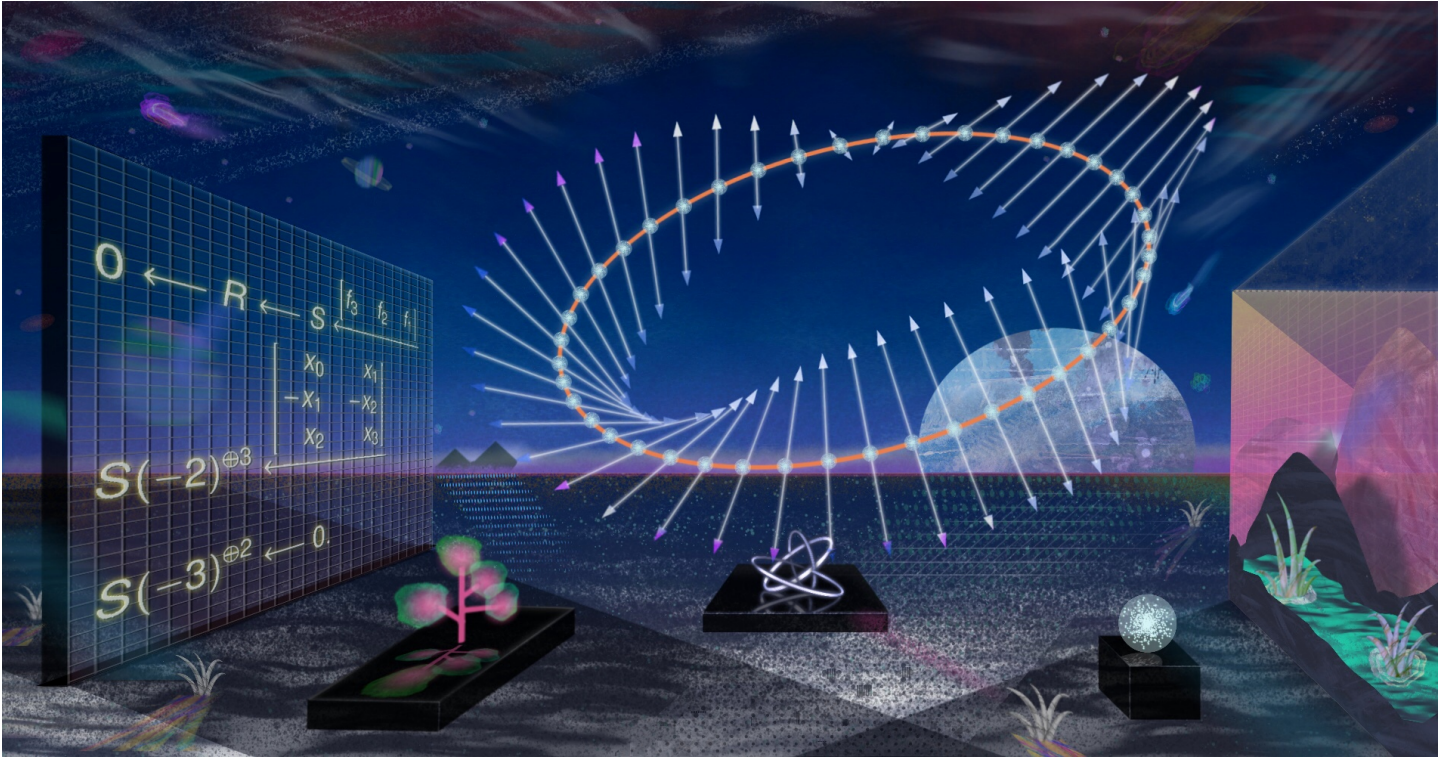


# 대수다양체의 방정식의 관계식[2]: 대수다양체의 관계식

2022년 10월 25일

박진형



지난 글 ‘대수다양체를 정의하는 방정식 [1]: 대수다양체를 정의하는 방정식’에서는 복소다양체  $X$ 를 매우 풍부한 선다발  $L$ 을 통해 사영공간  $\mathbf{P}^r$ 에 매립시키면 복소다양체가 대수다양체가 된다는 것을 설명하였다. 이 대수다양체  $X$ 를 정의하는 유한개의 동차다항식  $f_1, f_2, \dots, f_k$ 가 존재하며,  $X$ 와  $L$ 의 기하학적 성질과  $f_1, f_2, \dots, f_k$ 의 대수적 성질 사이의 관계를 탐구하는 것은 대수기하학의 가장 근본적인 연구 주제 중 하나이다. 예를 들어 뎀포드는 선다발  $L$ 이 ‘충분히’ 양적인 경우에 대수다양체  $X$ 를 정의하는 다항식의 차수가 모두 2가 된다는 것을 증명하였다. 대수다양체의 차원이 1인 대수곡선의 경우엔 선다발  $L$ 이 얼마나 양적이어야 하는지 매우 구체적으로 설명을 할 수 있고, 이를 다시 대수곡선을 정의하는 방정식의 관계식syzygy으로 자연스럽게 확장시킬 수 있다. 이번 글에선 대수곡선의 관계식에 대한 그린Mark Green의 정리를 설명하고, 이를 고차원 대수다양체로 일반화하는 결과에 대해 소개하고자 한다.

대수곡선의 선다발의 양적인 정도는 차수degree라는 불변량으로 측정한다.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>리만 곡면  $X$  위의 선다발  $L$ 의 차수는 첫번째 천류first Chern class  $c_1(L)$ 로 정의하는데,  $c_1(L)$ 는  $H^2(X, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ 의 원소로 정수가 된다. 선다발의 차수가 양인 것과 선다발이 양적인 것은 동치이다. 이 경우 선다발로부터 켈러 계량Kähler metric을 얻을 수 있는데, 이 켈러 계량에 의한 리만 곡면의 부피와 선다발의 차수는 상수배만큼만 차이가 난다는 것이 알려져 있다.

대수곡선  $X$ 의 종수genus가  $g$ 라 하자. 19세기 중반 리만Bernhard Riemann은 선다발  $L$ 의 차수가  $2g + 1$  이상이면  $L$ 이 매우 풍부한 선다발이라는 것을 증명하였다. 이 경우  $L$ 의 절단  $s$ 에 대하여,  $X$ 의 점  $x$ 에 대하여  $s(x)$ 가 복소직선  $\mathbf{C}$ 에서 0이 되는 경우가 항상 생긴다. 이 때,  $\{x \in X \mid s(x) = 0\}$ 이 되는 집합의 원소의 개수는 중복도를 고려하면 선다발의 차수와 같다. 즉, 선다발의 차수는 복소직선  $\mathbf{C}$ 에서 0으로 보내는  $X$ 의 점들의 개수라고 생각할 수 있다. 리만의 결과 이후 100년이 훌쩍 지난 뒤인 1970년대 멤포드와 후예들(Bernard Saint-Donat, Takao Fujita)은 선다발  $L$ 의 차수가  $2g + 2$  이상이면 대수곡선  $X$ 를 정의하는 다항식의 차수가 2라는 것을 증명하였다. 이제 선다발  $L$ 의 차수가  $2g + 3$  이상이면 대수곡선  $X$ 를 정의하는 다항식의 어떤 대수적 성질이 성립하는가를 묻는 것은 매우 자연스럽다. 이 질문에 대한 만족스러운 대답은 1980년대에 그린에 의해 주어졌다.[1]

그린의 결과를 이해하기 위해 대수다양체를 정의하는 다항식의 관계식에 대해 알아보자. 꼬인 삼차 곡선twisted cubic curve은 사영공간  $\mathbf{P}^3$ 에서 세 개의 2차 다항식

$$f_1 := x_0x_2 - x_1^2, f_2 := x_0x_3 - x_1x_2, f_3 = x_1x_3 - x_2^2$$

으로 정의된 대수곡선이다. 다항식  $f_1, f_2, f_3$ 은 두 개의 1차 관계식을 가진다:

$$x_0f_3 - x_1f_2 + x_2f_1 = 0, x_1f_3 - x_2f_2 + x_3f_1 = 0.$$

다항식  $f_1, f_2, f_3$ 의 다른 관계식은 모두 이 두개의 1차 관계식으로부터 얻을 수 있다. 또한 이 두개의 1차 관계식은 서로 독립이다. 지금까지 논의한 것을 대수적으로 표현하면 꼬인 삼차 곡선의 동차좌표환homogeneous coordinate ring  $R := S/I_X|_{\mathbf{P}^3}$ 의 최소자유분해minimal free resolution가

$$0 \leftarrow R \leftarrow S \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_3 & f_2 & f_1 \end{bmatrix}} S(-2)^{\oplus 3} \xrightarrow{\begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ -x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}} S(-3)^{\oplus 2} \leftarrow 0$$

이 된다는 것이다. 최소자유분해에서  $S(-2)^{\oplus 3}$ 은 꼬인 삼차 곡선을 정의하는 다항식은 2차식 3개라는 뜻이며,  $S(-3)^{\oplus 2}$ 는 1차 관계식이 2개라는 뜻이다. ( $S(-3)$ 에서 나오는 3이라는 수는 관계식의 차수 1과 삼차 곡선을 정의하는 다항식의 차수 2를 더한 것이다.)

일반적으로 대수다양체  $X$ 가 사영공간  $\mathbf{P}^r$ 에서

<sup>2</sup>힐버트는 불변량 이론(invariant theory)을 연구하며 각 차수별로 불변다항식의 개수를 세는 함수가 사실은 다항식(힐버트 다항식이라 불린다)이 된다는 것을 증명하기 위해 관계식 정리를 증명하였다. 불변량 이론에 대해서는 김영훈 교수님의 “불멸의 힐버트 [3]: 변하지 않는 것을 찾아라”에서 자세히 소개되어 있다.

다항식  $f_1, f_2, \dots, f_k$ 로 정의된 경우를 고려해보자. 다항식의 관계식에 대한 모든 정보는 동차좌표환  $R := S/I_X|_{\mathbf{P}^r}$ 의 최소자유분해에 담겨있다. 힐버트의 관계식 정리(Hilbert's syzygy theorem)<sup>2</sup>에 의하면  $R$ 의 최소자유분해는 길이가  $r$  이하이기 때문에

$$0 \longleftarrow R \longleftarrow E_0 \longleftarrow E_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow E_r \longleftarrow 0$$

와 같이 쓸 수 있다. 편의를 위해  $X$ 를 사영공간에 매립시키는 선다발  $L$ 이 충분히 양적이라고 가정하면  $R$ 은 정상환(normal ring)이 된다. 이 때

$$E_p = \bigoplus_{q \geq 0} K_{p,q}(X, L) \otimes_{\mathbb{C}} S(-p - q)$$

로 쓸 수 있는데,  $K_{p,q} = K_{p,q}(X, L)$ 는 코줄 코호몰로지(Koszul cohomology)로  $p$ 번째  $q$ 차 관계식을 모은 유한차원 복소벡터공간이다. 코줄 코호몰로지의 차원  $\kappa_{p,q} = \kappa_{p,q}(X, L)$ 는 대수다양체를 정의하는 다항식의 중요한 대수적 불변량이다. 다음과 같이 코줄 코호몰로지 차원을 배열한 것을 베티표(Betti table)라고 한다.

	0	1	2	...	$r$
0	$\kappa_{0,0}$	$\kappa_{1,0}$	$\kappa_{2,0}$	...	$\kappa_{r,0}$
1	$\kappa_{0,1}$	$\kappa_{1,1}$	$\kappa_{2,1}$	...	$\kappa_{r,1}$
2	$\kappa_{0,2}$	$\kappa_{1,2}$	$\kappa_{2,2}$	...	$\kappa_{r,2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

베티표의 너비는  $R$ 의 사영차원(projective dimension)과 같은데,  $X$ 의 차원을  $n$ 이라 하면,  $R$ 의 사영차원은 항상  $r - n$ 과  $r$  사이에 있다. 베티표의 높이는  $R$ 의 카스텔누오보-멈포드 정칙성(Castelnuovo–Mumford regularity)과 같은데, 선다발  $L$ 이 충분히 양적이라고 가정하였으므로  $n + 1$  이하가 된다.  $R$ 이 정상환이라 가정하였으므로  $p$  또는  $q$ 가 0

일 때,  $\kappa_{0,0} = 1$ 이고 나머지 경우는  $\kappa_{p,q} = 0$ 이다. 또한  $\kappa_{1,d}$ 는 대수다양체  $X$ 를 정의하는 차수가  $d + 1$ 인 다항식의 개수이다. 만약  $X$ 가 2차 다항식으로 정의된다면  $\kappa_{1,1}$ 은 이 2차 다항식의 개수이고,  $d$ 가 2 이상일 때  $\kappa_{1,d} = 0$ 이 된다.

이제 그린의 결과를 설명할 시간이다. 앞서 종수가  $g$ 인 대수곡선  $X$ 의 선다발  $L$ 의 차수가  $2g + 3$  이상이면  $X$ 를 정의하는 다항식은 어떤 대수적 성질을 갖는가를 물었다. 그린은 차수가 2인 이 다항식의 첫번째 관계식의 차수가 1이라는 것을 보여주었다. 보다 일반적으로 선다발  $L$ 의 차수가  $2g + 1 + p$  이상이면,  $X$ 를 정의하는 다항식의 차수는 2이고,  $p - 1$ 번째까지 관계식의 차수는 모두 1이라는 것을 증명하였다. 참고로  $p = 0$ 인 경우 19세기 후반 카스텔누오보 Guido Castelnuovo는 동차좌표환이 정상환이 된다는 것을 밝혀냈는데, 그린은 카스텔누오보 정리와 멤포드와 후예들의 결과를 관계식의 관점으로 일반화한 것이다. 선다발의 차수가 정확히  $2g + 1 + p$ 이며, 베틀표의 너비는  $p + g$ 이고 높이는 2이기 때문에 베틀표는 다음과 같은 꼴이다.

	0	1	2	...	$p$	$p + 1$	...	$p + g$
0	1	0	0	...	0	0	...	0
1	0	*	*	...	*	?	...	?
2	0	0	0	...	0	?	...	?

여기서 "\*"는 0이 아님을 의미하고, "?"는 0인지 아닌지를 모른다는 뜻이다.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> $p$ 가  $2g - 4$  이상이면 "?" 부분이 0인지 아닌지를 정확하게 결정할 수 있다. 이는 대수곡선에 대한 매우 심오한 결과이다.

선다발  $L$ 의 차수  $2g + 1 + p$ 가 종수  $g$ 에 비해 엄청나게 큰 경우 ( $p$ 가  $g$ 에 비해 엄청나게 크다고 가정) 전체 베틀표에서 "?"가 차지하는 비중은 매우 작아 무시할 수 있다. 베틀표에서  $\kappa_{1,1}, \dots, \kappa_{p,1}$ 은 항상 0이 아닌데, 그 나머지는 매우 작은 비중을 제외하면 모두 0이다. 이것은 대수곡선이 충분히 양적인 선다발로 사영공간에 매립된 경우 동차좌표환의 최소자유분해가 '매우 단순'한 (가능한 가장 단순한) 모양을 가진다는 것을 의미한다. 대수학에서 다루는 사영차원이  $p + g$ 이고 카스텔누오보-멤포드 정칙성이 2인 환의 베틀표는 일반적으로 위와 같이 단순하지가 않다. 그린 정리는 기하학적으로 정의된 대수곡선의 동차좌표환은 매우 특수한 환이라는 것을 보여주고 있다.

이후 그린의 정리를 고차원 대수다양체의 경우로 확장시키기 위한 많은 연구가 진행되었다. 가장 강력한 형태는 무카이 Shigeru Mukai에 의해 추측되었고, 무카이 문제의 약한 형태는 아인 Lawrence Ein과 라자스펠트 Robert Lazarsfeld에 의해 해결되었다.[2] 무카이의 문제는 대수기하학의 유명한 미해결 난제인 후지타 예상 Fujita's conjecture보다 강력하며 현재로서는 대수곡면의 경우도 완벽한 해결은 요원해 보인다.<sup>4</sup>

그린의 정리와 아인과 라자스펠트의 결과 이후 많은 사람들은

<sup>4</sup>차원이  $n$ 인 대수다양체  $X$ 와 양적인 선다발  $A$ 에 대하여 후지타 예상은  $K_X + (n + 2)A$ 가 매우 풍부하다는 것이다. 무카이 문제는  $K_X + (n + 2 + p)A$ 로 매립시켰을 때,  $p = 0$ 이면 동차좌표환이 정상환이고,  $p \geq 1$ 이면  $X$ 를 정의하는 다항식의 차수가 2이고,  $p - 1$ 번째까지 관계식의 차수가 모두 1인가를 묻고 있다.

충분히 양적인 선다발로 사영공간에 매립된 대수다양체의 동차좌표환의 최소자유분해는 매우 단순할 것이라 기대하였다. 즉, 기하학적으로 정의된 대수다양체의 동차좌표환은 매우 특수한 성질을 갖을 것이라고 예측하였다. 하지만 2000년대 초 오타비아니Giorgio Ottaviani와 파올레티Raffaella Paoletti는 사영평면  $\mathbf{P}^2$ 의 베로네제 매립Veronese embedding의 경우 동차좌표환의 최소자유분해가 단순하지 않다는 것을 보여주어 세상을 놀라게 했다.[3] 사영평면의  $d$ 번째 베로네제 매립은 선다발  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)$ 에 의해  $\mathbf{P}^{r_d}$ 로 매립하는 것인데, 구체적인 사상은  $[x_0, x_1, x_2]$ 를

$$[x_0^d, x_0^{d-1}x_1, x_0^{d-1}x_2, x_0^{d-2}x_1^2, x_0^{d-2}x_1x_2, \dots, x_0x_2^{d-1}, x_2^d]$$

로 보내는 것이다. 여기서  $r_d = \binom{d+2}{2} - 1 = d(d+3)/2$ 이고, 자연수  $d$ 는 대수곡선의 선다발의 차수처럼 사영평면의 선다발  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)$ 의 양적인 정도를 측정한다. 베로네제 매립을 시킨 사영평면의 동차좌표환은 정상적이고 사영차원은  $r_d - 2$ 이다. 오타비아니와 파올레티는  $3d - 2 \leq p \leq r_d - 2$ 일 때  $K_{p,2}(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)) \neq 0$ 이라는 것을 증명하였다. 참고로 대수곡선  $X$ 의 종수가  $g$ 이고 선다발  $L$ 의 차수가  $2g + 1 + d$  이상이면  $K_{p,2}(X, L) \neq 0$ 이기 위해서는  $d + 1 \leq p \leq d + g$ 여야 한다.  $K_{p,2}$ 가 소멸하는 것의 개수는  $d + 1$ 이고 비소멸인 것의 개수는  $g$ 이다. 앞서 설명한 것처럼  $d$ 가 매우 크다면  $K_{p,2}$ 가 소멸하는 것이 대부분이 된다. 하지만 사영평면의 베로네제 매립의 경우 오타비아니와 파올레티에 따르면  $d$ 가 매우 클 때  $K_{p,2}$ 가 비소멸하는 것이 대부분이 된다. 선다발의 양적인 성질이 충분히 크더라도 고차원 대수다양체의 동차좌표환의 최소자유분해는 단순하지 않다는 뜻이다. 그동안 사람들이 기대했던 것과 매우 다른 현상이다.

2010년대 초에 아인과 라자스펠트는 오타비아니와 파올레티가 발견한 현상이 고차원 대수기하학에서는 매우 일반적인 현상이라는 놀라운 사실을 밝혀냈다.[4] 차원이  $n$ 인 대수다양체  $X$ 에서 임의의 선다발  $P$ 와 양적인 선다발  $A$ 를 고정하고 자연수  $d$ 에 대해  $L_d := dA + P$ 라 하자. 만약  $d$ 가 충분히 크다면  $L_d$ 는 충분히 양적인 선다발이 된다. 이제부터  $d$ 는 충분히 크다고 가정하고, 대수다양체  $X$ 는 선다발  $L_d$ 에 의해 사영공간  $\mathbf{P}^{r_d}$ 에 매립되어 있다고 생각하자. 아인과 라자스펠트는  $d$ 가 무한대로 다가갈 때  $K_{p,q}(X, L_d)$ 의 점근적 성질에 대해 연구할 것을 제안하였다. 말하자면 대수다양체  $X$ 를 선다발의 양적인 정도를 늘려가며 사영공간에 매립시킬 때,  $X$ 를 정의하는 방정식과 관계식이 어떤 행동 패턴을 보일지 알아보자는 뜻이다. 주어진 하나의 매립에 대해 방정식과 관계식의 구체적인 정보를 모두 알아내는 것은 거의 불가능에 가까운 문제이지만, 선다발의 양적인 정도를 증가시키며 방정식과 관계식이 어떤 '점근적' 행동을 하는지를 알아내는 것은 충분히 시도해볼 수 있는 문제이다. 또한, 이를 통해 대수다양체의 동차좌표환의 성질에 대한 보다 깊은 이해를 이끌어 낼 수 있다.

아인과 라자스펠트의 연구 이전에  $K_{p,0}(X, L_d), K_{p,n+1}(X, L_d)$ 의 소멸과 비소멸은 완벽히 알려져 있었다. 카스텔누오보-뎀포드 정칙성은 앞서 언급한대로  $n + 1$  이하이므로,  $q$ 가  $n + 2$  이상인 경우  $K_{p,q}(X, L_d) = 0$ 이다. 따라서 문제는  $q$ 가 1과  $n$  사이에 놓여있을 때  $K_{p,q}(X, L_d)$ 가 언제 소멸 또는 비소멸이 되는지를 알아내는 것이다. 아인과 라자스펠트가 증명한 점근적 비소멸 정리asymptotic nonvanishing theorem는  $q$ 가 1과  $n$  사이에 놓여있을 때 양의 상수  $C_1, C_2$ 가 존재하여  $C_1d^{q-1} \leq p \leq r_d - C_2d^{n-1}$  일 때  $K_{p,q}(X, L_d) \neq 0$ 이 된다는 내용이다. 여기서  $r_d$ 는  $d^n$ 의 상수배 정도로 커지므로  $K_{p,q}(X, L_d) \neq 0$ 인 것이 '거의 대부분'이다. 즉,  $\mathbf{P}^{r_d}$ 에 매립된  $X$ 의 동차좌표환의 최소자유분해는 전혀 단순하지 않다는 뜻이다.

아인과 라자스펠트는 점근적 비소멸 정리에서 다루지 않은  $p$ 의 구간에 대해서  $K_{p,q}(X, L_d) = 0$ 이 되는지를 질문하였다. 구체적으로 양의 상수  $C$ 가 존재하여  $p$ 가  $Cd^{q-1}$ 보다 작으면  $K_{p,q}(X, L_d) = 0$ 일 것이라는 점근적 소멸 추측(asymptotic vanishing conjecture)을 제시하였는데, 최근 필자가 이 예상이 성립함을 증명하였다.[5] 지금까지의 논의를 요약하면 다음과 같다: 매우 양적인 선다발로 사영공간에 매립된 대수다양체의 동차좌표환의 최소자유분해는 전혀 단순하진 않지만 “매우 균일”한 모양을 가진다. 대수학에서 다루는 환의 베타표는 일반적으로 이런 균일한 모양이 아니다. 따라서 기하학적으로 정의된 대수다양체의 동차좌표환은 매우 특수한 환이라고 결론을 내릴 수 있다. 대수다양체의 동차좌표환의 특별한 성질이 대수다양체의 기하학과 어떻게 밀접하게 관련이 되는지는 앞으로 더 연구되어야 할 흥미로운 문제이다.

끝으로 이 분야의 미해결 문제를 하나 소개하며 이 연재를 마치고자 한다. 점근적 비소멸 정리는  $1 \leq q \leq n$ 이고  $C_1d^{q-1} \leq p \leq r_d - C_2d^{n-1}$ 일 때  $K_{p,q}(X, L_d) \neq 0$ 이라는 것만 알려줄 뿐, 이 코줄 코호몰로지의 차원  $\kappa_{p,q}(X, L_d)$ 가 어떤 값인지에 대해선 아무것도 알려주지 않는다. 아인, 라자스펠트와 에르만(Daniel Erman)은  $d$ 가 무한대로 갈 때  $\kappa_{p,q}(X, L_d)$ 가 정규 분포를 따를 것이라고 예상을 하였다.[6] 이 추측은 대수곡선의 경우 완벽히 해결되었지만, 고차원 대수다양체에 대해선 단 하나의 경우도 해결되지 못했다.

두 번의 연재를 통해 대수다양체를 정의하는 방정식과 관계식이 무엇인지 설명하고, 이 분야의 최근 연구 결과들을 설명하였다. 전문적인 내용들이 많이 나와 수학을 전공하지 않은 독자들에게 다소 어려운 글이었을 것 같다. 그럼에도 오늘날 대수기하학자들이 연구하는 흥미로운 분야와 결과를 조금이나마 엿볼 수 있는 유익한 시간이 되었기를 바란다.

---

## 참고문헌

1. M. Green, *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties*, J. Differential Geom. **19** (1984), 125-171.
2. L. Ein and R. Lazarsfeld, *Syzygies and Koszul cohomology of smooth projective varieties of arbitrary dimension*, Invent. Math. **111** (1993), 51-67.
3. G. Ottaviani and P. Paoletti, *Syzygies of Veronese embeddings*, Compos. Math. **125** (2001), 31-37.
4. L. Ein and R. Lazarsfeld, *Asymptotic syzygies of algebraic varieties*, Invent. Math. **190** (2012), 603-646.
5. J. Park, *Asymptotic vanishing of syzygies of algebraic varieties*, Comm. Amer. Math. Soc. **2** (2022), 133-148.
6. L. Ein, D. Erman, and R. Lazarsfeld, *Asymptotics of random Betti tables*, J. Reine Angew. Math. **702** (2015), 35-75.