

1. 사용 가능한 숫자 파악 : 세 번째 조건에 의해 등장하는 ‘가로/세로에 등장하는 숫자들의 자릿수는 모두 다르다’에 의해 사용 가능한 제공수를 나열하면 다음과 같고, 앞으로 사용할 제공수는 여기에 한정하도록 하자.

- 1) 한 자리 제공수 : 1, 4, 9
- 2) 두 자리 제공수 : 16, 25, 36, 49, 64, 81
- 3) 세 자리 제공수 : 169, 196, 289, 324, 361, 529, 576, 625, 729, 784, 841, 961

2. 대칭을 제외하고 가장 윗줄, 제일 왼쪽에 등장할 수 있는 숫자의 경우를 빈칸부터 9까지 10가지의 경우를 나누어 생각하면 다음과 같다.

1) 1이 등장하는 경우 : 세 자리 제공수가 등장한다면 169, 196 두 자리 제공수가 등장한다면 16, 한 자리 제공수가 등장한다면 1인데, 169와 16을 모두 사용한다면 6이 2번 사용되므로 가능하지 않다. 따라서 (1, 16)이나 (1, 169), (1, 196)만 가능하고, 이를 나열하면 다음과 같고, 각각의 경우에 대해 나머지 칸을 채우기 위해 제공수를 고려하면 다음과 같이 숫자가 겹치거나 존재하지 않아 나머지 칸을 채우는 것이 불가능함을 알 수 있다.

1	6	9
×		
×		

⇒

1	6	9
×	2	5
×	5	

,

1	6	9
×	4	9
×	×	

1	6	×
×		
×		

⇒

1	6	×
×	4	9
×	×	×

,

1	6	×
×	2	5
×	5	

1	9	6
×		
×		

⇒

1	9	6
×	6	4
×		

,

1	9	6
×		2
×	2	5

2) 2가 등장하는 경우 : 세 자리 제공수가 등장한다면 289, 두 자리 제공수가 등장한다면 25이므로, 289, 25가 둘 다 등장해야 한다. 이때, 5로 시작하는 제공수는 529, 576인데, 529는 2와 9가 중복되므로 안되고, 576이 가능하지만, 87x로 시작하는 제공수는 존재하지 않아 모순이다.

2	8	9
5		
×		

⇒

2	8	9
5	2	9
×	×	×

,

2	8	9
5	7	6
×	×	1

3) 3이 등장하는 경우 : 세 자리 제곱수는 324, 361, 두 자리 제곱수는 36이 가능하다.

① (324, 361)이 사용되는 경우 : 두 번째 가로줄 및 세로줄에 2로 시작하는 제곱수, 6으로 시작하는 제곱수 중에서 가운데 수를 공통으로 가지고 있는 경우는 각 자리 수가 모두 다른 제곱수 중에서는 존재하지 않으므로 모순이다.

② (324, 36)이 사용되는 경우 : 같은 방법으로 (2, 2)를 채울 수 없으므로 모순이다.

③ (361, 36)이 사용되는 경우 : 6이 중복되어 모순이다.

3	6	1
2		
4		

3	6	×
2		
4		

3	6	1
6		
×		

4) 4가 등장하는 경우 : 세 자리 제곱수는 존재하지 않고, 두 자리 제곱수는 49, 한 자리 제곱수는 4이므로 49, 4가 둘 다 사용되어야 한다. 여기서 두 번째 줄을 채우기 위해 9로 시작하는 제곱수를 고려하면 961 밖에 없다. 한편, 나머지 두 칸을 채우기 위해서는 64밖에 없는데, 4가 중복이라 불가능하다.

4	9	×
×		
×		

⇒

4	9	×
×	6	
×	1	

⇒

4	9	×
×	6	4
×	1	

5) 5가 등장하는 경우 : 5로 시작하는 제곱수는 529, 576밖에 없으므로 두 숫자를 모두 사용해야 한다. 두 번째 줄을 채우기 위해 7로 시작하는 제곱수를 생각하면 729인데, 2가 중복되므로 불가능하다.

5	7	6
2		
9		

6) 6이 등장하는 경우 : 6으로 시작하는 제곱수는 625, 64밖에 없으므로 두 숫자를 모두 사용해야 한다. 두 번째 줄을 채우기 위해 4로 시작하는 제곱수를 생각하면 49, 4 두 가지가 있는데, 두 경우 모두 다음과 같이 불가능하다.

6	2	5
4		
×		

⇒

6	2	5
4	9	
×		

혹은

6	2	5
4	×	
×	×	

- 7) 7이 등장하는 경우 : 7로 시작하는 제곱수는 729밖에 없어서 불가능하다.
 8) 8이 등장하는 경우 : 8로 시작하는 제곱수는 841, 81 두 가지 밖에 없는데 1이 중복되어서 불가능하다.
 9) 9가 등장하는 경우 : 9로 시작하는 제곱수는 9, 961 두 가지 밖에 없으므로 두 숫자를 모두 사용해야 한다. 이때, 두 번째 줄을 채우기 위해 6으로 시작하는 제곱수를 생각하면 64, 625 두 가지가 있는데, 두 경우 다음과 같이 불가능하다.

9	6	1
×		
×		

⇒

9	6	1
×	4	
×	×	

혹은

9	6	1
×	2	
×	5	

10) 제일 윗줄, 왼쪽 칸이 빈칸인 경우 윗줄과 왼쪽 줄에 들어갈 숫자는 두 자리 제곱수이거나 한 자리 제곱수 여야 한다. 따라서, 두 곳 모두 두 자리 제곱수, 두 곳 모두 한 자리 제곱수, 한 자리 제곱수 + 두 자리 제곱수의 3가지 조합이 가능하다.

- ㉠ 두 곳 모두 한 자리 제곱수인 경우 : 1, 4, 9중 2개를 사용해야 한다.
 ㉡ 4가 사용되는 경우, 4로 시작하는 제곱수가 49밖에 없으므로 9와는 중복되어 사용할 수 없다.
 ㉢ 9가 사용되는 경우, 9로 시작하는 제곱수가 961밖에 없으므로 1과는 중복되어 사용할 수 없다.
 따라서, 1, 4만 사용해야 한다. 이를 정리하면 다음의 4가지가 나온다.

×	4	×
1		
×		

×	4	×
×		
1		

×	×	4
1		
×		

×	×	4
×		
1		

이때, 4로 시작하는 제곱수가 49밖에 없으므로 각 경우에 9를 넣으면 다음과 같다.

×	4	×
1	9	
×	×	

×	4	×
×	9	
1	×	×

×	×	4
1	9	
×		×

×	×	4
×		9
1		×

모든 경우에 대해 가능한 제곱수를 다 넣으면 다음과 같고, 모두 숫자가 겹치거나 제곱수가 부족해서 불가능함을 알 수 있다.

×	4	×
1	9	6
×	×	4

×	4	×
×	9	×
1	×	×

×	×	4
1	6	9
×	4	×

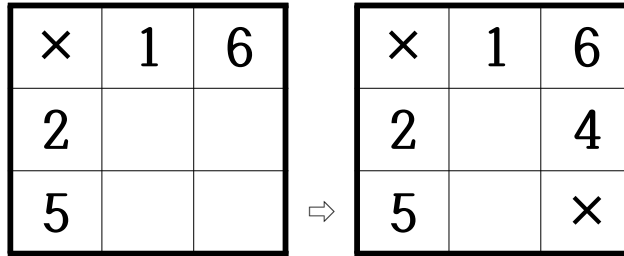
×	×	4
×		9
1	6	×

② 두 곳 모두 두 자리 제곱수인 경우 : 16, 25, 36, 49, 64, 81중 두 개를 사용해야 하는데, 겹치는 수를 제외한 조합을 살펴보면 (16, 25), (16, 49), (25, 36), (25, 49), (25, 64), (25, 81), (36, 49), (36, 81), (49, 81), (64, 81)의 10가지가 있다.

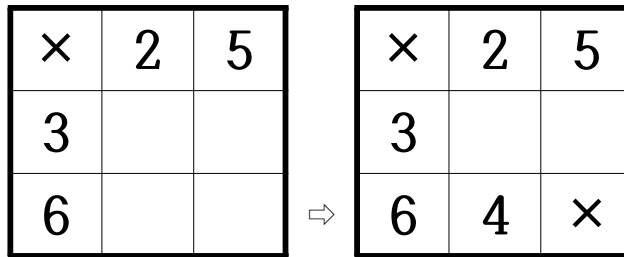
㉠ 4가 사용되는 경우, 4로 시작하는 제곱수는 4, 49뿐인데, 이미 49가 사용된 만큼 모든 경우에 대해 불가능하다.

㉡ 6이 사용되는 경우, 6으로 시작하는 제곱수는 625, 64인데, 25와 함께 사용되는 6은 64로만 사용가능한데, 각각 모두 다음과 같이 2x4로 표현되는 제곱수가 없어서 모순이다. 또한, 81과 36의 조합에서는 8x4, 8x2로 표현되는 제곱수가 없어서 모순이다.

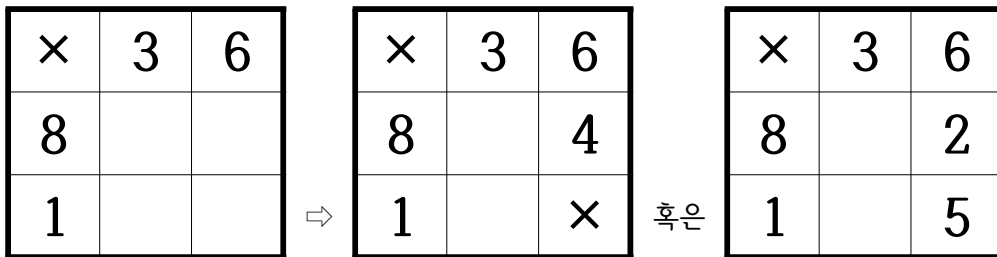
㉢ (16, 25)의 경우



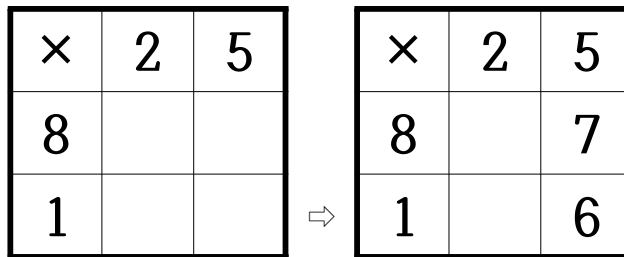
㉣ (25, 36)의 경우



㉤ (36, 81)의 경우



㉥ 25와 81의 조합의 경우, 5로 시작하는 제곱수는 중복을 제외한다면 576밖에 없는데, 이 경우 8x7로 표현되는 제곱수가 없어서 모순이다.



③ 한 자리 제곱수 + 두 자리 제곱수가 사용되는 경우

㉠ 한 자리 제곱수로 1이 사용되는 경우 : 그때 가능한 두 자리 자연수는 25, 36, 49, 64가 가능하다.

이때, 나머지 자리를 채우기 위해 1로 시작하는 제곱수를 생각하면 16, 169, 196인데 모두 6이 사용되므로 64는 고려할 필요가 없다.

㉡ (1, 49)의 조합의 경우, 1로 시작하는 제곱수 중 9가 사용되지 않는 제곱수는 16뿐이므로 16의 위치에 따른 경우를 고려하면 다음과 같다.

×	4	9
1	6	×
×		

혹은

×	4	9
×		
1	6	×

⇒ 두 경우 각각 46x, 4x6으로 표현되는 제곱수가 없어서 불가능

㉢ (1, 25)의 조합의 경우, 나머지 칸을 채우기 위해 2로 시작하는 제곱수를 고려하면 25를 제외한 289밖에 없고, 다음과 같다.

×	2	5
1	8	
×	9	

혹은

×	2	5
×	8	
1	9	

⇒

×	2	5
×	8	7
1	9	6

⇒ 처음의 경우는 18x으로 시작하는 제곱수가 없어서 불가능하고, 두 번째 경우는 19x으로 표현되는 제곱수 196과 5x6으로 표현되는 제곱수 576을 넣어보면 87이 제곱수가 아니라 불가능하다.

㉣ (1, 36)의 조합의 경우, 3으로 시작하는 제곱수 중 6, 1을 쓰지 않는 제곱수는 324 하나인데, 12x, 1x4로 표현되는 제곱수가 존재하지 않아 불가능하다.

×	3	6
1	2	
×	4	

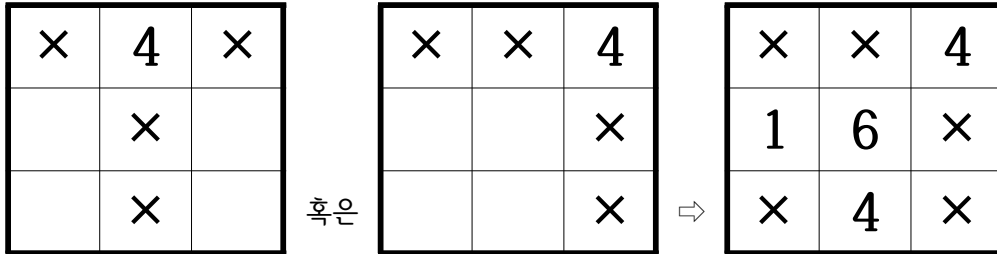
혹은

×	3	6
×	2	
1	4	

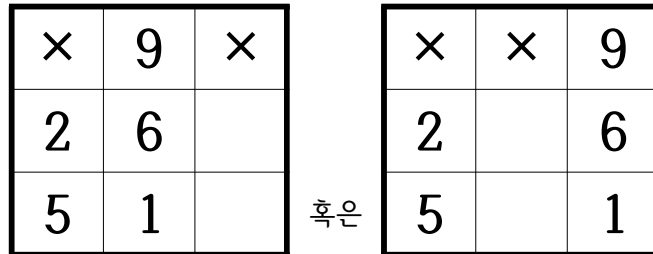
㉔ 한 자리 제곱수로 4가 사용되는 경우 : 나머지 칸을 채우기 위해 4로 시작하는 제곱수를 고려하면 4뿐이므로 다음과 같이 모든 경우에 대해 불가능하다.

㉕ 4가 가운데에 들어가는 경우 : 왼쪽 혹은 오른쪽 줄이 비어있게 된다.

㉖ 4가 가장 오른쪽위 혹은 왼쪽 아래에 들어가는 경우 : 4를 구석에 채우고 나면 남은 칸은 2×2 인데, 2×2 의 경우는 문제에 제시된 경우처럼 16, 64만 가능해 4가 중복되어 불가능하다.



㉗ 한 자리 제곱수로 9가 사용되는 경우 : 그때 가능한 두 자리 자연수는 16, 25, 36, 64, 81이 가능하다. 또한, 나머지 칸을 채우기 위해 9로 시작하는 제곱수를 고려하면 961밖에 없으므로 중복을 제외하면 두 자리 자연수는 25만 사용 가능하다. 각각의 경우에 $26x$, $2x6$ 으로 표현되는 제곱수가 없어 불가능하다.



따라서, 모든 경우에 대해 불가능하다.