

제공수 십자수

십자수(Cross-number)풀이 퍼즐이란 기존의 십자말풀이 퍼즐을 숫자로 바꾼 것이다. 바꿨다는 말 그대로 칸 마다 0부터 9 중 하나를 적어 원래 퍼즐처럼 가로로, 또는 세로로 읽으면 된다. 예컨대 2, 0, 2, 3이 가로(또는 세로)로 나란히 나열되어있으면 그대로 2023으로 읽으면 되는 것이다.

십자수 퍼즐에 등장하는 어떤 숫자도 0으로 시작해선 안 되며, 특별 지시사항이 없는 이상 한 숫자가 두 번 이상 등장해서는 안 된다. 호라이즌 퍼즐 팬이라면 이미 박부성 교수님께서 내신 십자수풀이 퍼즐을 풀어본 경험이 있어 익숙하리라 믿는다.

(<https://horizon.kias.re.kr/7726/>)

기존의 십자수풀이 퍼즐에서는 한 자리 수는 등장 숫자로 취급하지 않지만, 이번 퍼즐에서만 큰 인정을 하기로 하자. 예를 들어 좌우가 막힌 빈 칸이 있어, 9라고 적혀있으면 숫자 9도 십자수풀이에 등장한 것으로 가정한다. 등장숫자가 많아질수록 중복 가능성이 올라가므로 더 어려운 조건을 추가한 셈이다.

진후는 다음 조건을 만족하는 $n \times n$ 십자수풀이 퍼즐이 가능한지 찾고 있다.

- (1) 등장 숫자는 모두 제공수이다.
- (2) 가로로 등장하는 숫자 개수와 세로로 등장하는 숫자 개수 모두 n 개이다.
- (3) 가로로 등장하는 숫자들의 자릿수는 모두 다르고, 세로로 등장하는 숫자들의 자릿수도 모두 다르다.

가장 간단한 경우인 2×2 의 경우 대칭을 제외하면 다음과 같은 경우만이 가능하다.

1	6
	4

가로로 등장하는 숫자는 16과 4로, 서로 자릿수가 다른 두 제공수이다. 세로로 등장하는 숫자는 1과 64로 역시 서로 자릿수가 다른 두 제공수이다. 등장하는 숫자는 가로와 세로를 통틀어 중복되는 것은 없다.

여기서 문제, 3×3 의 경우 같은 조건을 만족하는 십자말풀이 퍼즐이 존재할까? 존재하면 예시를 찾고, 없다면 불가능을 증명해보자.