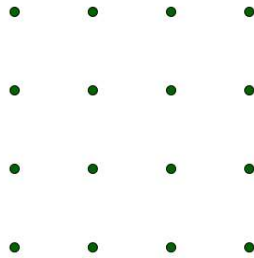


비스듬히 숨어 있는 정육면체

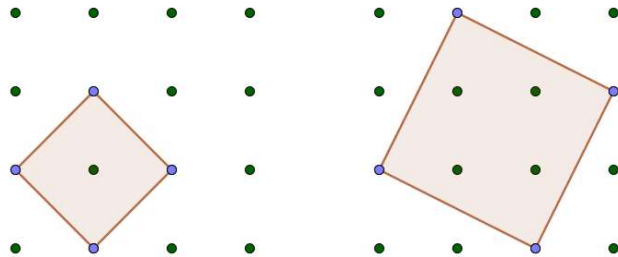
조정휘

2023년 6월 18일

다음과 같은 유명한 문제를 본 경험이 있는 독자들이 많을 것이다.

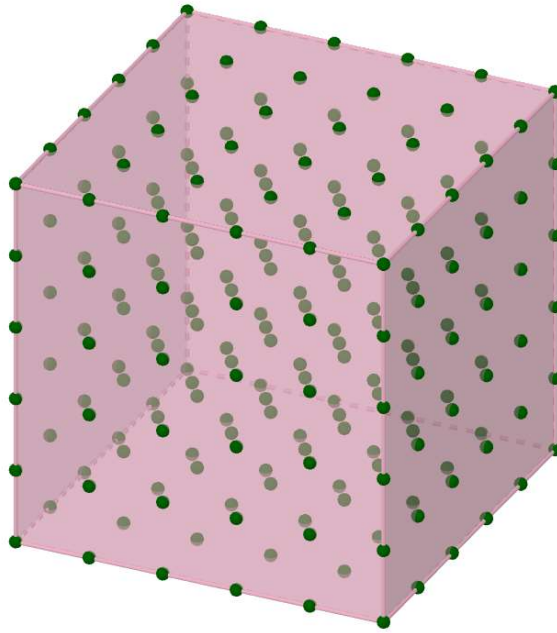


위와 같이 4×4 모양의 정사각 격자점들이 있다. 이 점들 중 일부를 꼭짓점으로 하여 만들 수 있는 정사각형은 총 몇 개일까? 한 변의 길이가 1인 것 9개, 2인 것 4개, 3인 것 1개로 하여 총 14개라고 답을 내는 사람이 많다. 하지만 이 문제에는 함정이 숨어 있는데,



이렇게 비스듬히 숨어 있는 정사각형까지 고려해야 한다는 것이다. 왼쪽과 같은 정사각형이 총 4개, 오른쪽과 같은 정사각형이 (좌우대칭을 감안하여) 2개가 있으므로 정답은 이를 합한 20개이다.

이번 달의 퍼즐은 이 문제를 3차원으로 확장한 것이다! 공간상에 다음과 같은 $6 \times 6 \times 6$ 모양의 정육면체 격자를 생각하자.



좌표공간에서 x 좌표, y 좌표, z 좌표가 전부 0, 1, 2, 3, 4, 5 중 하나인 점들로 생각하면 된다. 이제 여기 있는 점들 중 일부만을 꼭짓점 삼아서 비스듬히 숨어 있는 정육면체를 하나 찾아 보자. 비스듬히 숨어있다는 것을 정확히 말하자면, 모서리들 중에 x 축이나 y 축, 혹은 z 축에 평행한 것이 없다는 뜻이다.

힌트: 대칭을 고려하면 여러 가지의 답이 있지만, 그 중 하나는 (1,1,1)을 한 꼭짓점으로 갖는다.

이하는 좌표공간에서의 기하가 익숙하지 않은 독자들을 위한 팁이다.

좌표공간 위의 점들 $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3), D(d_1, d_2, d_3)$ 에 대하여

1. 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

로 구한다.

2. 선분 AB와 선분 CD가 수직인지 아닌지 알고 싶을 때는

$$(a_1 - b_1)(c_1 - d_1) + (a_2 - b_2)(c_2 - d_2) + (a_3 - b_3)(c_3 - d_3)$$

의 값을 계산하여 0인지 아닌지를 살펴보면 된다. 0이 나오면 두 선분은 수직이고, 0이 아니면 수직이 아니다.