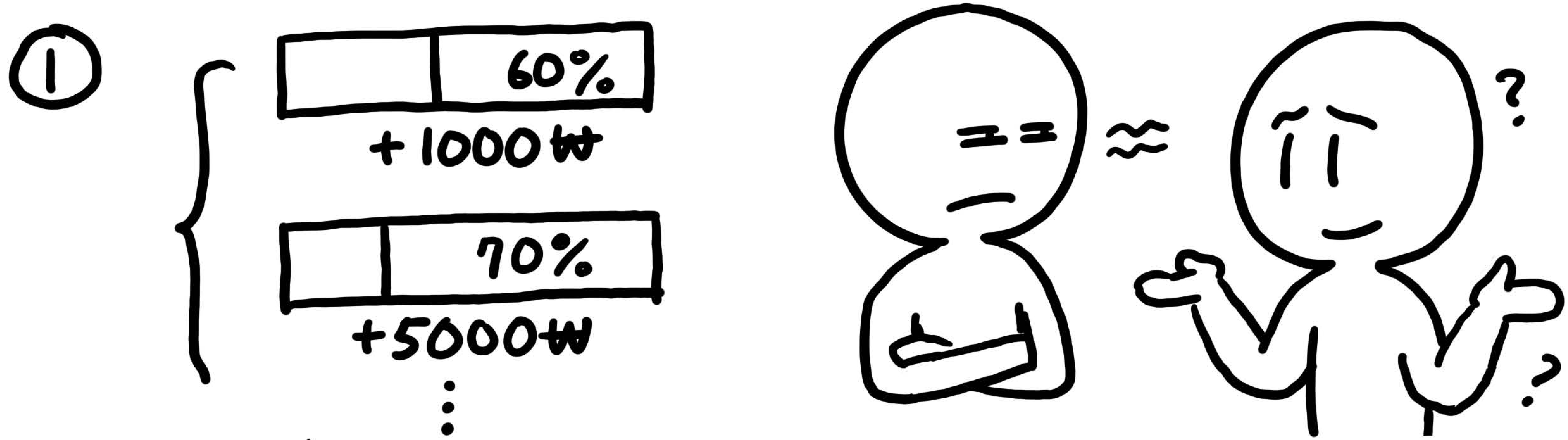
그럼에도 여전히 지켜져야 할 대원칙이 있어요. 예를 들면,

이렇게 미래를 가정하고 얘기하면 내기 성립이 아예 안 되죠.

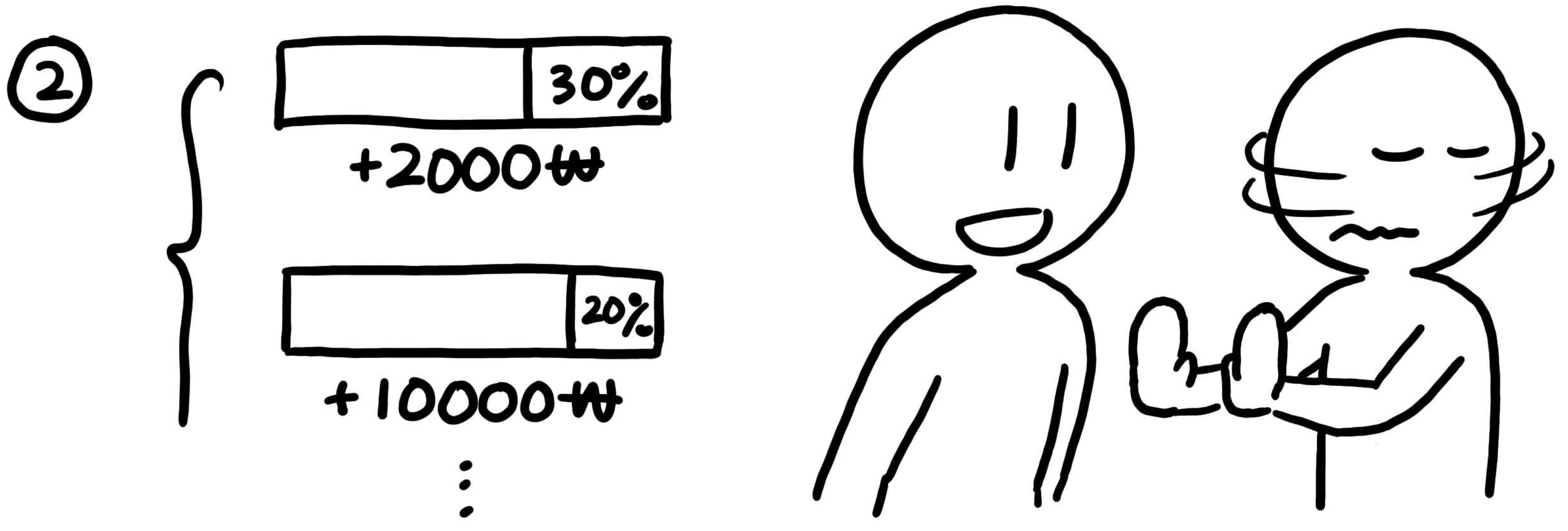

즉 시간에 따른 정보의 일방성이 성립해야 한다는 거죠.
날 보는 건 괜찮아.
이쪽으로 고개 돌리지 마!
$\oplus X_1$
$\oplus X_2$
$\oplus X_3$
X_1
X_1+X_2
$X_1+X_2+X_3$
$X_1+X_2+X_3+X_4$
매순간 그 직전까지의 정보는 이용해도 되지만 이후 정보는 쓰면 안됩니다. 그건 정말 사기니까요!


어쨌든 예전 결과를 참고하면서 전략을 바꾸는 건 가능하단거죠.
1회차
2회차
3회차
4회차
소계
-15000₩
이번 한번에 본전 만회하자!
과연 그렇게 쉽게 될까?
여기서 세 가지 종류가 있는데요,

만약 각 상황별 승률이 모두 내기 참가자에게 유리하게 되어 있거나,

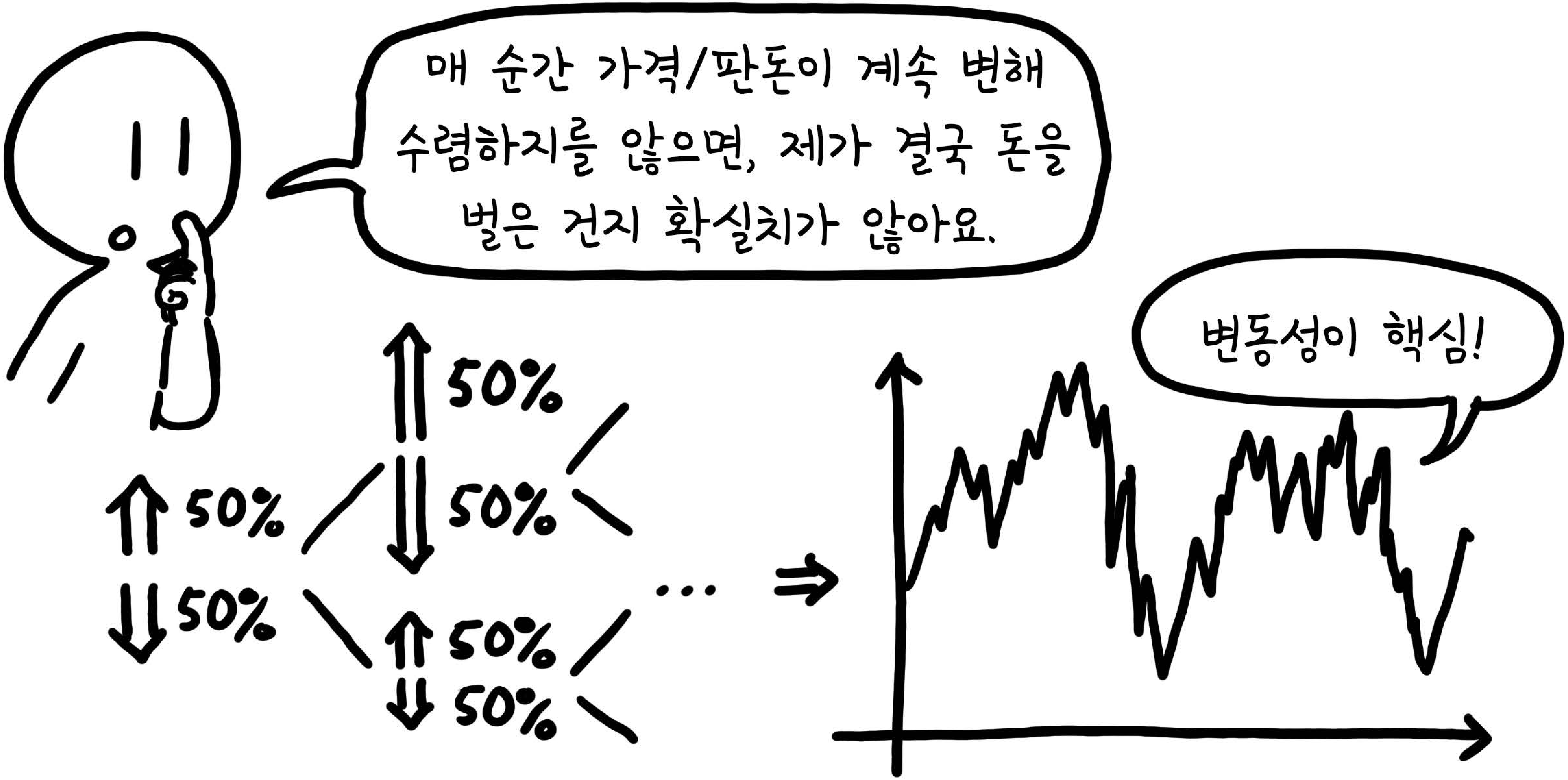


반대로 내기 주최자에게 모두 유리하게 되어 있으면 역시 내기 성립이 어렵겠죠?

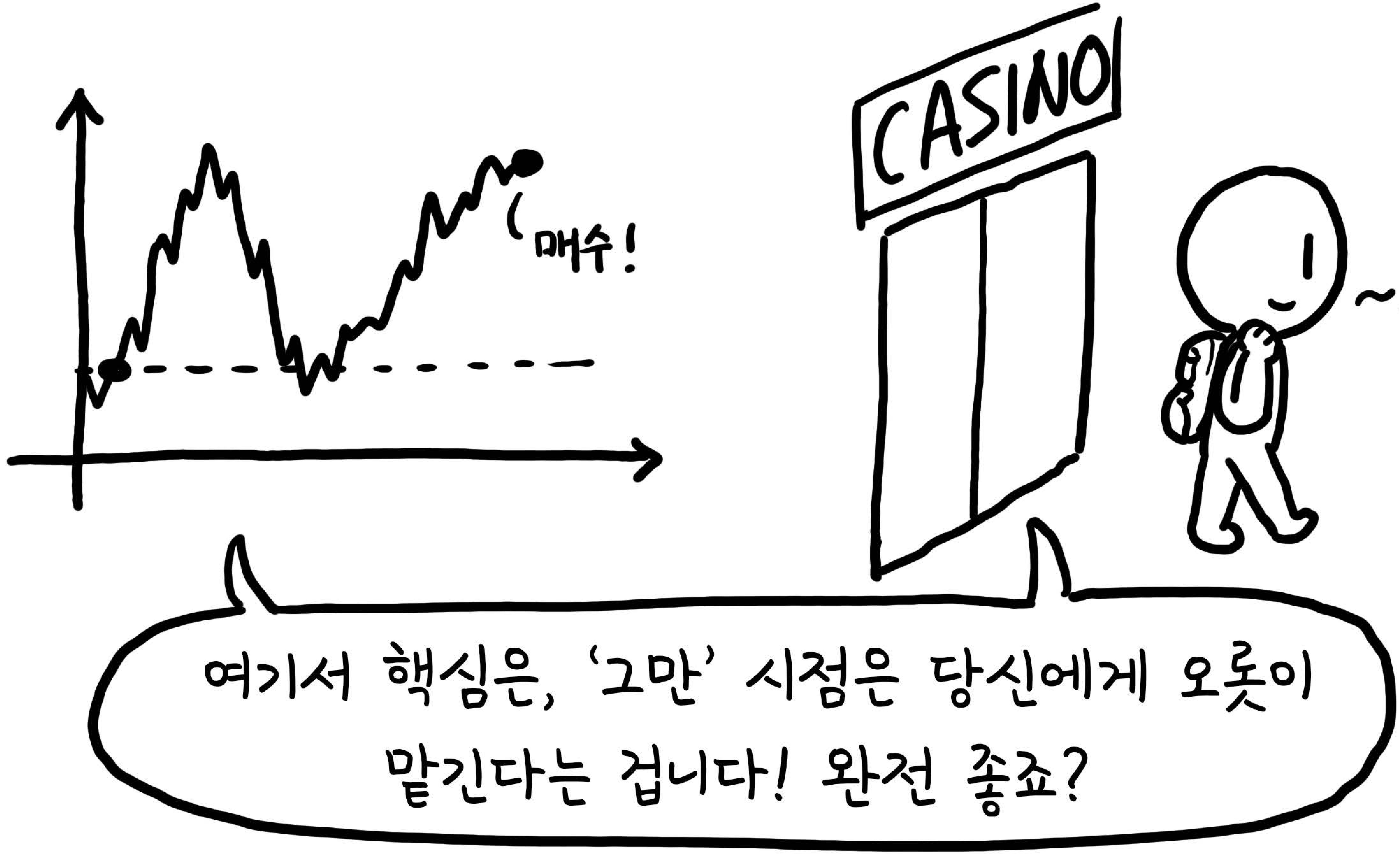



적어도 각 경우에 승률이 같게 구색이라도 맞춰야 내기가 성립하겠죠?
50%
3000₩
50%
20000₩
여기서 첫번째와 같이 (참가자 입장에서) 항상 유리한 상황을 **서브마팅게일**, 두번째처럼 항상 불리한 상황을 **수퍼마팅게일**, 세번째처럼 항상 균형이 맞춰져 있는 상황을 **마팅게일**이라고 부릅니다.

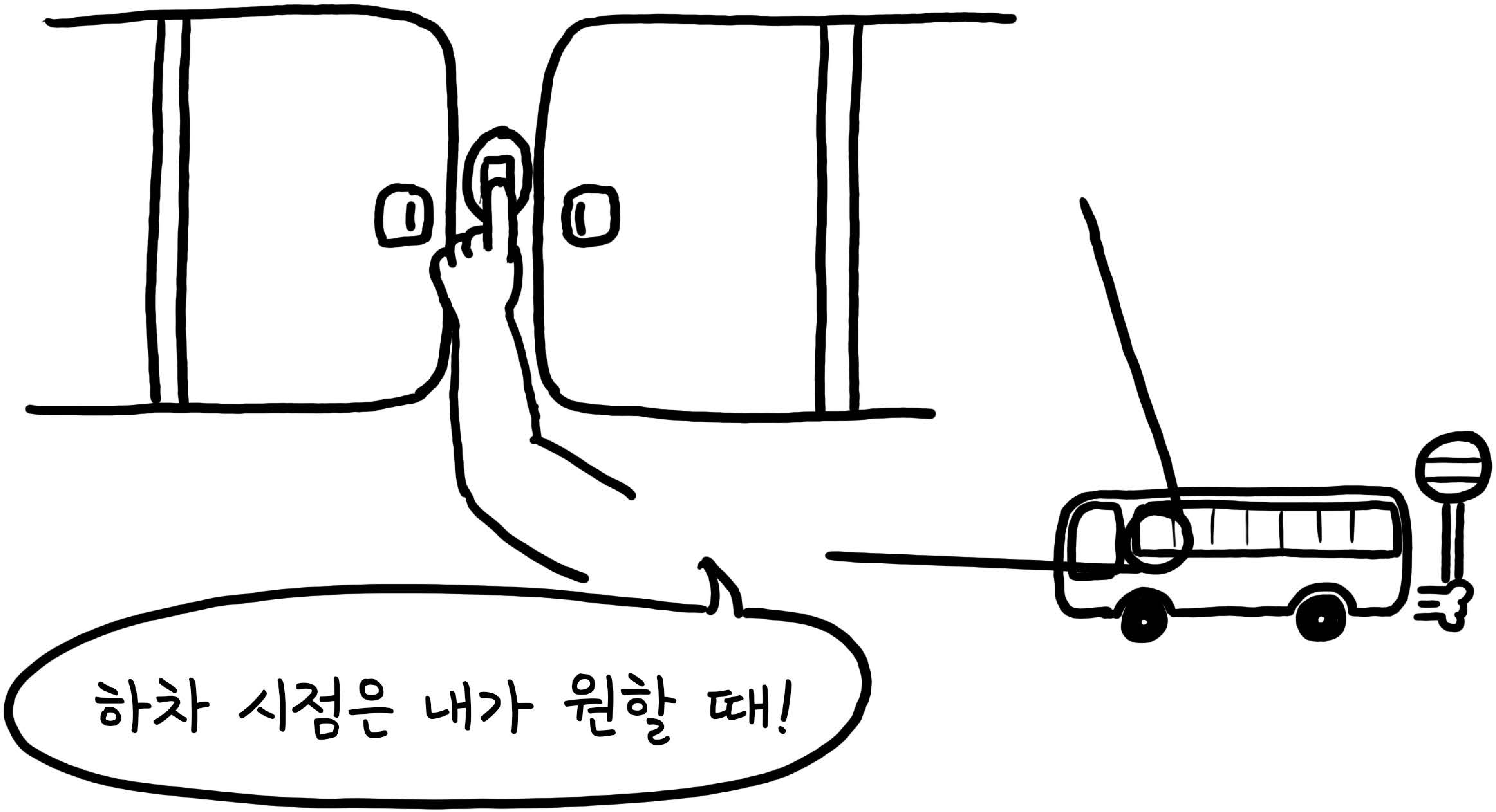
방금 살펴본 내기나, (이론적인) 주가 모형 등이 이런 마팅게일로 설명될 수 있습니다. 다 좋은데, 한 가지 문제가 있어요.



그렇기 때문에 참가자가 '그만'을 외칠 수 있다는 것까지 설계에 포함되어 있죠. '그만' 시점을 기준으로 손익 정산을 하는 거구요.



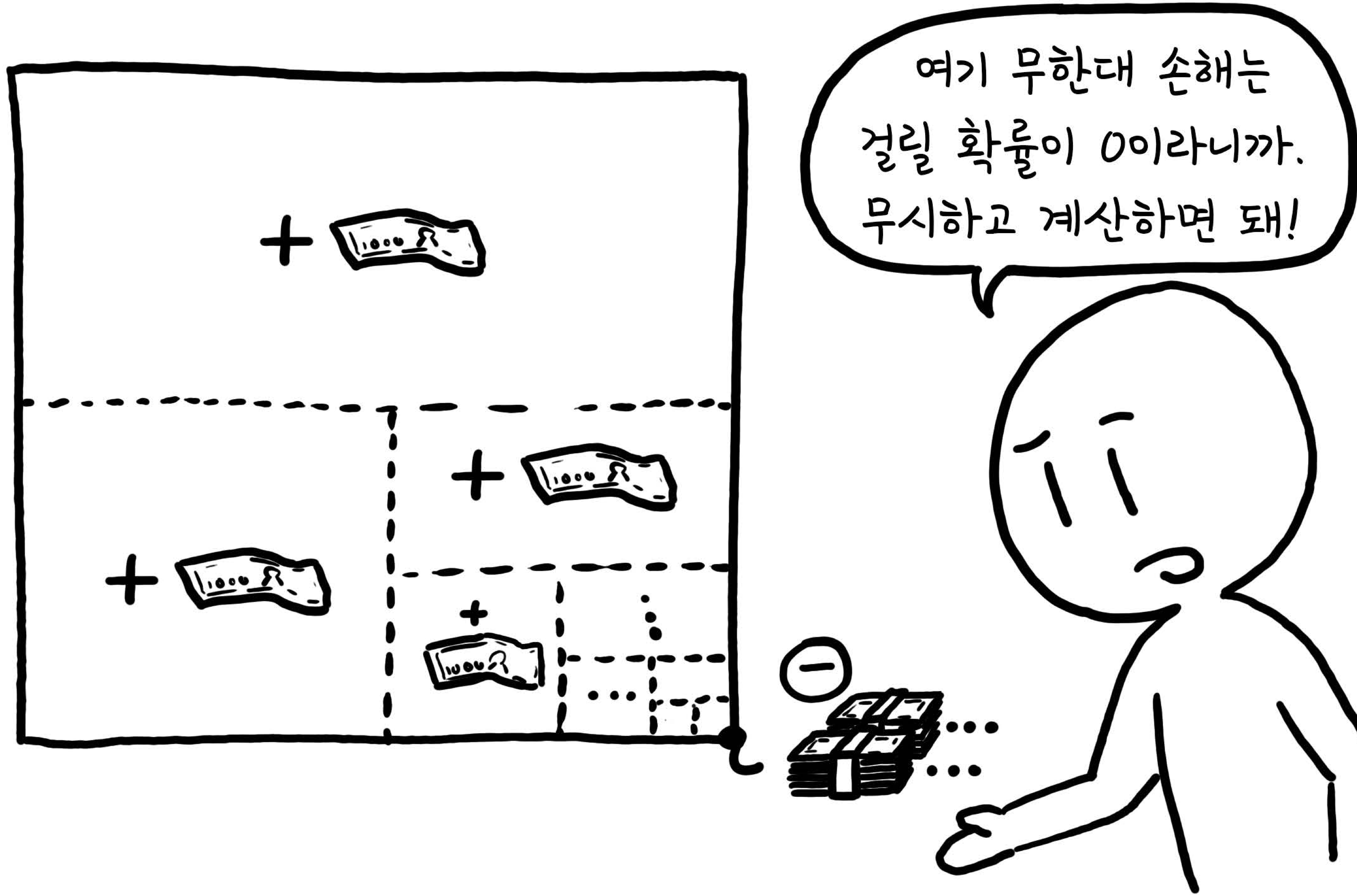
마치 승객이 하차벨을 누르면 자기가 원하는 정류장에 멈춰
내릴 수 있는 것과 같죠. 이걸 '정지 시간'이라고 부르겠습니다.




이 정지 시간이 참가자에게 온전히 달려 있다는 건 중요한 점이죠.
CASINO
몇 번 말씀드리나요. 앞면 나올 때까지만 버티시면 무조건 벌고 간다니까요? 우린 손해 봐도 중간에 스탑 못 해요!
선택권이 오롯이 당신한테만 있는 거예요. 완전 비대칭적인 게임인데...


사실 '현실적인' 내기에서는 이건 참가자한테 더 유리하진 않아요.
언뜻 보기에는 매 순간 공평한 내기에, 참가자가 타이밍까지 정하면 약간 더 유리하다는 느낌이 들 수 있지만, 사실은 여전히 유리하지도 불리하지도 않은 상황이에요.
그러니 이걸로 참가비를 내는 건 바보같은 생각이에요!

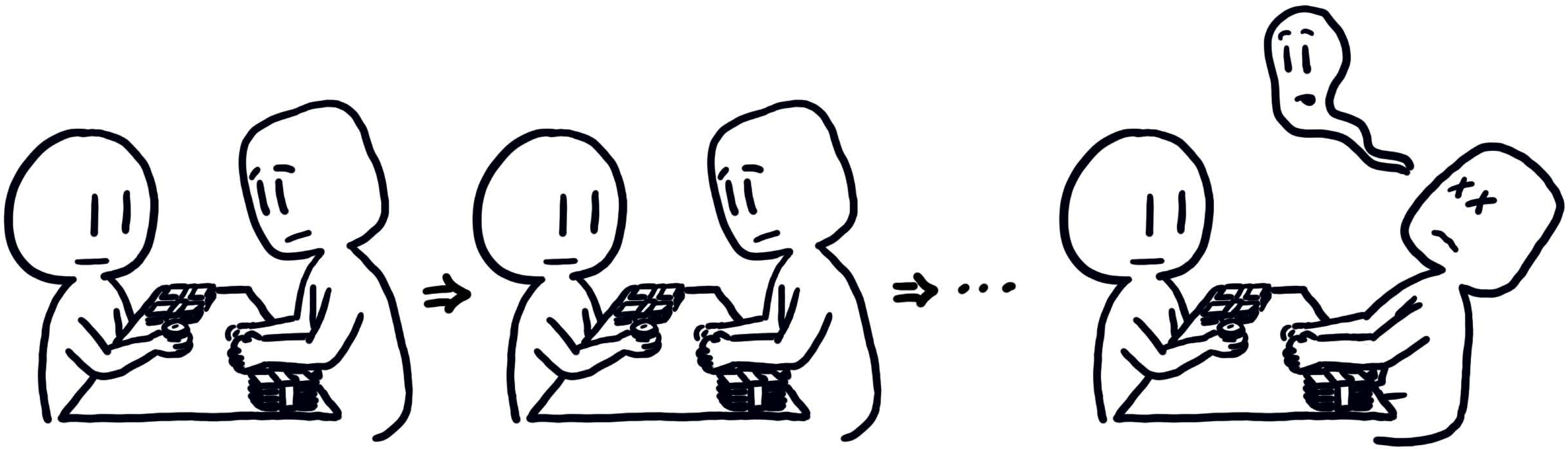
그러면, 아래 분포의 기댓값이 +1000원이 아닌 걸까요?



아뇨, 이 기댓값은 +1000원이 맞아요. 문제는 다른 데 있죠.

문제는 이 전략을 쭉 수행할 수 있냐는 거죠. 첫 번째 문제점은,

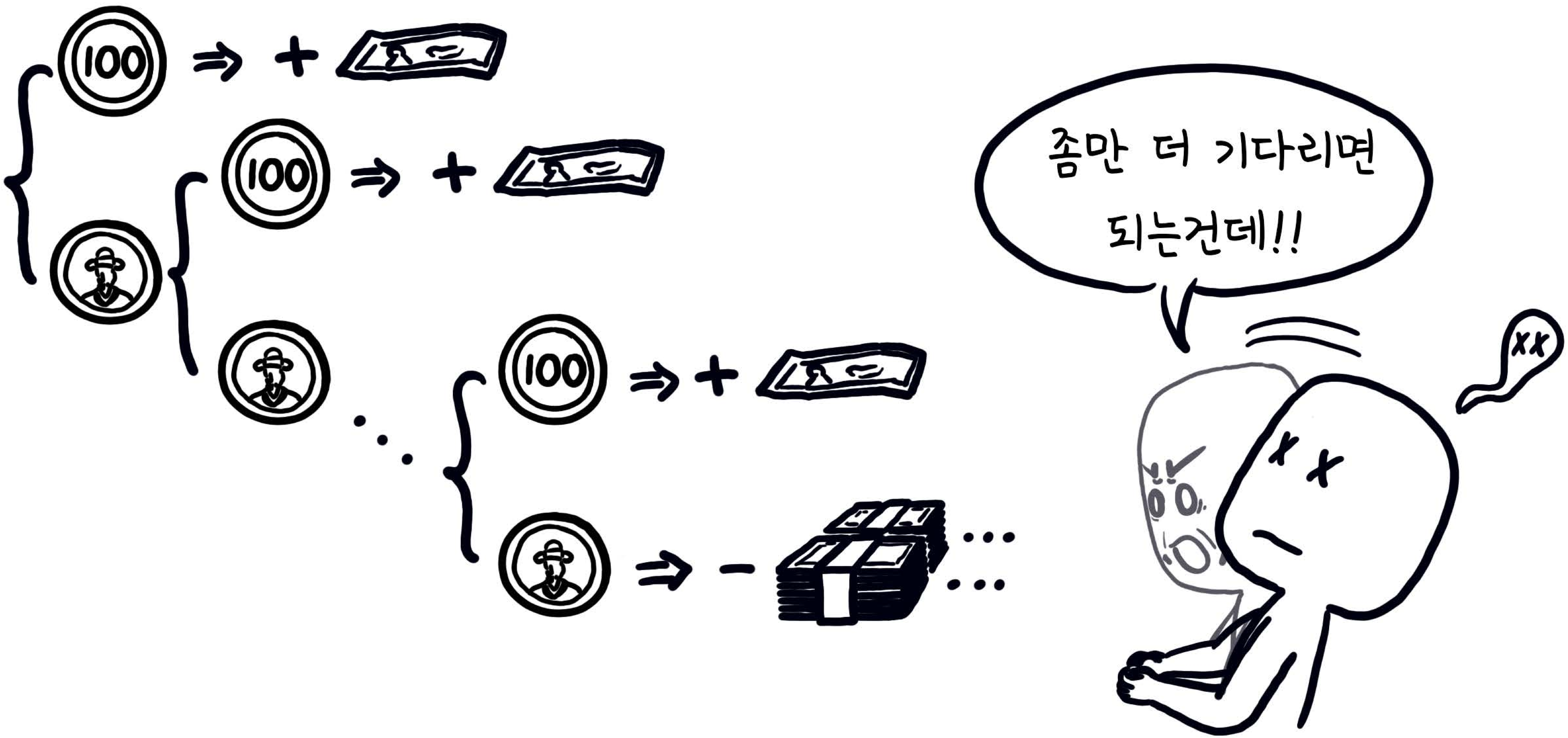
① 내기를 한없이, 영원히 계속할 수는 없다는 겁니다.



일단 참가자도 주최자도 수명은 모두 유한할 테니까요.

50년이 지나든 70년이 지나든, 언젠가는 내기는 끝납니다.

그러면 아무리 원대한 계획을 세우고 베팅하고 있었어도,



자기가 원했던 상황에 본전을 회복 못하고 빚만 남길 수도 있죠.


일단 여기서 원래 전략은 물거품이 된 것 같지만, 주최자 측이 쉽게 포기하지 않는군요.
아니 뭐, 자식이나 대리인한테 계속 시키셔도 되구요... 아무튼 간에 버티시기만 하면 이득이라니까요? 왜 안 하시지?
으음, 어떻게든 계속 시키려 하는군요.
근데 문제는 이것뿐만이 아닙니다.

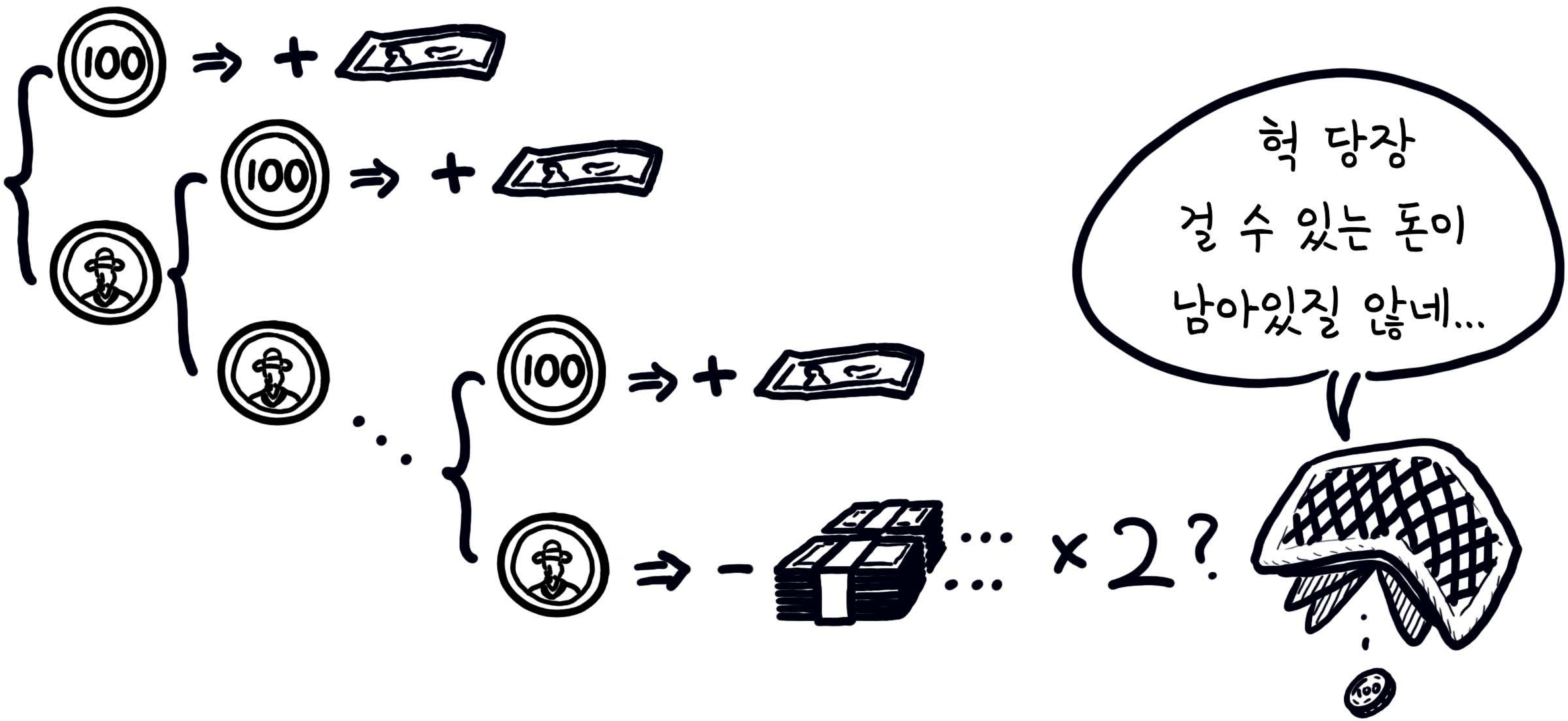
자식한테 대대손손 물려준다 하더라도, 고작 1000원 얻기 위해...
+1000₩
수익률 = 투자 수익 / 투자 기간
∞!
?
수백 년을 이것만 할 순 없겠죠.

운 나쁘면 몇 대에 걸칠 수도 있겠지만, 평균적으로는 합리적인 시간 내에 끝나는 내기여야 할 가치가 있겠죠.

흠, 평균 두 번 안에 끝난다니 다행이긴 한데 이게 다가 아닙니다.

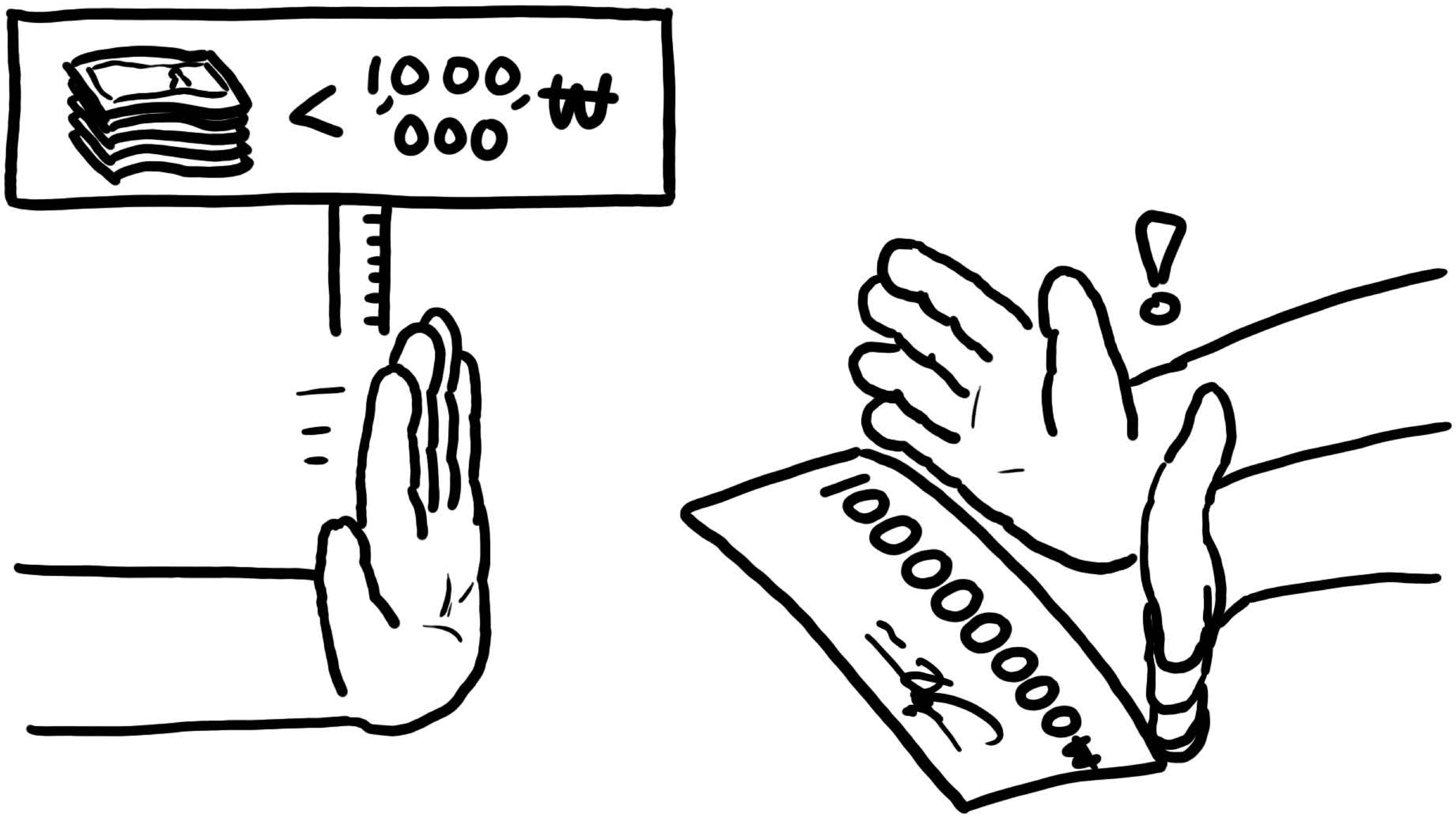

또다른 문제점은 바로 '판돈 액수'입니다.
좋아요. 내기는 얼마든지 그만두거나 계속하셔도 되는데... 판돈은 넉넉히 준비하신 거겠죠?
?
생각해 보니 우리 전략은 판돈을 지수함수적으로 키우는 것인데요,

그러면 돈을 무한정 가지고 있지 않는 이상, 어떤 순간부터는
'베팅하고 싶어도' 베팅할 수 없게 되겠죠.



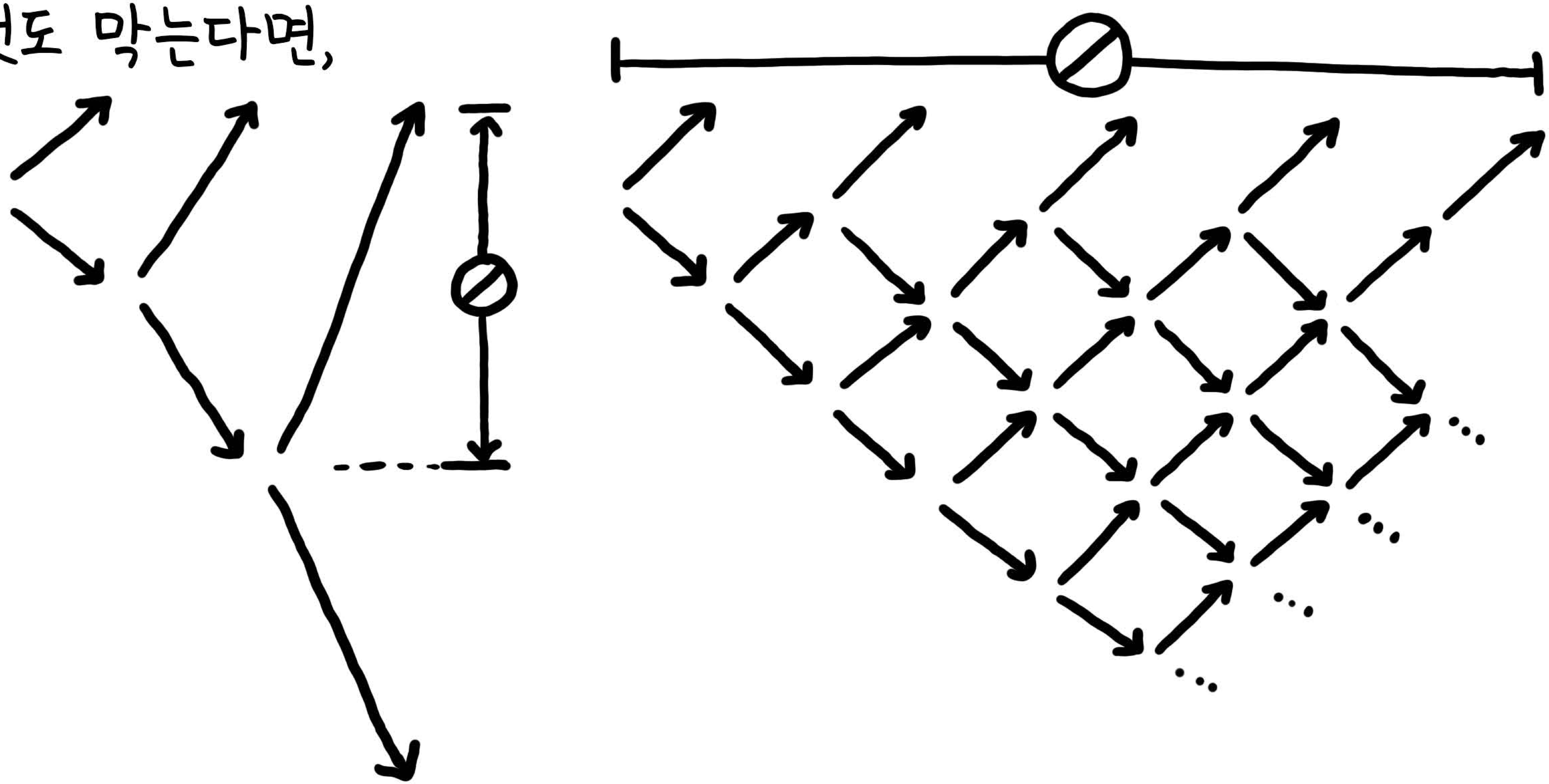
(물론 돈이 무한정 많았다면 내기를 할 필요가 애초에 없었을 거구요!)

물론 주최자 입장에서도 판돈이 지나치게 커지면 파산할 위험이 있죠. 그래서 현실적으로 매번 걸 수 있는 판돈의 액수 상한이 정해져 있어요.



이렇게 되면 매번 일정량밖에 걸 수 없으니, 손해가 났을 때 메꾸려면 정말 오랫동안 버텨야 할 수도 있겠네요.

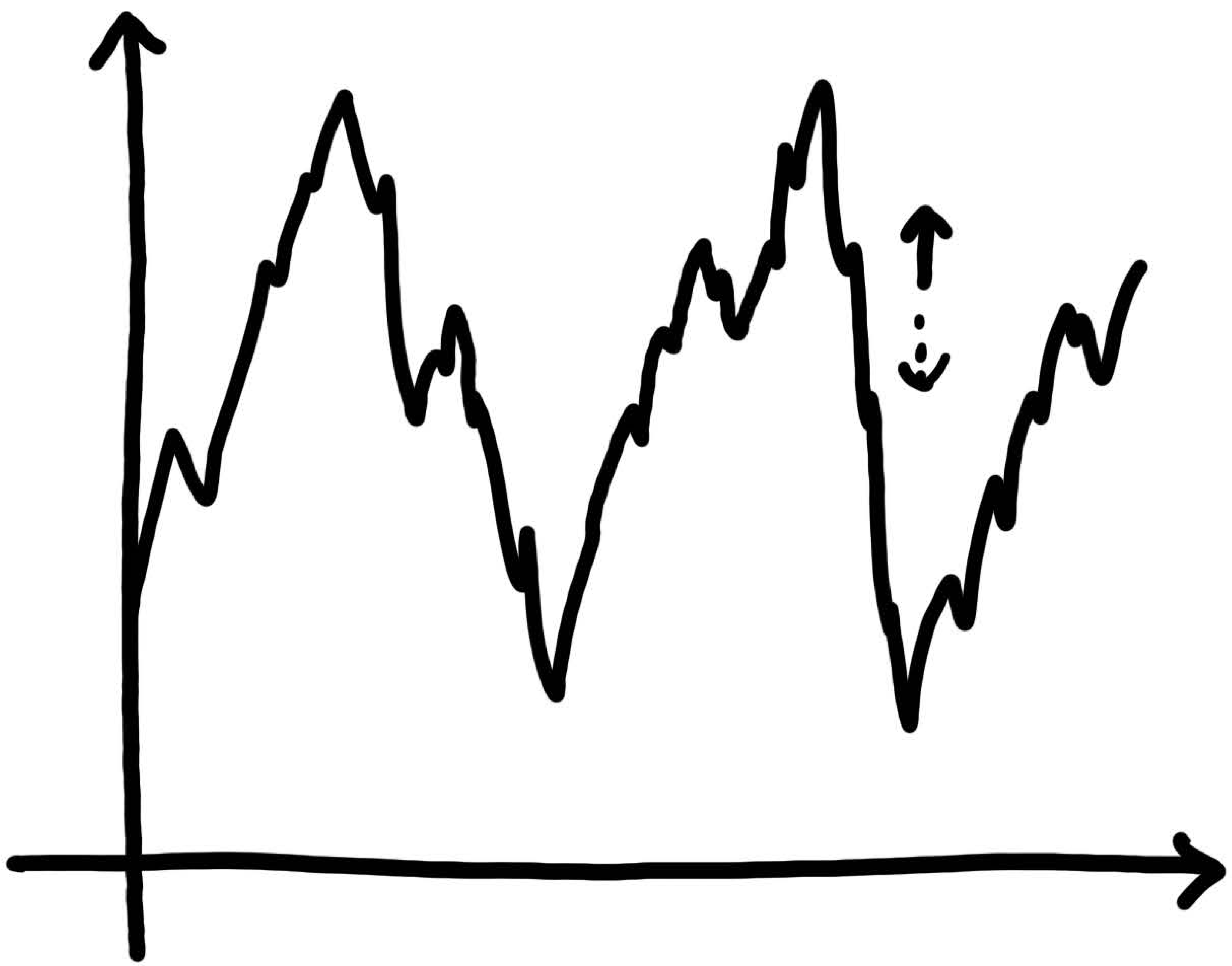
이렇게 한번에 화끈하게 거는 것도 막고, 너무 판이 길어지는 것도 막는다면,

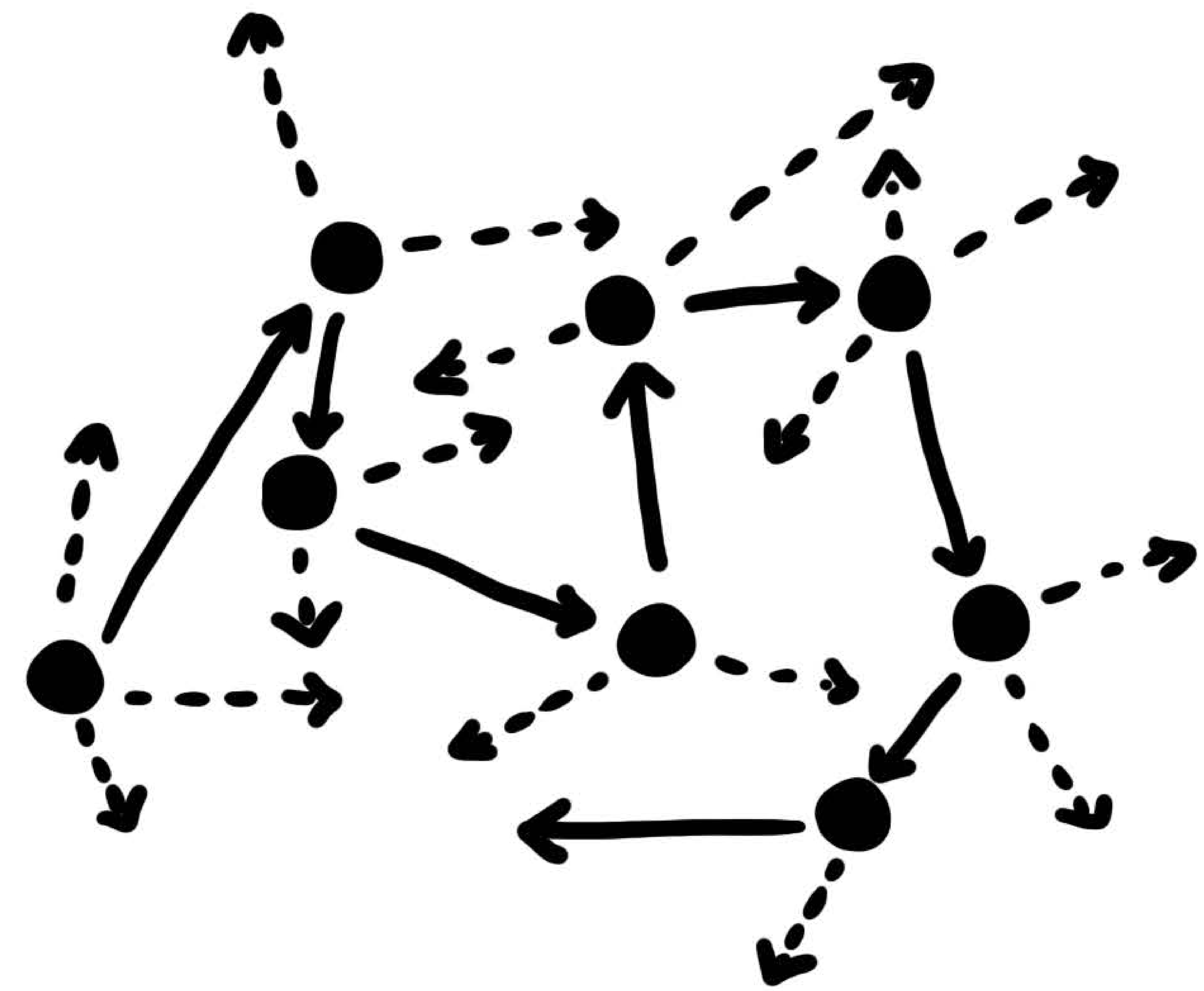


매 판이 공평한 마팅게일에서는 '정지 시간'을 참가자가 정해도 결코 더 유리하지는 않다는 정리가 있어요.


직관과 다르게, 참가비같은 걸 내는 건 사실 손해라는 거죠.
순 사기였구만!
.....
방금 설명한 얘기는 선택적 정지 정리라는 것인데, 마팅게일을 공부할 때 유용한 정리입니다.

특히, 내기뿐만 아니라 시시각각 확률적으로 변하는 많은 상황들을 마팅게일로 설명할 수 있습니다. 주가 얘기도 있었고, 분자의 브라운 운동 등도 여기 포함되죠.





물론 현실상의 현상과 이론적인 모형이 무조건 같지는 않지만, 이론적으로 공부하기에 좋은 토대가 된다는 얘기입니다.


그런 의미에서, 다음 시간부터는 랜덤워크나 브라운 운동 같은 예시들을 공부하려고 합니다.
그러면 조금 이따 다시 얘기해 보겠습니다!

<참고문헌>

- S. I. Resnick, A Proabability Path. 2014, Birkhäuser.
- R. Durrett, Probability-Theory and Examples. (4th ed.) 2010, Cambridge University Press.
- W. Rudin, Real and Complex Analysis. (3rd ed.) 1987, McGraw Hill.
- R. M. Dudley, Real Analysis and Probability. (2nd ed.) 2010, Cambridge University Press.
- G. B. Folland, Real Analysis-Modern Techniques and Their Applications. (2nd ed.) 1999, Wiley.