

퍼즐

[12월의 퍼즐] 크리스마스 트리(Tree)

2022년 12월 1일

조정휘



매월 정답자 한 분을 선정하여 고등과학원에서 문화상품권을 드립니다.

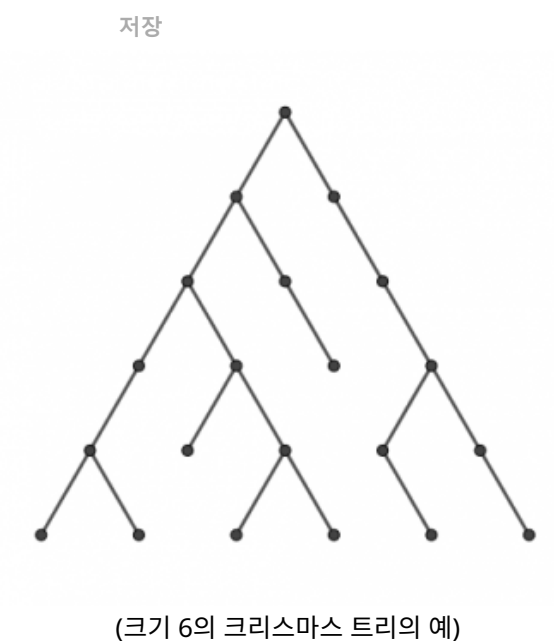
퍼즐 참여는 12월 27일까지 가능하며 다음달 초 해설과 함께 정답자가 공개됩니다.

(덧글로 답안,이름,메일 주소를 적어주셔야 정답자 선정 연락이 가능합니다.)

퍼즐 해설 공개 시 정답자의 풀이 과정도 함께 공개됩니다.)

연말을 맞아 이번 달의 퍼즐은 크리스마스 컨셉으로 잡게 되었다. 크리스마스의 상징 중 하나라고 할 수 있는 트리. 수 학계에서는 이 '트리'라는 단어에 별개의 뜻이 있다. 그래프 이론에서 Tree(나무)라고 하면 순환이 없는 연결 그래프를 의미한다. 즉 그래프가 연결되어 있음에도 불구하고, 여러 개의 이어진 변들을 따라 한 바퀴 빙 돌아서 다시 제자리로 돌아오는 일이 불가능하다는 뜻이다.

이러한 그래프에 나무라는 이름이 붙은 이유는, 점과 변의 위치를 잘 조정하면 마치 나무가 뿌리로부터 솟아 가지를 쳐 뻗어나가는 모양처럼 그릴 수 있기 때문이다. 하지만 오늘은 조금 다른 방법으로 이 트리를 바라보자고 한다. 우리가 크리스마스 트리를 상상할 때 가장 먼저 떠오르는 형태는 커다란 이등변삼각형 모양이다. 이에 착안하여 다음과 같은 특별한 트리, **크리스마스 트리**를 정의하자.



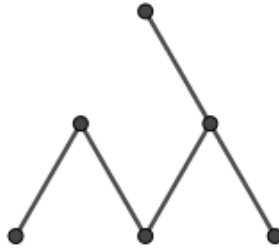
크기 n 의 크리스마스 트리는 다음 세 가지 조건들을 만족하는 트리이다.

- (1) 정삼각형으로 배열된 $\frac{n(n+1)}{2}$ 개의 꼭짓점을 가진다. 맨 아래층에 n 개, 그 바로 위층에 $n - 1$ 개, ..., 맨 위층에 1개가 배치된다.
- (2) 모든 변은 다음의 두 종류 중 하나이다.



즉, 꼭짓점을 자신과 인접한 (최대 6개의) 꼭짓점들과만 잇되 같은 층의 꼭짓점끼리는 잇지 않는다는 뜻이다.

- (3) 맨 위층을 제외한 모든 꼭짓점은 자신의 바로 위층에 있는 꼭짓점 중 하나와 이어져 있다. 즉, 다음과 같은 예는 크리스마스 트리가 아니다.



문제 1. 크기 n 의 크리스마스 트리는 총 몇 가지가 있을까? 꼭짓점들을 모두 고정하고 연결 방법만 달라한다고 가정하자.

문제 2. 다음의 4번 조건을 추가로 만족하는 크리스마스 트리를 **안정적인 크리스마스 트리**라고 하자.

(4) 변 1개로만 연결된 꼭짓점들은 전부 맨 아래층에만 있다.

그렇다면 크기 n 의 안정적인 크리스마스 트리는 총 몇 가지가 있을까? 1번 문제와 마찬가지로 꼭짓점들을 고정하고 연결 방법만 달라한다고 하자.

문제 3. 2번 문제와 같이 크기 n 의 안정적인 크리스마스 트리의 개수를 구하려고 한다. 그러나 이번엔 서로 동형 (isomorphic)인 트리는 같은 것으로 세기로 하자. 지금과 같은 경우에는, 맨 위 꼭짓점만 고정시키고 나머지 점과 변들을 재배열해서 다른 트리를 만들 수 있을 때 두 트리가 동형이라고 보면 된다.

이 값을 n 에 대하여 직접 나타내는 것은 매우 어렵다. 대신에 점화식을 구하도록 하자. 크기 n 의 안정적인 크리스마스 트리의 (동형인 것들을 제외한) 개수를 a_n 이라고 할 때, $n \geq 3$ 에 대하여 a_n 의 값을 a_1, \dots, a_{n-1} 에 대한 식으로 나타내어 보자. 답까지 이르는 과정이 완벽히 엄밀하지 않아도 좋다!