

<해파리 가족의 힐베르트 호텔 바캉스>

이번 문제는 특정 출처로부터 영감을 받아 만들어졌다. 스포일러 방지를 위해 그 출처는 해설에 공개하기로 하고, 지금은 아래 대화풍의 문제를 바로 만나보자.

컨시어지: 힐베르트 호텔에 오신 걸 환영합니다. 어떻게 도와드릴까요?

해파리: 먼저 저희 가족부터 소개해야겠네요, 저희는 단일한 선조로부터 출아법을 거듭해 태어났습니다. 모두 똑같이 생겼지만, 다행히 가족 전체가 수학을 연구한 덕에 규칙에 따라 번호를 붙여 서로를 구분하고 있습니다. 최초의 선조는 1번입니다. 1번의 j 번째 자손은 $1-j$ 번이 되고, $1-j$ 번의 k 번째 자손은 $1-j-k$ 번이 되는, 그런 규칙입니다. 물론 쌍둥이는 없습니다.

컨시어지: 혹시 무한 수열을 번호로 갖는 분들이 무한히 계신지요? 저희 힐베르트 호텔은 무한히 많은 자연수 객실이 있지만, 경우에 따라 호텔에 방이 부족할 수 있습니다.

해파리: 아, 저희 인원은 유한합니다. 모두 유한 수열을 번호로 가지고 있구요. 문제는 따로 있어요. 저희 가족은 특별한 수학적 풍습이 있습니다.

두 해파리가 직계관계일 경우 머무는 객실 번호끼리 2 이상의 공약수가 있어야 해요. 반대로 방계일 경우 객실 번호끼리 서로소 관계여야 합니다.

인원이 상당히 많은데, 전부 1인실을 쓸 수 있을까요?

컨시어지: (잠시 생각한 다음) 조건에 맞게 배정 가능합니다. 마침 모든 방이 비어있으니 제 요청에 따라 움직여주시면 감사하겠습니다.

컨시어지가 생각한 방법은 무엇일까?

보너스 문제 (어려운 버전)

해파리 가족의 풍습이 위와 반대였다고 가정하자. 즉,

-두 해파리가 직계관계일 경우 머무는 객실 번호끼리 서로소 관계여야 한다.

-두 해파리가 방계관계일 경우 머무는 객실 번호끼리 2 이상의 공약수가 있어야 한다.

이 경우에도 컨시어지는 조건에 맞게 방을 배정할 수 있을까?