

퍼즐

[4월의 퍼즐 해설] 라틴 방진을 품은 라틴 방진

2022년 5월 2일

한동규

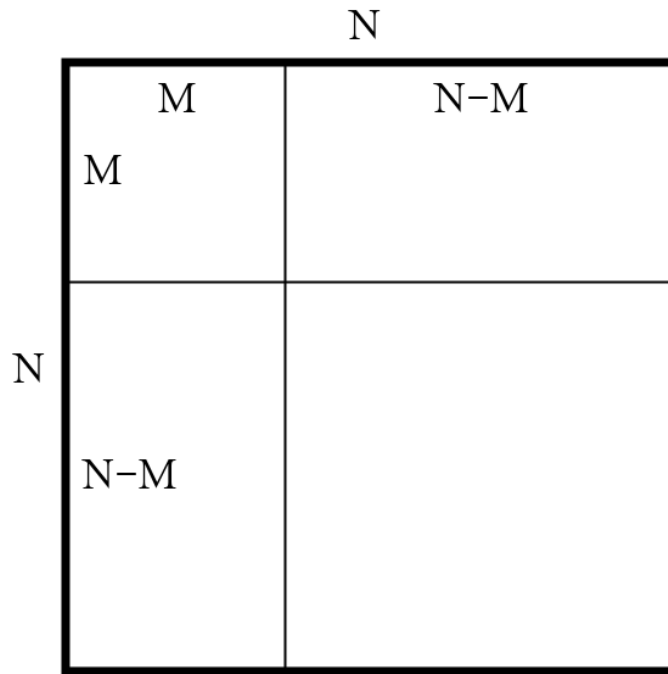


4월의 퍼즐에 참여해주신 모든 분들께 감사드립니다!

4월의 퍼즐에 참여해주신 분 중 정답과 함께 좋은 풀이를 보내주신 박종훈님께
HORIZON에서 준비한 선물을 전달드릴 예정입니다.

[4월의 퍼즐 문제 보러 가기](#)

라틴 방진은 행과 열의 순서를 바꿔도 라틴 방진이므로, 행과 열의 순서를 적절히 바꿔서 1~M으로 채워진 $M \times M$ 라틴 방진을 왼쪽 위에 고정시켰다고 가정하고 문제를 생각해 보자. 전체 정사각형을 다음과 같이 $M \times M$, $M \times (N-M)$, $(N-M) \times M$, $(N-M) \times (N-M)$ 네 개의 부분 격자로 쪼개서 생각할 것이다.



먼저 $2M > N$ 인 경우를 살펴보자. 첫 M 개 행에 수 $M+1$ 을 어떻게 배치해야 하는지 확인해 볼 것이다. 왼쪽 $M \times M$ 격자에는 1부터 M 까지의 수만 들어가므로 오른쪽 $M \times (N-M)$ 격자에 수 $M+1$ 을 M 개 행만큼 채워야 한다. 하지만 놓을 수 있는 열의 위치는 $N-M$ 으로 M 개보다 작다. 따라서, 비둘기집의 원리에 의해 어떤 열에는 $M+1$ 이 둘 이상 배치되어야 하고, 라틴 방진을 만들 수 없다.

1	2	3	4	5	6		
2	3	4	5	1		6	
3	4	5	1	2			6
4	5	1	2	3		6	
5	1	2	3	4			

그렇다면 $2M \leq N$ 인 경우에는 항상 라틴 방진을 품은 라틴 방진을 만들 수 있을까?

일단 $M \times M$ 격자를 채우고, 추가로 우측 $M \times (N-M)$ 격자에서 행을 회전해 가면서 $M+1 \sim N$ 을 채우면 첫 M 개 행에 1부터 N 까지의 수가 중복 없이 들어가게 된다. 이를 $M \times N$ 라틴 직사각형이라고 부른다. 어떤 $M \times N$ 라틴 직사각형이든 $N-M$ 개의 열을 추가해서 라틴 방진으로 확장할 수 있음이 알려져 있으므로, $2M \leq N$ 인 경우는 항상 라틴 방진을 품은 라틴 방진을 완성할 수 있다. (증명은 필자의 [블로그](#)에 소개되어 있다.)

물론 위와 같이 증명할 수도 있지만, 위 풀이는 직접적으로 라틴 방진을 품은 라틴 방진을 구성하는 방법을 제시해 주지는 않는다. 실제로 구성하는 방법은 여러 가지가 있겠으나 아래에 소개할 것은 KPP 이충명님이 찾은 방법을 필자 나름대로 재해석한 풀이이다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	5	6	7	8	4
3	1	2	6	7	8	4	5
4	5	6					
5	6	7					
6	7	8					
7	8	4					
8	4	5					

1. 위와 같이 세 부분 격자를 채운다. 좌측 상단은 아무 라틴 방진이나 넣고, 우측 상단은 행을 왼쪽으로, 좌측 하단은 열을 위쪽으로 회전시키면서 만든 격자이다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	5	6	7	8	4
3	1	2	6	7	8	4	5
4	5	6	7	8	4	5	6
5	6	7	8	4	5	6	7
6	7	8					
7	8	4					
8	4	5					

2. 오른쪽 위 격자를 계속 확장해서, 오른쪽 아래에 $(N-2M) \times (N-M)$ 격자를 채운다. 이렇게 채우면 열에는 중복이 없지만, 행에는 중복이 생길 수 있다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	5	6	7	8	4
3	1	2	6	7	8	4	5
4	5	6	7	8			
5	6	7	8		4		
6	7	8		4		5	
7	8	4			5		6
8	4	5				6	7

3. 직각삼각형 두 개와 몇 개의 다각선들로 쪼갠 다음, 아래 방향으로 펼친다. 아래로 펼치기 때문에 열에 중복이 없는 점은 유지되며, 펼치고 나면 전체 격자가 대각선에 대해 대칭이 되므로 행에도 중복이 없어진다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	5	6	7	8	4
3	1	2	6	7	8	4	5
4	5	6	3	1	2	3	1
5	6	7	2	3	1	2	3
6	7	8	1	2	3	1	2
7	8	4					
8	4	5					

4. 이번에는 $M \times (N-M)$ 격자를 비우고 $1 \sim M$ 으로 채운다. 이렇게 채우면 열에는 중복이 없지만, 행에는 중복이 생길 수 있다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	5	6	7	8	4
3	1	2	6	7	8	4	5
4	5	6			2	3	1
5	6	7		1		2	3
6	7	8	3		1		2
7	8	4	2	3		1	
8	4	5	1	2	3		

5. 비슷하게, 직각삼각형 두 개와 대각선들로 나누어서 아래로 펼친다. 펼치고 나면 우측 하단 부분격자 안에서 대각선에 대해 대칭이 되므로 행에도 중복이 없어진다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	5	6	7	8	4
3	1	2	6	7	8	4	5
4	5	6	7	8	2	3	1
5	6	7	8	1	4	2	3
6	7	8	3	4	1	5	2
7	8	4	2	3	5	1	6
8	4	5	1	2	3	6	7

6. 3번과 5번의 패턴은 절묘하게도 서로 위치가 겹치지 않으면서 우측 하단 부분격자 전체를 덮으므로, 두 패턴을 함께 놓아 라틴 방진을 완성할 수 있다.

추가로 KPP 안진후님의 풀이도 소개한다. $M \times (N-M)$ 직사각형 영역부터가 아니라, 우측 하단 $(N-M) \times (N-M)$ 격자부터 채우는 방법이다.

1	2	3					
2	3	1					
3	1	2					
					1	2	3
			3			1	2
			2	3			1
			1	2	3		
				1	2	3	

1. 위와 같이 $(N-M) \times (N-M)$ 격자의 첫 행에 1부터 N까지를 연속해서 채우고, 나머지 행은 한 칸씩 오른쪽으로 회전시켜가면서 채운다.

1	2	3					
2	3	1					
3	1	2					
					1	2	3
			3			1	2
			2	3			1
			1	2	3		
				1	2	3	

2. 그러면 $N-2M$ 개의 범대각선 영역이 남는다. (격자의 왼쪽과 오른쪽, 위와 아래가 연결되어 있다고 생각하면 파란색으로 색칠한 영역을 하나의 대각선으로 생각할 수 있는데, 이러한 대각선을 범대각선이라고 부른다.)

1	2	3					
2	3	1					
3	1	2					
			7	4	1	2	3
			3	8	5	1	2
			2	3	4	6	1
			1	2	3	5	7
			8	1	2	3	6

3. 각 범대각선마다 시작점을 적절히 골라서 $M+1$ 을 적고, 해당 칸에서 시작해서 오른쪽 아래 방향으로 다음 수들을 적는다. 행이나 열이 같은 시작점이 없어야 한다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	6	7	8	4	5
3	1	2	5	6	7	8	4
8	6	5	7	4	1	2	3
4	7	6	3	8	5	1	2
5	8	7	2	3	4	6	1
6	4	8	1	2	3	5	7
7	5	4	8	1	2	3	6

4. 남은 직사각형 격자에서, 행과 열이 겹치지 않도록 $M+1$ 을 적을 시작점들을 고른 뒤 각각 오른쪽/아래 방향으로 다음 수들을 적는다. 수를 적는 방향이 각 행/열에 대해 동일하므로, 시작점의 행과 열이 겹치지만 않으면 나머지 수들도 겹치지 않는다.

1	2	3					
2	3	1					
3	1	2					
			7	4	1	2	3
			3	8	5	1	2
			2	3	4	6	1
			1	2	3	5	7
			8	1	2	3	6

3. 각 범대각선마다 시작점을 적절히 골라서 $M+1$ 을 적고, 해당 칸에서 시작해서 오른쪽 아래 방향으로 다음 수들을 적는다. 행이나 열이 같은 시작점이 없어야 한다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	6	7	8	4	5
3	1	2	5	6	7	8	4
8	6	5	7	4	1	2	3
4	7	6	3	8	5	1	2
5	8	7	2	3	4	6	1
6	4	8	1	2	3	5	7
7	5	4	8	1	2	3	6

4. 남은 직사각형 격자에서, 행과 열이 겹치지 않도록 $M+1$ 을 적을 시작점들을 고른 뒤 각각 오른쪽/아래 방향으로 다음 수들을 적는다. 수를 적는 방향이 각 행/열에 대해 동일하므로, 시작점의 행과 열이 겹치지만 않으면 나머지 수들도 겹치지 않는다.

3번 과정에서 대각선마다 겹치지 않게 시작점을 고르는 방법은 독자를 위한 연습문제로 남긴다. $N-2M$ 이 홀수일 때와 짝수일 때를 나눠서 처리해야 함에 주의하자.

아래의 두 그림은 위에서 소개한 두 가지 풀이에 따라 만든, 4×4 라틴 방진을 품은 13×13 라틴 방진이다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	1	6	7	8	9	10	11	12	13	5
3	4	1	2	7	8	9	10	11	12	13	5	6
4	1	2	3	8	9	10	11	12	13	5	6	7
5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4
6	7	8	9	10	11	12	13	4	5	1	2	3
7	8	9	10	11	12	13	3	5	4	6	1	2
8	9	10	11	12	13	2	5	3	6	4	7	1
9	10	11	12	13	1	5	2	6	3	7	4	8
10	11	12	13	4	5	1	6	2	7	3	8	9
11	12	13	5	3	4	6	1	7	2	8	9	10
12	13	5	6	2	3	4	7	1	8	9	10	11
13	5	6	7	1	2	3	4	8	9	10	11	12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	1	13	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	1	2	7	8	9	10	11	12	13	5	6
4	1	2	3	6	7	8	9	10	11	12	13	5
9	8	7	6	12	10	13	11	5	1	2	3	4
10	9	8	7	4	13	11	5	12	6	1	2	3
11	10	9	8	3	4	5	12	6	13	7	1	2
12	11	10	9	2	3	4	6	13	7	5	8	1
13	12	11	10	1	2	3	4	7	5	8	6	9
5	13	12	11	10	1	2	3	4	8	6	9	7
6	5	13	12	8	11	1	2	3	4	9	7	10
7	6	5	13	11	9	12	1	2	3	4	10	8
8	7	6	5	9	12	10	13	1	2	3	4	11

다음은 4월의 정답자로 선정된 박종훈님의 해설입니다.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1	5	6	7	8	4
3	1	2	6	7	8	4	5
4	5	6	7	8	3	2	1
5	6	7	8	1	4	3	2
6	7	8	2	4	1	5	3
7	8	4	3	2	5	1	6
8	4	5	1	3	2	6	7

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	5	6	7	8	3
3	4	5	6	7	8	2	1
4	5	6	7	8	1	3	2
5	6	7	8	2	3	1	4
6	7	8	1	3	2	4	5
7	8	2	3	1	4	5	6
8	3	1	2	4	5	6	7

1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	5	6	7	4
3	1	2	6	7	4	5
4	5	6	7	3	2	1
5	6	7	1	4	3	2
6	7	4	2	1	5	3
7	4	5	3	2	1	6

1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	5	6	3	2	1
5	6	4	1	3	2
6	4	5	2	1	3

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	4	5	2	1
4	5	1	3	2
5	3	2	1	4

먼저, 일반성을 잃지 않고 $M \times M$ 라틴 방진을 품은 $N \times N$ 라틴 방진에서, $M \times M$ 라틴 방진은 항상 맨 왼쪽 위에 있다고 가정할 수 있습니다. 그 외의 위치에 있을 때 $M \times M$ 라틴 방진을 포함한 행과 열들을 맨 왼쪽 위의 행과 열들과 교환해도 여전히 라틴방진이기 때문입니다. 또한, 마찬가지로 일반성을 잃지 않고 $M \times M$ 라틴방진에는 $1 \sim M$ 으로만 구성되어 있다고 가정합니다.

1. 만들 수 없습니다. 5×5 라틴방진이 $1 \sim 5$ 행, $1 \sim 5$ 열에 있을 때 $1 \sim 5$ 행의 6열에 해당하는 5칸에는 $6 \sim 8$ 만 올 수 있는데, 3개의 수로 같은 열의 5칸을 채울 수 없으므로 라틴 방진을 만드는 것이 불가능합니다.

2. 아래와 같이 가능합니다.

```
1 2 3 4 5 6 7 8
2 3 1 5 6 7 8 4
3 1 2 6 7 8 4 5
4 5 6 7 8 3 2 1
5 6 7 8 1 4 3 2
6 7 8 2 4 1 5 3
7 8 4 3 2 5 1 6
8 4 5 1 3 2 6 7
```

3. 1번 문제에서 불가능한 이유로부터 유추해보자면, M 칸에 $N-M$ 개의 숫자를 채워넣을 수 있어야 하므로 $M > N-M$
 $\Rightarrow M > N/2$ 이면 불가능 하고 그 외의 경우인 $M \leq N/2$ 이면 가능할 것 같습니다.

4. (이미지와 함께 봐주세요)

(1) 왼쪽 위에 초록색 구역에 먼저 $M \times M$ 라틴 방진을 자유롭게 배열합니다. (ex. 본문과 같이 한칸씩 회전시키며 123 / 231 / 312)

(2) 오른쪽 위 하얀색 $M \times (N-M)$ 크기의 구역에 행별로 $M+1 \sim N$ 의 수를 한 칸 씩 회전시키며 배열합니다. (ex. 45678 / 56784 / 67845)

(3) 왼쪽 아래 하얀색 $(N-M) \times M$ 크기의 구역에는 (2)에서 배열한 수와 (왼쪽 위에서 오른쪽 아래로의)대각선에 대해 대칭이 되도록 배열합니다. (456 / 567 / 674 / 745)

(4) 오른쪽 아래 $(N-M) \times (N-M)$ 크기의 구역은 두 개의 구역으로 분리할 수 있습니다. 구역의 $(1, N-M+1)$ 좌표 칸을 파란색으로 칠하고 나머지 칸들을 체스판 배열로 파랑, 빨강으로 칠한 뒤에 오른쪽 위와 왼쪽 아래의 $M \times M$ 직각삼각형을 파란색으로, 왼쪽 위와 오른쪽 아래의 $(N-2M) \times (N-2M)$ 크기의 직각삼각형을 빨간색으로 칠하면 그림과 같이 파랑, 빨강 구역으로 구분됩니다. 이 때 파랑 구역은 오른쪽 위에서 왼쪽 아래 방향으로 1, 2, ... N , $N+1$.. 을 채워주고, 빨강 구역은 왼쪽 위에서 오른쪽 아래 방향으로 $2M+1$, $2M+2$, ... N , $M+1$, ... 을 채워주면 항상 라틴 방진이 만들어집니다.