

해설:

이 문제는 필자가 과거에 연구했던 모형론(Model Theory)에서 수형 성질(Tree Property)와 반사슬 수형 성질(Antichain Tree Property)을 골라 처음 본 사람도 이해할 수 있게 변형, 각색한 것이다. 자세한 사항이 궁금한 독자는 다음 논문(<https://arxiv.org/abs/2106.03779>)의 저장과 마지막 장의 예시 4.31을 참고하기를 바란다.

본문제)

족보상의 모든 해파리들에게 서로 다른 소수(Prime number)를 부여하자. 소수의 개수는 무한하므로 문제없이 지정할 수 있다.

다 지정했으면, 각 해파리가 머물 객실 번호를 '자신과 자신의 모든 후손 해파리들에게 부여된 각 소수들의 곱'으로 계산한다. 직계의 경우 후손 집합이 포함관계에 있기 때문에 한 쪽이 다른 쪽의 배수가 되고(따라서 두 숫자 중에 작은 숫자가 공약수가 된다.) 방계의 경우 두 해파리의 후손집합은 서로소 관계에 있기 때문에(즉, 교집합이 공집합이기 때문에) 공약수가 될 수 있는 소수가 존재하지 않는다. 따라서 객실 번호는 서로소 관계가 된다.

보너스 문제)

보너스 문제의 정답은 '가능하다'이다. 본 문제와 마찬가지로 소수를 어떻게 배정하느냐가 핵심이다.

해파리 가족의 모든 방계관계 쌍을 구하고, 이들 쌍에게 서로 다른 소수를 부여하자. 해파리 가족이 N명일 때 관계 쌍의 크기는  $N(N-1)/2$ 를 넘지 않으므로 유한하다.

다 지정했으면, 각 해파리가 머물 객실 번호를 '자신이 포함된 모든 방계관계 쌍마다 부여된 각 소수들의 곱'으로 계산한다. 두 해파리가 방계관계라면 그들 쌍에게 부여된 소수가 객실 번호의 공약수 역할을 한다. 역으로 두 해파리의 객실 번호 사이에 2 이상의 공약수가 있다면 둘은 방계관계이다. 이유는 다음과 같다.

공약수가 있다고 가정하고 가장 작은 소수 공약수를 p라고 하자. 객실 번호의 곱을 이루는 소수들은 방계관계 쌍마다 부여된 소수들이므로 p 역시 어떤 방계관계 쌍 {X, Y}에 부여된 소수였을 것이다. 그러면 객실 번호 정의에 의해 두 해파리는 모두 쌍 {X, Y}의 원소가 된다. 따라서 두 해파리는 방계관계이다. 대우를 취하면 직계관계의 해파리끼리는 객실 번호가 서로 소임을 알 수 있다.