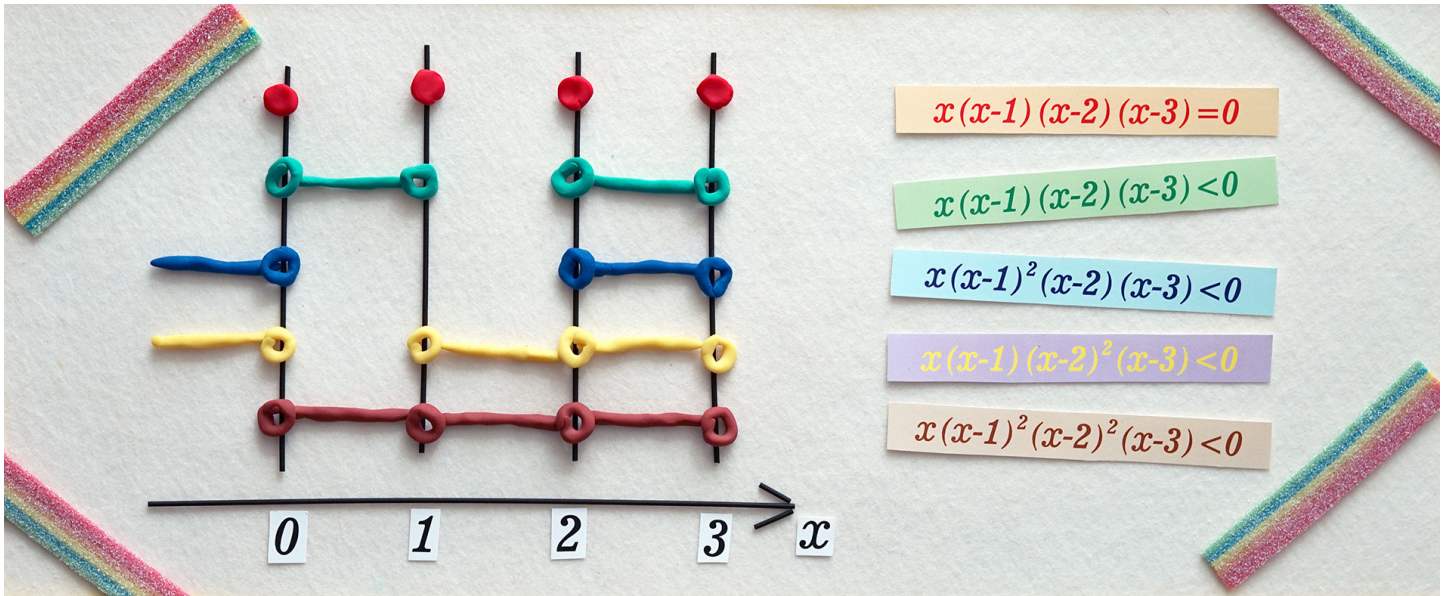


모델론 맛보기 [1]: 한정기호 제거

2022년 10월 17일

이정욱



수리논리학에는 크게 4가지 분야가 있습니다: 계산가능성이론computability theory, 모델론model theory, 증명론proof theory, 그리고 집합론set theory.¹ 이 중 저의 연구 분야인 모델론에 대해서 간단히 소개하려고 합니다. 모델론은 무엇을 연구할까요? 창C. C. Chang과 키슬러H. J. Keisler는 모델론을 다음과 같이 표현하였습니다.[1]

“Model theory is the branch of mathematical logic which deals with the relation between a formal language and its interpretations, or models.”

즉, 특정 논리식(혹은 논리식들의 모임)을 만족하는 구조들,

¹혹여나 21세기의 수리논리학의 발전 전망에 대해서 관심이 있으신 독자분들을 위해, 2000년 미국 어바나-삼페인에서 열린 기호논리학 협회 모임의 공개토론회 “The Prospects for Mathematical Logic in the Twenty-First Century” 토론자들의 의견을 정리한 글을 추천합니다.[2]

즉 주어진 논리식(들)을 만족하는 모델들을 연구하거나 혹은 반대로 특정 모델(혹은 모델들의 모임)이 만족하는 논리식들을 연구합니다.

특히 본 글에서는 한정기호 제거(quantifier elimination)라는 모델론의 개념을 알아보고, 이를 통해 모델론이 타 수학분야에 어떻게 응용이 되는지 살펴보도록 하겠습니다.

1. 한정기호 제거

구체적으로 실수 순서체 \mathbb{R} 를 통해서 '한정기호 제거' 개념이 무엇인지 알아보도록 하겠습니다. 실수 순서체에는 덧셈 '+' , 뺄셈 '-', 곱셈 '×'이 있고, 이 연산들과 잘 부합하는 순서관계 '<'가 있어, 다항함수에 대한 방정식뿐만 아니라 부등식을 생각할 수 있습니다. 이 방정식과 부등식의 해집합을 정의가능한 원자집합(definable atomic set)이라고 명명하겠습니다. 예를 들어, 실수들의 유한집합 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 은 방정식 $(x - a_1) \cdots (x - a_n) = 0$ 의 해집합으로 표현되기 때문에 정의가능한 원자집합이 됩니다. 혹은 열린 구간 $(-\infty, a)$, (a, ∞) , (a, b) 들은 부등식 $x < a$, $-x < -a$, 혹은 $(x - a)(x - b) < 0$ 의 해집합이 되기 때문에, 정의가능한 원자집합이 됩니다. 일반적으로 실직선 상의 정의가능한 원자집합은 정확하게 유한개 점들의 모임이거나 혹은 유한개의 열린 구간의 합집합으로 표현되는 집합들입니다. 예를 들어, 두 열린 구간의 합집합 $(0, 1) \cup (1, 2)$ 은 부등식 $x(x - 1)^2(x - 2) < 0$ 의 해집합이 됩니다. 또한, 실평면상의 반지름이 r 이고 중심이 (a, b) 인 열린 원판은 부등식 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ 의 해집합으로 표현되기 때문에 정의가능한 원자집합이 됩니다.

그리고 이 정의가능한 원자집합들의 부울 연산, 즉 교집합, 합집합, 그리고 여집합을 생각할 수 있습니다. 뿐만 아니라 사영함수

$$\pi_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

에 대한 상을 생각할 수 있습니다. 이런 집합들을 정의가능한 집합(definable set)이라고 명명하겠습니다. 즉, 정의가능한 집합들의 모임은 정의가능한 원자집합들을 포함하고, 부울 연산 및 사영함수 π_n 의 상을 취하는 것에 대해서 닫혀있는 가장 작은 모임이 됩니다. 예를 들어, 실평면 상의 반지름이 1이고 원점을 중심으로 갖는 열린 원판의 반쪽, $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ 은 정의가능하지만 원자집합은 아닙니다. 그리고 실직선상의 정수들의 모임 $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ 은 정의가능하지 않습니다.

그렇다면 구체적으로 어떤 집합들이 정의가능 할까요? 사칙연산 및 순서관계에 의해서, 부등식의 해들은 정의가능한 집합이 될 것입니다. 또한, 이 해집합의 부울 연산을 취해서 생성되는 집합들 또한 정의가능합니다. 즉, 연립부등식의 유한 합집합들은 정의가능하게 됩니다. 그런데 사영함수의 상을 취하는 과정에 의해서 이런 집합 뿐만 아니라 다른 형태의 집합도 정의가능한 집합이 될 수 있을 것 입니다. 하지만 1951년 타르스키^{A. Tarski}는 정의가능한 집합은 연립부등식의 해들과 이 집합들의 부울 연산에 의해서 생성되는 집합이 전부라는 것을 증명하였습니다.[3] 따라서, 정의가능한 집합은 연립부등식의 해집합의 유한 합집합으로 표현됩니다.

뿐만 아니라 연립부등식의 해집합들의 모임에 대해 사영함수의 취했을 때 상들이 유한개의 연립부등식에 의해서 결정된다는 사실을 증명하였습니다. 변수 $x, \bar{y} = (y_1, \dots, y_k), \bar{z} = (z_1, \dots, z_l)$ 에 대한 정수계수 다항함수 $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}[x, \bar{y}, \bar{z}]$ 에 대해서, $V \subseteq \mathbb{R}^{1+|\bar{y}|+|\bar{z}|}$ 를 연립부등식

$$\begin{cases} p_1 > 0, \dots, p_n > 0 \\ q_1 = \dots = q_m = 0 \end{cases}$$

의 해집이라합니다. 또한, 사영함수

$$\pi_{x\bar{y}\bar{z},\bar{z}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{|\bar{y}|} \times \mathbb{R}^{|\bar{z}|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\bar{z}|}, (a, \bar{b}, \bar{c}) \mapsto \bar{c}$$

를 통한, V 의 파이버들의 모임을 \mathcal{F} 라고 합니다. 즉,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{V_{\bar{c}} = V \cap \pi_{x\bar{y}\bar{z},\bar{z}}^{-1}(\bar{c}) : \bar{c} \in \mathbb{R}^{|\bar{z}|}\} \\ &= \{V \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{|\bar{y}|} \times \{\bar{c}\}) : \bar{c} \in \mathbb{R}^{|\bar{z}|}\} \end{aligned}$$

가 됩니다. 그러면 사영함수

$$\pi_{x\bar{y},\bar{y}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{|\bar{y}|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\bar{y}|}, (a, \bar{b}) \mapsto \bar{b}$$

에 대한 파이버들의 상은 유한개의 연립부등식에 의해서 결정이 됩니다. 즉, 어떤 자연수 N 이 존재하여, 자연수 $i \leq N$ 에 대해서, 다항함수 $P_{i,1}, \dots, P_{i,s}, \dots, Q_{i,1}, \dots, Q_{i,t} \in \mathbb{Z}[\bar{y}, \bar{z}]$ 가 존재하여 다음이 성립합니다: 임의의 실수 순서쌍 $\bar{c} \in \mathbb{R}^{|\bar{z}|}$ 에 대해서, 어떤 $k(=k(\bar{c})) \leq N$ 가 존재하여, 연립부등식

$$\begin{cases} P_{k,1}(\bar{y}, \bar{c}) > 0, \dots, P_{k,s}(\bar{y}, \bar{c}) > 0, \\ Q_{k,1}(\bar{y}, \bar{c}) = \dots = Q_{k,t}(\bar{y}, \bar{c}) = 0. \end{cases}$$

의 해집합이 정확히 $V_{\bar{c}}$ 의 사영함수 $\pi_{x\bar{y},\bar{y}}$ 에 대한 상을 묘사합니다. 이런 사실을 '한정기호 제거'라고 불립니다.

이 사실을 1계 논리^{first order logic}의 논리식^{formula}으로 표현하면 다소 생소하게 들리는 '한정기호 제거'라는 이름이 보다 명확해집니다. 논리식을 소개하기에 앞서, 논리식을 표현할 1계 논리의 언어^{language}를 소개하겠습니다. 1계 논리의 언어 \mathcal{L} 는 다음과 같은 기호들로 이루어져 있습니다.

(1) 논리기호

- (연결기호) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- (등호) $=$
- (한정기호) \exists, \forall
- (변수) x, y, z, \dots
- (보조기호) $(,)$

(2) 특정기호

- (술어기호) 자연수 $n \geq 1$ 에 대해, n -항 술어기호
- (함수기호) 자연수 $n \geq 1$ 에 대해, n -항 함수기호
- (상수기호) 상수기호

특히 1계 논리의 언어 \mathcal{L} 는 특정기호에 의해서 결정되기 때문에 보통 논리기호들은 생략하고 특정기호들의 모임을 \mathcal{L} 로 표기합니다. 예를 들어, 군^{group}을 표현하기 위해 1차 논리의 언어 $\mathcal{L}_g = \{., \square^{-1}, 1\}$ 을 사용합니다:

- (함수기호) 군의 연산을 표현하는 이항 함수기호 \cdot ,
역원 표현하는 일항 함수기호 \square^{-1} .
- (상수기호) 항등원을 표현하는 상수기호 1 .

환^{ring}을 표현하기 위해서는 1차 논리의 언어 $\mathcal{L}_r = \{+, -, \times, 0, 1\}$ 을 사용합니다:

- (함수기호) 덧셈 및 곱셈을 표현하는 이항 함수기호 $+, \times$,
덧셈에 대한 역원을 나타내는 일항 함수기호 $-$.
- (상수기호) 덧셈 및 곱셈의 항등원을 표현하는 상수기호 $0, 1$.

또한, 순서체를 표현하기 위해 1차 논리의 언어 $\mathcal{L}_{or} = \mathcal{L}_r \cup \{<\}$ 을 사용합니다:

- (술어기호) 순서관계를 나타내는 이항 술어기호 $<$.
- (함수기호) 덧셈 및 곱셈을 표현하는 이항 함수기호 $+$, \times ,
덧셈에 대한 역원을 나타내는 일항 함수기호 $'-'$.
- (상수기호) 덧셈 및 곱셈의 항등원을 표현하는 상수기호 $0, 1$.

주어진 1계 논리의 언어 \mathcal{L} 에 대한 논리식^{formula}이란, \mathcal{L} 에 들어가는 기호들의 적절한 나열입니다. 예를 들어, 1계 논리의 언어 \mathcal{L}_{or} 에 대해서 다음의 기호들의 나열은

$$\varphi \equiv \forall x \forall y ((x < y) \rightarrow \exists z (y + (-x) = z^2))$$

논리식이 됩니다. 특히 논리식 φ 은 '임의 원소 x 와 y 에 대해서 x 가 y 보다 작다면, $y - x$ 가 제곱수로 표현이 된다'라는 것을 표현합니다. 물론 이 논리식이 모든 순서체에 대해서 성립하지는 않습니다. 예를 들어, 유리수체의 경우 이 논리식이 참이 되지 않습니다. $x = 0, y = 2$ 에 대해서, $y - x = 2 > 0$ 임에도 불구하고 2는 유리수의 제곱으로 표현되지 않습니다. 하지만 이 논리식은 실수체에서는 참이 됩니다.

다음의 기호들의 나열 또한 논리식이 됩니다:

$$\psi \equiv (x < y) \rightarrow \exists z (y - x = z^2)$$

그런데 이 논리식에 있는 변수 x 와 y 는 특정하게 한정되어 있지 않아 자유변수^{free variable}라고 부릅니다. 보통 자유변수 x 와 y 의 존재를 강조하고자 $\psi(x, y)$ 로 표기합니다. 자유변수가 있는 논리식들에 대해서는 참 혹은 거짓을 판별하는 것이 말이 되지 않습니다. 하지만 주어진 순서체에 대해서 자유변수 x 와 y 에 특정 원소들을 대입하였을 때, 참 혹은 거짓을 판별할 수 있습니다. 예를 들어, $\psi(0, 2) \equiv 0 < 2 \rightarrow \exists z (2 - 0 = z^2)$ 는 유리수체에 대해서는 거짓이 되고 실수체에 대해서는 참이 됩니다.

이제 실수체에 대한 '한정기호 제거' 결과가 논리식으로 어떻게 표현되는지 살펴보겠습니다. 다음의 논리식이 실수 순서체 \mathbb{R} 에서 참이 됩니다: 연립부등식

$$\begin{aligned} \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) &\equiv \bigwedge_{i \leq n} p_i(x, \bar{y}, \bar{z}) > 0 \wedge \bigwedge_{j \leq m} g_j(x, \bar{y}, \bar{z}) = 0, \\ \psi_k(\bar{y}, \bar{z}) &\equiv \bigwedge_{i \leq s} P_{k,i}(\bar{y}, \bar{z}) > 0 \wedge \bigwedge_{j \leq t} Q_{k,j}(\bar{y}, \bar{z}) = 0, \end{aligned}$$

에 대해서,

$$\forall \bar{z} \left(\forall \bar{y} \left(\exists x \left(\varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) \right) \leftrightarrow \bigvee_{k \leq N} \psi_k(\bar{y}, \bar{z}) \right) \right).$$

여기서 주목할 점은 한정기호 $\exists x$ 를 포함하는 논리식 $\exists x(\varphi(x, \bar{y}, \bar{z}))$ 이 한정기호 $\exists x$ 및 변수 x 이 없는 논리식 $\bigvee_{k \leq N} \psi_k(\bar{y}, \bar{z})$ 와 동치가 된다는 사실입니다.

또한, 이 '한정기호 제거'는 실수체 뿐만 아니라 임의 닫힌 실체^{real closed field}에 대해서도 성립합니다. 닫힌 실체는 임의 홀수 차수의 일변수 다항함수가 항상 해를 갖는 순서체를 의미합니다. 예를 들어, 실수체는 닫힌 실체가 되고, 또한 대수적 실수들로 이루어진 체, 즉 유리계수 다항식의 해가 되는 실수들의 모임 또한 닫힌 실체가 됩니다. 하지만 유리수체는 닫힌 실체가 되지 않습니다. 예를 들어, 유리계수 다항함수 $x^3 - 2$ 는 유리수 해를 갖지 않습니다.

2. '한정기호 제거'의 응용

모델론에서 중요한 연구대상 중의 하나는 다양한 수학적 구조들에 대해 정의가능한 집합들을 이해하는 것입니다. 이때 '한정기호 제거'는 적절히 정의가능한 원자집합들을 선택함으로써 정의가능한 집합들을 구체적으로 이해하는데 매우 큰 도움이 됩니다. 이런 정의가능한 집합들의 이해는 모델론의 응용에 있어 중요한 역할을 합니다.

복소수체 \mathbb{C} 의 경우, 정의가능한 집합들이 정확히 건설가능한 집합^{constructible set}, 즉 다항함수에 대한 연립방정식의 해집합들의 부울 조합^{boolean combination}으로 나오게 됩니다. 이로부터 '건설가능한 집합의 다항함수에 대한 상은 다시 건설가능한 집합이 된다'는 체발리C. Chevalley 정리의 모델론을 사용한 증명을 얻게 됩니다.[4]

본 글에서 다루었던 실수체 \mathbb{R} 의 경우, 정의가능한 집합들이 정확히

²'모델론 맛보기' 2편에서 이에 대해 다루도록 하겠습니다.

³특히 o-minimality에 대한 교재로 반덴드리스L. van den Dries의 책[6]을 추천합니다.

준대수 집합^{semialgebraic set}, 즉 다항함수에 대한 연립방정식의 해집합의 유한 합집합이 된다는 것을 알 수 있습니다. 이를 활용하여 힐버트의 17번째 문제에 대한 증명을 얻을 수 있습니다.² 그리고 '한정기호 제거'를 통해 \mathbb{R}^1 의 정의가능한 부분집합은 항상 점과 열린 구간의 유한 합집합으로 표현된다는 것을 관찰할 수 있는데, 이런 성질을 갖는 순서 구조들을 o-minimal 하다고 부릅니다. o-minimality는 필레이A. Pillay와 스테인호른C. Steinhorn에 의해서 처음 정의

되었으며[5] o-minimality에 대한 연구는 실대수기하^{real algebraic geometry}와 매우 밀접한 관계가 있습니다.³ 또한, o-minimality 이론의 발전은 최근 앙드레-우트 추측^{André-Oort conjecture}를 증명하는데 있어서 매우 핵심적인 역할을 하였습니다.[Z][8]

또한, p진체 \mathbb{Q}_p 에 대해서도 정의가능한 원자집합들을 적절히 선택하여 '한정기호 제거'를 얻을 수 있습니다. 부치체 구조로부터 가장 자연스러운 정의가능한 원자집합의 형태는 p진수 계수를 갖는 다항함수 p, q 에 대해 부치부등식 $\nu(p) \geq \nu(q)$ 의 해집합 혹은 방정식 $p = 0$ 의 해집합을 생각할 수 있습니다. 그런데 이런 형태의 원자집합들은 '한정기호 제거' 결과를 얻기에 충분하지 않습니다. 예를 들어, 사상함수 $\pi : \mathbb{Q}_p^2 \rightarrow \mathbb{Q}_p, (x, y) \mapsto x$ 에 대한, 집합 $V = \{(x, y) : x = y^2\}$ 의 상은 절대로 다항함수에 대한 연립부치부등식 및 연립방정식의 해집합들의 부울 조합으로 나오지 않습니다.[9] 하지만 매킨타이어^{A. Macintyre}는 p진수 계수를 갖는 n -변수 다항함수 p 와 자연수 $m \geq 1$ 에 대해서 방정식의 $p(\bar{x}) = y^m$ 의 해집합의 사상함수 $\pi_n : \mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p^n, (\bar{x}, y) \mapsto y$ 의 상을 정의가능한 원자집합으로 추가하면 '한정기호 제거'가 성립함을 보였습니다.[9] 데넵^{J. Denef}은 이 p진체에 대한 '한정기호 제거' 결과를 사용하여 p진 정수 \mathbb{Z}_p 계수를 갖는 다항함수들로 이루어진 연립방정식에 대해, p 거듭제곱 환 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 해들의 갯수에 대한 생성함수로 주어지는 푸앵카레 급수가 유리함수가 된다는 것을 증명하였습니다.[10]

참고문헌

1. C. C. Chang and H. J. Keisler, Model theory. Third edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **73**, North-Holland Publishing, Amsterdam, (1990).
2. S. R. Buss, A. S. Kechris, A. Pillay, and R. A. Shore, The prospects for mathematical logic in the twenty-first century, *Bull. Symbolic Logic*, **7** (2001), 169-196.
3. A. Tarski, A decision method for elementary algebra and geometry, 2nd ed., University of California Press, (1951).
4. D. Marker Model Theory: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer, (2002).
5. A. Pillay and C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **11** (1984), 159-162.
6. L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, London Mathematical Society Lecture Note Series, **248**, Cambridge University Press, Cambridge, (1998).
7. J. Pila, O-minimality and the André-Oort conjecture for \mathbb{C}^n , *Ann. of Math.*, **173** (2011), 1779-1840.
8. J. Pila, A. N. Shankar, and J. Tsimerman, Canonical Heights on Shimura Varieties and the André-Oort conjecture, arXiv:2109.08788v3, (2022).
9. A. Macintyre, On definable subsets of p -adic fields, *J. Symbolic Logic*, **41** (1976), 605-610.
10. J. Denef, The rationality of the Poincaré series associated to the p -adic points on a variety, *Invent. Math.*, **77** (1984), 1-23.