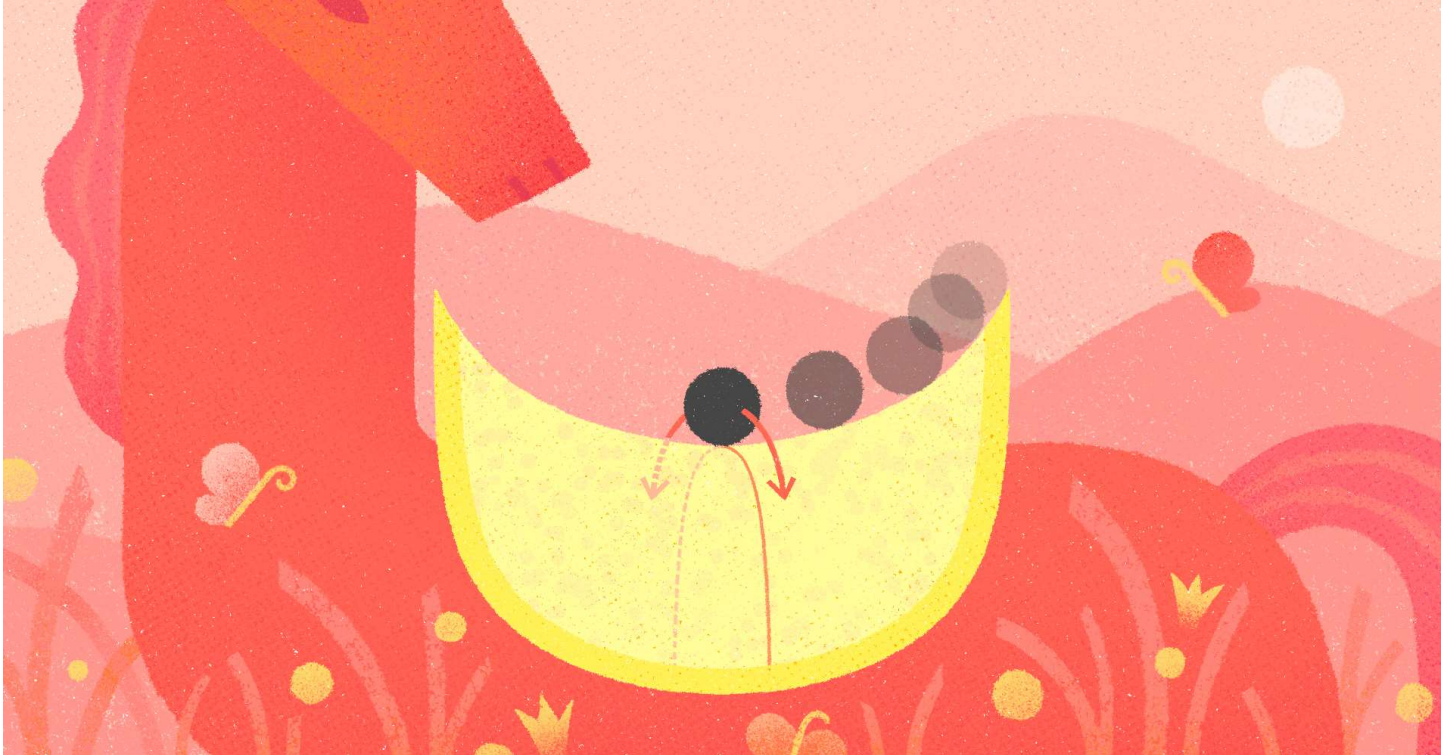


# 곡면의 열방정식 [4]: 손가락 위에서 돌아가는 농구공

2021년 10월 27일

최경수



농구공을 한 손가락 위에 돌려서 세우는 묘기를 한 번쯤 보셨을 것입니다. 손끝에서 도는 공은 잠시라도 균형을 잃으면 떨어져 버립니다. 농구공 이외에도, 공책이나 정반 등 다양한 물건을 손가락 위에 세울 수 있지만, 마찬가지로 균형을 잃는 순간 떨어져 버립니다. 비슷한 원리로 [그림1]의 점  $A$  위에 올려진 둥근 공을 생각해보겠습니다. 공이 정확히 산의 정상인  $A$  위에 있다면 움직이지 않겠지만,  $A$  주변의 다른 점 위에 올려진다면 아래로 떨어질 것입니다. 예를 들어  $A$ 의 약간 왼쪽에 놓는다면 골짜기  $B$ 로 떨어질 것입니다. 한편, 골짜기로 떨어진 공은 좌우로 흔들어도 다시  $B$ 로 돌아올 것입니다. 따라서  $A, B$  모두 기울기가 0인 평형 상태에 있지만,  $A$ 는 불안정하고  $B$ 는 안정되었다고 할 수 있습니다.

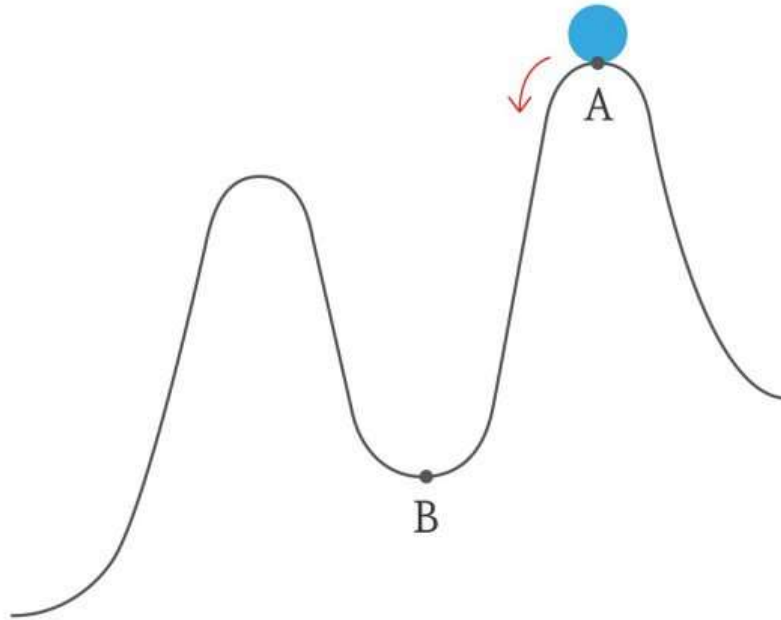


그림1  
MIMONG

다른 예로 완벽한 전후좌우 대칭을 가진 말안장 모양의 곡면 [그림2]를 생각해보겠습니다. 곡면 위의 점  $C$ 는 기울기가 0이 아니므로, 그 위에 놓인 공은 왼쪽으로 떨어질 것입니다. 그런데 이상적인 상황을 고려한다면, 완벽한 전후 대칭 때문에 공은 좌우로만 움직일 수 있어서, 결국 점  $D$ 에 멈출 것입니다. 점  $D$ 는 기울기가 0인 평형 상태에 있고, 좌우로 움직이는 흔들림에 대해서는 안정되어 있습니다. 하지만 전후로 흔들리면 아래로 떨어지게 됩니다. 다시 말해 평형 상태에 있는 점  $D$ 는 좌우로 안정되어 있지만, 전후로 불안정합니다. 따라서 우리가 공을  $C$ 의 약간 앞이나 뒤에 놓는다면 공은  $D$ 에 멈추지 않고 아래로 떨어집니다.

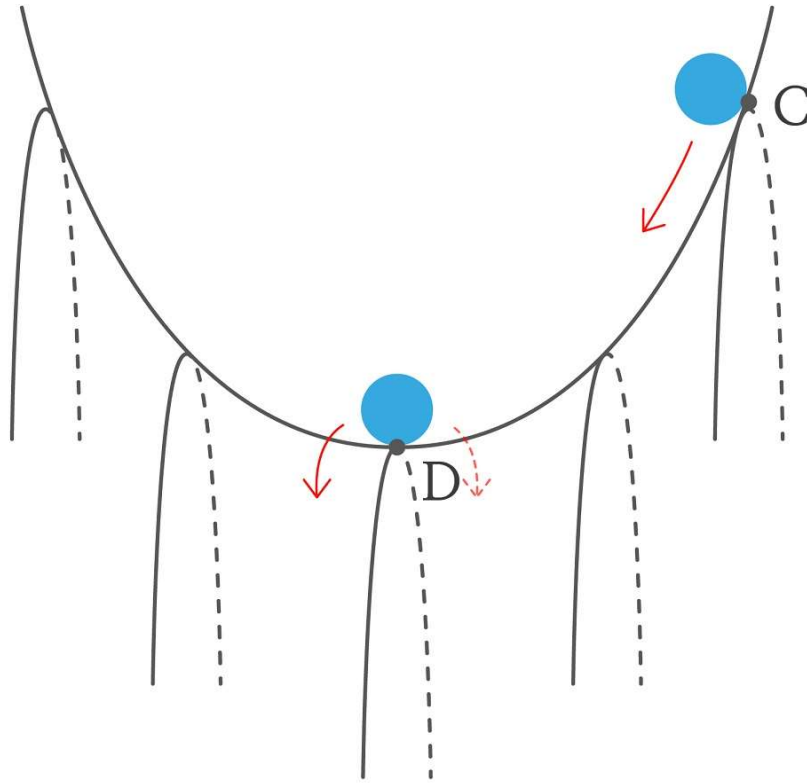


그림2  
MIMONG

이제 우리의 본래 문제인 평균 곡률 흐름으로 돌아가겠습니다. 이전 글 “곡면의 열방정식[1]: 에너지가 줄어들면 단순해진다”에서 평균 곡률 흐름은 엔트로피라는 곡면의 에너지를 단소 감소시킨다고 이야기했습니다. 따라서 공의 움직임을 평균 곡률 흐름에 빚대어 생각해보면, 공의 높이를 곡면의 엔트로피, 공의 위치를 곡면의 모양이라고 할 수 있습니다. 또한 이전 글 “곡면의 열방정식[2]: 위상 변화와 흐름의 운명”에서 엔트로피는 자가수축자에서만 변하지 않는다고 했습니다. 따라서 위 삽화들의 점 A, B, D와 같은 기울기가 0인 평형 상태인 점들이 자가수축자에 해당한다고 할 수 있습니다.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 줄어드는 구와 같이 자가수축자는 평균 곡률 흐름에 따라 줄어들지만, 엔트로피는 크기에 의존하지 않고 모양에만 의존합니다.

그렇다면 점 D와 같이 불안정한 자가수축자가 관찰되는 특이점에 도달하는 흐름이 있을 때, 초기 곡면 C를 살짝 흔들어서 D를 피해서 더 낮은 엔트로피를 향하여 흐르게 할 수 있지 않을까요? 이와 같은 생각을 수학적으로 엄밀하게 전개해 나아가는 것이, 이전 글 “곡면의 열방정식[2]: 위상 변화와 흐름의 운명”에서 언급한 일반적인 평균 곡률 흐름을 이용한 불안정 특이점 회피 이론입니다. 한편, 이전 글 “곡면의 열방정식 [3]: 불량흐름을 개선하는 일방통행”에서는 일방통행을 이용하여 원통형 특이점을 가지는 흐름에 대해서 이야기하였는데, 원통형 특이점은 점 B와 같은 안정된 특이점이라서 회피하는 것이 불가능하기 때문에 원통형 특이점을 포함하는 흐름을 고려하였습니다. 하지만 평면, 둥근 원통, 둥근 구를 이외의 자가수축자는 모두 불안정할 것으로 추측하고 있습니다. 이번 글에서는 평면, 둥근 구, 둥근 원통을 이외의 모양을 가지는 특이점을 어떻게 회피할 것인지 조금 더 자세히 이야기해보겠습니다.

## 기울기 흐름

[그림2]에서 공이 구르는 현상을 미분 방정식을 이용하게 표현해보겠습니다. [그림2]의 곡면을 평면  $R^2$  위에서 정의되는 이변수 함수  $f(x_1, x_2)$ 의 그래프라고 하겠습니다. 이제 시간  $t$ 에 공의 위치를  $(x_1(t), x_2(t), f(x_1(t), x_2(t)))$ 라고 하면 공은  $u$ 가 기울어진 방향으로 움직이므로 벡터 함수  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ 는 일차 미분방정식

$$\mathbf{x}'(t) = -\nabla f(\mathbf{x}(t))$$

을 만족합니다. 우리는 이 벡터 함수  $\mathbf{x}(t)$ 를  $f$ 의 기울기 흐름 gradient flow이라고 부릅니다.<sup>2</sup>

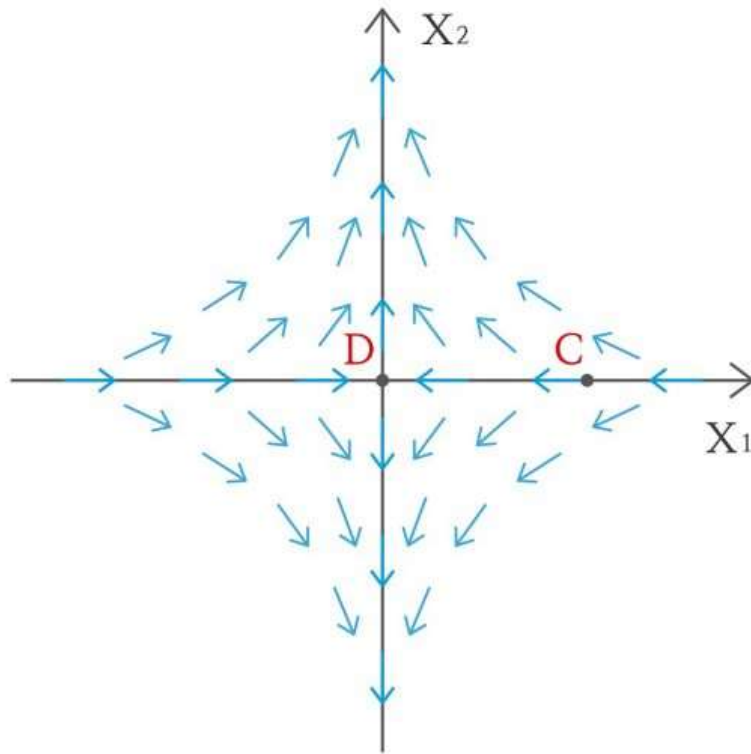


그림3  
MIMONG

한 가지 예로,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ 이라고 하면,  $f$ 의 그래프는 [그림2]의 곡면과 같습니다.<sup>3</sup> 이때,  $f$ 의 음의 기울기 벡터  $-\nabla f$ 는 [그림3]과 같고, 기울기 흐름  $\mathbf{x}(t)$ 는 [그림3]의 화살표를 따라 움직입니다. 한편, 함수의 기울기가 0이 되는 점을 우리는 임계점 critical point이라고 부릅니다. 따라서 평형 상태인 원점이  $f$ 의 임계점입니다. 임계점에서 좌우 방향인  $\pm e_1$ 은 안정된 방향이며 전후 방향인  $\pm e_2$ 은 불안정한 방향입니다. 특히, 임계점 근처의 점  $(a, b)$ 을 기울기 흐름  $\mathbf{x}(t)$ 가 지나간다면,  $b = 0$ 이 아닌 이상 반드시 임계점을 회피해서 가는 것을 관찰할 수 있습니다.

<sup>2</sup> 정확하게는  $-f$ 의 기울기 흐름, 혹은  $f$ 의 음의 기울기 흐름이라고 해야하지만, 편의상 기울기 흐름이라고 하겠습니다.

<sup>3</sup> 점  $D$ 를 원점이라고 생각하겠습니다.

<sup>4</sup>  $f \in C_{per}^2[0, 2\pi]$ 라면  $f$ 는 두번 미분가능하며 이계도함수가 연속입니다. 또한  $f(x) = f(x + 2\pi)$ 를 만족합니다.

<sup>5</sup> 각각의 고정된  $t$ 에 대해서  $u(\cdot, t) \in C_{per}^2[0, 2\pi]$ 입니다.

<sup>6</sup> 범함수  $E$ 의 오일러-라그랑주 방정식이  $f_{xx} + 4f = 0$ 이기 때문입니다. 자세한 설명은 오일러-라그랑주 방정식과 변분법을 찾아 보시기 바랍니다.

이제 이 기울기 흐름을 조금 추상화하여 평면이 아닌 함수 공간에서 생각해보겠습니다. 먼저 주기가  $2\pi$ 이고 연속인 이계도함수를 가지는 함수들의 집합  $C_{per}^2[0, 2\pi]$ 를<sup>4</sup> 점들의 집합인 평면에 빗대어 생각합니다. 그리고 높이 함수를 대신하여 에너지

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f'^2 - 4f^2 dx,$$

를 생각합니다. 이때, 함수 공간  $C_{per}^2[0, 2\pi]$ 위에서의 에너지  $E$ 의 기울기 흐름  $u(x, t)$ 은<sup>5</sup> 미분 방정식

$$u_t = u_{xx} + 4u$$

을 만족합니다.<sup>6</sup> 실제로 이 미분 방정식과 부분적분을 통하여 함수  $u(\cdot, t)$ 의 에너지  $E(u(\cdot, t))$ 가 단조 감소함을 알 수 있습니다.

$$\frac{d}{dt} E(u(\cdot, t)) = \int_0^{2\pi} u_x u_{xt} - 4u u_t dx = - \int_0^{2\pi} (u_{xx} + 4u) u_t dx = - \int_0^{2\pi} u_t^2 dx.$$

<sup>7</sup> 함수 공간  $C_{per}^2[0, 2\pi]$  주어진 초기 조건에 대해서 위의 미분 방정식의 해가 유일합니다.  $v(x, t) = e^{-4t} u(x, t)$ 가 열방정식  $v_t = v_{xx}$ 를 만족하므로  $v$ 에 최대값 정리를 사용하여 유일성을 증명할 수 있습니다.

한편, 초기값이  $u(x, 0) = \sin(2x)$ 라면  $u_t = 0$ , 즉  $u(x, t) = u(x, 0)$ 입니다. 따라서  $\sin(2x)$ 는 에너지  $E$ 의 임계점입니다. 또한, 주어진 작은  $\varepsilon \neq 0$ 에 대해서  $u(x, 0) = \sin(2x) + \varepsilon \sin x$ 라면  $u(x, t) = \sin(2x) + \varepsilon e^{3t} \sin x$ 임을 위의 미분 방정식에 직접 대입하여 확인 할 수 있습니다.<sup>7</sup> 함수 공간에서는 함수가 점과 벡터의 역할을 하므로  $\pm \sin x$ 은 불안정한 방향이라고 할 수 있습니다. 마찬가지로  $u(x, 0) = \sin(2x) + \varepsilon \sin(3x)$ 라면  $u(x, t) = \sin(2x) + \varepsilon e^{-5t} \sin(3x)$ 이므로  $\pm \sin(3x)$ 는 안정된 방향입니다. 마지막으로  $\sin(2x)$ 는 안정된 방향이 많이 있지만, 불안정한 방향  $\sin x$ 이 한 개 이상 있음으로, 에너지  $E$ 의 기울기 흐름의 불안정한 임계점입니다.

## 선형적으로 안정된 특이점

어떤 평균 곡률 흐름  $M_t$ 을 특이점  $(x_0, t_0)$ 에서 확대하여 자가수축자  $\Sigma$ 을 찾았다고 가정하겠습니다. 이때,  $(x_0, t_0)$ 를 기준으로 조정된 흐름 rescaled flow  $\bar{M}_\tau$ 은 엔트로피  $\text{Ent}(\bar{M}_\tau)$ 의 기울기 흐름이며, 자가수축자  $\Sigma$ 는 엔트로피의 임계점입니다. 또한 조정된 흐름  $\bar{M}_\tau$ 가  $\Sigma$ 의 법-그래프 normal graph라면 어떤 함수  $u: \Sigma \times [0, T]$ 가 존재해서, 각각의 점  $x \in \Sigma$ 와 그의 단위 법벡터 unit normal vector  $\nu(x)$ 에 대해서  $x + u(x, \tau)\nu(x) \in \bar{M}_\tau$ 를 만족합니다. 이때, 자코비 Jacobi 연산자  $L = \Delta_\Sigma - \frac{1}{2}x^{\text{tan}} \cdot \nabla_\Sigma + |A_\Sigma|^2 + \frac{1}{2}$ 과 이차 오류 quadratic error  $E(u)$ 가 미분 방정식

$$u_\tau = Lu + E(u),$$

을 만족하며,  $u$ 의  $C^2$ -노름 norm  $\|u(\cdot, \tau)\|_{C^2(\Sigma)}$ <sup>8</sup>이 충분히 작을 때, 어떤 상수  $C$ 가 존재하여 오류 추정 error estimates

$$|E(u)| \leq C\|u\|_{C^2(\Sigma)}^2,$$

을 만족합니다. 그러데  $Lu$ 는  $\|u\|_{C^2(\Sigma)}$ 와 비슷하므로,  $\|u\|_{C^2(\Sigma)}$ 가 충분히 작다면 오류값  $E(u)$ 을 무시하고  $u$ 가 선형방정식  $u_\tau = Lu$ 의 해인 것과 같이 움직입니다.

이제 가중치가 주어진 내적

$$\langle f, g \rangle_W = \int_\Sigma f g e^{-\frac{|x|^2}{4}} dg$$

과 내적 공간

$$L^2_W(\Sigma) = \left\{ f: \int_\Sigma f^2 e^{-\frac{|x|^2}{4}} dg \right\}$$

를 정의합니다. 그러면 부분적분을 통하여  $\langle Lf, g \rangle_W = \langle f, Lg \rangle_W$ 을 확인할 수 있습니다. 즉, 미분 연산자  $L$ 은 자기 수반 작용소 self-adjoint operator입니다.

<sup>8</sup>  $u$ 와 일계도함수  $\nabla u, \nabla^2 u$ 의 최대값의 합을  $C^2$ -노름이라고 합니다.

<sup>9</sup>  $A = A^T$ 를 만족하는 행렬.

<sup>10</sup> 완벽하게 안정되어 있다고 말할 수 없는 이유는 흐름이 선형 방정식  $u_\tau = Lu$ 가 아닌 비선형 방정식  $u_\tau = Lu + E(u)$ 를 따라 움직이기 때문입니다.

한편, 함수  $f, g$ 를 벡터로  $L$ 을 행렬로 생각해보면 자기 수반 작용소는 대칭 행렬<sup>9</sup>에 대응됩니다. 따라서, 선형대수학에서 배운 바와 같이, 내적 공간  $L^2_W$ 는  $L$ 의 고유 벡터eigenvector로 분해decompose됩니다. 여기서 우리는 함수 공간을 생각하므로 고유 벡터 대신 고유 함수eigenfunction이라고 부르겠습니다. 고유 함수 $\varphi$ 는 고유 벡터와 마찬가지로 어떤 실수  $\lambda$ 에 대해서  $L\varphi = \lambda\varphi$ 을 만족하는 함수입니다. 그리고 고유 함수로  $L^2_W$  공간을 분해할 수 있으므로, 어떤 고유 함수열  $\{\varphi_i\}$ 가 존재하여  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ 이며,  $L^2_W$  공간의 임의의 함수를  $\varphi_i$ 의 선형합linear combination으로 표현할 수 있습니다. 또한, 소볼레프Sobolev 부등식을 사용하여 고유값  $\lambda_i$ 의 상한이 존재함을 보일 수 있습니다. 따라서,  $\varphi_i$ 의 순서를 조정하여  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ 를 만족하게 정렬할 수 있습니다. 다시 말해, 가장 큰 고유 값을 가지는  $\varphi_1$ 이 존재합니다. 특별히 이 고유 함수를 첫 번째 고유 함수라고 부릅니다.

고유 함수를 사용하여 각각의 고정된  $\tau$ 에 대한 함수  $u(\cdot, \tau) \in L^2_W$ 를 분해할 수 있으므로  $u(\cdot, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\tau)\varphi_i$ 로 표현할 수 있습니다. 그런데  $u$ 가 선형 방정식  $u_\tau = Lu$ 를 만족한다면,  $a_i(\tau) = \langle u(\cdot, \tau), \varphi_i \rangle_W$ 이므로 미분방정식

$$a_i'(\tau) = \langle u_\tau, \varphi_i \rangle_W = \langle Lu, \varphi_i \rangle_W = \langle u, L\varphi_i \rangle_W = \lambda_i \langle u, \varphi_i \rangle_W = \lambda_i a_i(\tau)$$

을 얻을 수 있습니다. 따라서 어떤 상수  $c_i$ 에 대해  $a_i = c_i e^{\lambda_i \tau}$ 입니다. 즉,

$$u(x, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\lambda_i \tau} \varphi_i(x).$$

## 연재글

### 곡면의 열방정식

1. 에너지가 줄어들면 단순해진다
2. 위상 변화와 흐름의 운명
3. 불량흐름을 개선하는 일방통행
4. 손가락 위에서 돌아가는 농구공

위의 식에서  $\lambda_i$ 가 양수라면 계수  $c_i e^{\lambda_i \tau}$ 가 점점 커지므로  $\varphi_i$ 는 불안정한 방향입니다. 따라서, 양의 고유 함수를 가지는 자가수축자는 불안정할 것으로 추측할 수 있습니다. 하지만 사실 평균 곡률  $H$ 과 좌표 함수coordinate function  $x^i = \langle x, e_i \rangle$ 은 언제나  $L$ 의 불안정한 고유 함수입니다.

$$LH = H, \quad Lx^i = \frac{1}{2}x^i.$$

그런데 이 고유 함수들의 계수  $c_i e^{\lambda_i \tau}$ 는 흐름을 특이점  $(x_0, t_0)$ 이 아닌 다른 점을 중심으로 조정했을 경우만 관찰됩니다. 즉, 평균 곡률과 좌표 함수들은 특이점에서 흐름을 조정했다면  $c_i = 0$ 이 되므로 무시할 수 있는 불안정한 고유 함수들입니다. 그래서  $H$ 와  $x^i$ 를 이외의 불안정한 고유 함수가 없다면  $\Sigma$ 는 선형적으로 안정linearly stable되어 있다고 말합니다.<sup>10</sup> 그리고 선형적으로 안정된 자가수축자는 평면, 둥근 구, 둥근 원통뿐임이 증명되었습니다. [6,8]

## 곡면을 쌓아 올린 밀피유 케이크

이제 본론으로 들어가서 선형적으로 불안정한 자가수축자가 관찰되는 특이점의 회피 이론을 소개하겠습니다. 먼저 평균 곡률 흐름  $M_t$ 가 첫 특이점  $(x_0, t_0)$ 에서 확대하여 한 겹의 선형적으로 불안정한 특이점  $\Sigma$ 가 된다고 가정합니다. 그리고 초기 곡면  $M_0$ 로 한 방향에서 수렴하는 곡면 열  $\{M_0^i\}$ 를 생각합니다. 예를 들어, 밀피유 케이크 페이스트리들이 서로 교차하지 않은 채 층층이 쌓아 올려졌듯이, 곡면열  $\{M_0^i\}$ 의 곡면들이 서로 교차하지 않은 채로 층층이 쌓여  $M_0$ 로 수렴하도록 합니다. 그렇다면  $M_0^i$ 에서 시작한 흐름  $M_t^i$ 는 최대값 원리에 의하여  $M_t$ 나  $M_t^i$ 가 특이점을 가지기 전에는 서로 교차하지 않습니다.

다음으로 이전 글 "곡면의 열방정식 [3]: 불량흐름을 개선하는 일방통행"에서 고대 흐름을 관찰할 때와 같이 양의 수열  $\{\lambda_i\}$ 을 확대 계수로 사용하되 항상 특이점  $(x_0, t_0)$ 을 중심으로 확대한 흐름열

$$\hat{M}_t^i = \lambda_i(M_{\lambda_i^2(t-t_0)}^i - x_0), \quad \check{M}_t^i = \lambda_i(M_{\lambda_i^2(t-t_0)}^i - x_0)$$

을 정의합니다. 이때,  $\lambda_i$ 를 너무 크지 않게 천천히 증가 시켜  $\hat{M}_t^i$ 이 시공간의 원점으로부터 도망치지 못하도록 합니다.<sup>11</sup>[1] 이제  $\hat{M}_t^i$ 의 수렴하는 부분 흐름열의 극한으로 고대 흐름  $\tilde{M}_t$ 를 찾을 수 있습니다. 한편,  $\check{M}_t^i$ 은 수축하는 흐름  $\sqrt{-t}\Sigma$ 로 수렴합니다.[2,7,10] 그런데  $\hat{M}_t^i$ 은  $\check{M}_t^i$ 와 교차하지 않으므로, 그들의 극한  $\tilde{M}_t$ 과  $\sqrt{-t}\Sigma$  역시 교차하지 않습니다. 그리고  $\sqrt{-t}\Sigma$ 를 시공간의 원점을 중심으로 조정된 흐름은 정지한 자가수축자  $\Sigma$ 이므로,  $\tilde{M}_t$ 를 시공간의 원점을 중심으로 조정된 고대 흐름  $\bar{M}_\tau$ 는  $\Sigma$ 와 교차하지 않습니다.

<sup>11</sup>  $\lambda_i$ 가 너무 빠르게 발산하면  $M_t^i$ 가  $i$ 가 증가할수록 원점으로부터 멀어져 극한이 시공간 안에 존재하지 않을 수 있습니다. 예를 들어, 수열  $a_n = n + \infty$ 로 발산하므로 극한값이 존재하지 않는 것처럼, 흐름열이 발산하지 않도록 조절해야 합니다.

한편, 엔트로피 확대 변환에 대하여 불변하고 시간에 따라 단조 감소하므로  $\text{Ent}(\hat{M}_t^i) \leq \text{Ent}(M_t^i) \leq \text{Ent}(M_0^i)$ 을 만족합니다. 또한,  $M_0^i$ 은  $M_0$ 으로 수렴하므로  $\text{Ent}(\tilde{M}_t) \leq \text{Ent}(M_0)$ 를 얻을 수 있습니다. 따라서, 조정된 흐름  $\bar{M}_\tau$  역시  $\text{Ent}(M_0)$ 을 엔트로피의 상한으로 가집니다. 하지만 엔트로피는 시간  $\tau$ 가 뒤로 갈수록 증가해야 하므로, 다음을 얻습니다.

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left| \text{Ent}(\bar{M}_\tau) - \text{Ent}(\bar{M}_{\tau+1}) \right| = 0.$$

즉, 음의 무한 시간에서 엔트로피가 변하지 않은 자가수축자로 수렴합니다. 하지만 두 개의 서로 다른 자가수축자는 반드시 교차해야 합니다.[1] 따라서  $\bar{M}_\tau$ 는  $\tau$ 가  $-\infty$ 로 발산함에 따라 자가수축자  $\Sigma$ 로 수렴합니다. 따라서, 법벡터  $\nu$ 의 방향을 잘 설정하여, 충분히 큰 음의 시간  $\tau$ 에 대해서  $\bar{M}_\tau$ 를 양함수  $u: \Sigma \times (-\infty, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ 의 법-그래프로 표현할 수 있습니다.



다. 그런데 미분 방정식 (1)의 0이 아닌 고대 해  $u$ 는 충분히 큰 음의 시간에서 어떤 고유 함수에 의해 지배당해야 함이 알려져 있습니다.[5] 다시 말해, 어떤 단위 고유 함수  $\varphi$ 가 존재하여

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \frac{\|u - \langle u, \varphi \rangle_W \varphi\|_W}{\langle u, \varphi \rangle_W} = 0$$

을 만족합니다. 따라서  $u > 0$ 을 이용하여  $\varphi \neq 0$ 을 얻을 수 있습니다. 그리고 쿠랑 마디 영역 정리(Courant nodal domain theorem)에 의해 0을 함수값으로 가지지 않은 고유 함수는 반드시 첫 번째 고유 함수이므로,  $\varphi = \varphi_1$ 입니다. 따라서  $u \approx c_1 e^{\lambda_1 \tau} \varphi_1$ 이므로, 속도  $u_\tau \approx \lambda_1 u$  역시 양수임을 알 수 있습니다. 즉, 조정된 흐름  $\bar{M}_\tau$ 은 한쪽 방향으로 일방통행하는 흐름입니다. 따라서 이전 글 "곡면의 열방정식 [3]: 불량흐름을 개선하는 일방통행"에서 이야기 한바와 같이  $\bar{M}_\tau$ 는 한 겹의 안정된 특이점만을 가집니다.[3,4,9] 그러므로 어떤 충분히  $i$ 가 존재해서 흐름  $M_t^i$ 는  $(x_0, t_0)$  근처에서 한 겹의 안정된 특이점만을 가집니다. 즉,  $M_t^i$ 의 불안정 특이점을 회피해 갈 수 있습니다.

## 참고문헌

1. O. Chodosh and K. Choi and C. Mantoulidis and F. Schulze. Mean curvature flow with generic initial data. *arXiv:2003.14344*, 2020.
2. O. Chodosh and F. Schulze. Uniqueness of asymptotically conical tangent flows. *Duke Mathematical Journal* (to appear).
3. K. Choi and R. Haslhofer and O. Hershkovits. Ancient low entropy flows, mean convex neighborhoods, and uniqueness. *Acta Mathematica* (to appear).
4. K. Choi and R. Haslhofer and O. Hershkovits and B. White. Ancient asymptotically cylindrical flows and applications. *arXiv:1910.00639*, 2019.
5. K. Choi and C. Mantoulidis. Ancient gradient flows of elliptic functionals and Morse index. *American Journal of Mathematics* (to appear).
6. T. Colding and W. Minicozzi. Generic mean curvature flow I; generic singularities. *Annals of Mathematics*, 175(2):755-833, 2012.
7. T. Colding and W. Minicozzi. Uniqueness of blowups and Lojasiewicz inequalities. *Annals of mathematics*, 182:221-285, 2015.
8. G. Huisken and C. Sinestrari. Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces. *Acta Mathematica*, 183(1): 45-70, 1999.
9. O. Hershkovits and B. White. Nonfattening of mean curvature flow at singularities of mean convex type. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 73(3): 558-580, 2020.
10. F. Schulze. Uniqueness of compact tangent flows in mean curvature flow. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 690: 163-172, 2014.