데이터의 모양을 담는 바코드

김우진

January 2024

들어가며

위상수학적 데이터 분석topological data analysis(TDA) 연구 커뮤니티가 2000년대 초반 형성되기 시작한 뒤, 위상수학이 데이터 분석에서 점점 더 널리 이용되고 있다. TDA는 위상수학을 데이터 분석에서 이용하기 위한 수학적, 통계학적, 알고리즘적 기반을 다지고 이를 실제 활용하는 방법을 연구하는 분야이다. TDA의 가장 대표적인 개념 중 하나가 *지속적 호몰로지Persistent Homology*이다. *지속적 호몰로지*는 대수적 위상수학의 대표적인 개념인 *호몰로지*를 데이터 분석에 적합하도록 개량한 현대적 개념이라 할 수 있다. 이 글에서는 지속적 호몰로지의 아이디어를 소개하고자 한다.

이산적인 데이터의 모양을 어떻게 측량할까?

지속적 호몰로지는 어떤 기하적/위상적 정보를 가진 (혹은 가졌다고 믿는) 유클리드 공간 속 유한개의 점으로 구성된 데이터를 분석할 때 특히 유용하다. 유클리드 공간 속 유한개의 점으로 구성된 집합을 *점구름point cloud*이라 부르자. 예를들어 어떤 물질의 원자 배열구조가 주어졌을 때 원자의 중심들은 3차원 공간 안의 점구름이 된다 (그림 1). 또한, 많은 응용사례에서 어떤 다양체manifold 또는 의사다양체pseudomanifold에서 점구름이 실제 추출되거나, 그렇다고 가정된다. 이러한 경우 점구름의 모양은 그 출처 공간에 대한 중요한 기하적/위상적 정보를 담는 것이 분명하다.

예를들어, 점구름으로 주어진 데이터 X가 그림 2와 같이 평면 위에 주어졌다고 하자. 이 데이터는 숫자 8에서 몇 개의 점을 추출한 것과 같이 보인다. 우리는 이 점구름으로부터 연속적인 형체 8을 떠올리는게 자연스러운데, 이러한 추론을 컴퓨터도 스스로 할 수 있을까?

우리가 숫자 8을 떠올린 이유를 생각해보자. 아마도 *가까운 점들끼리는 연결되어 있다*고 상상했기 때문일 것이다. 이를 좀 더 정밀한 방법으로 기술해보자. 주어진 점구름 X를 *'대충보는 정도'*를 나타내는 어떤 '적당한' 양의 실수 r를 정하자. 여기서 r*만큼 대충본다*는 것은 각 점 $x \in X$ 대신 x를 중심으로 하는 반지름 r인 원반disk으로 대체하여 바라보겠다는 것이다 (그림 3).

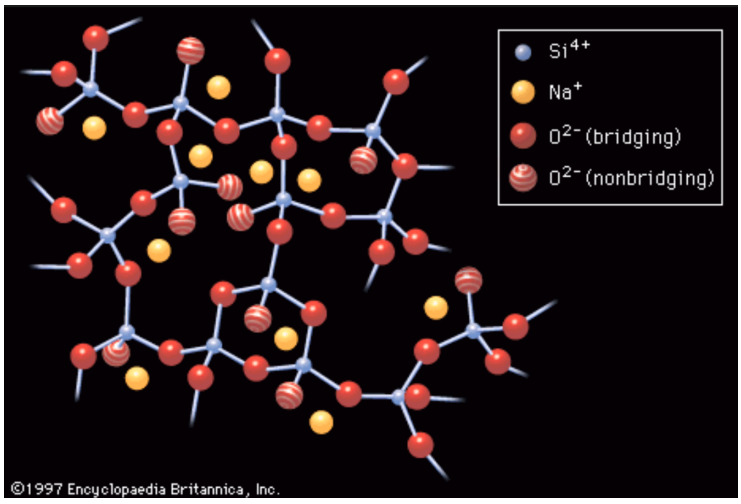


Figure 1:

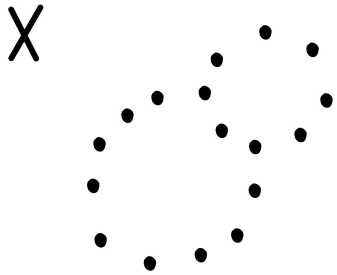


Figure 2:

이 원반들의 합을 $B(X;r)$로 표기하자. 적당한 r의 선택 덕분에 $B(X;r)$은 뚜렷이 8의 형태를 갖는다. 엄밀히 말해 숫자 8과 $B(X;r)$은 호모토피 동치homotopy equivalent인데, 이는 $B(X;r)$을 고무찰흙으로 만들어진 물체라 상상한 뒤 '연속적인 변형'을 통해 (구부리거나, 늘리거나, 압축하는 등) 숫자 8로 만들 수 있다는 의미로 생각하면 무리가 없다. 물론 8의 형태를 갖게된 결정적인 이유는 원반들의 반지름 r을 적당히 잘 잡았기 때문이다. r이 충분히 작았다면 $B(X;r)$은 기존의 점구름 형태와 별반 다르지 않을 것이고 r 이 충분히 크다면 $B(X;r)$은 하나의 커다란 덩어리 형태일 것이다. 그런데 사실 임의의 점구름이 주어졌을 때 각 점을 대체할 원반의 *적당한 반지름* r이라는 것은 정의된 바가 없음에 주목하자. 게다가 딱히 잘 정의할 방법도 떠오르지 않는다!

그렇다면 적당한 r을 고르는 대신 *모든 실수* $r \geq 0$을 고려하기로 하면 어떨까? r이 0부터 증가함에 $B(X;r)$은 점점 더 커져 그림 4가 묘사하듯

(1) 처음에는 서로 겹치지 않는 원반들의 형태를 띄다가

(2) 두 구멍이 형성되어 8의 형태를 갖고 (즉, 크기가 다른 두 구멍이 생성됨)

(3) 작은 구멍이 먼저 메워지며 사라지고

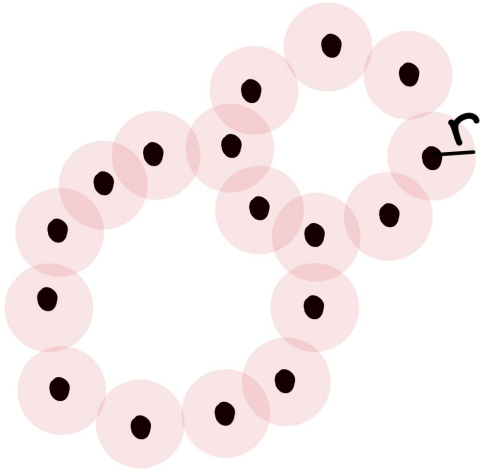


Figure 3: 작은 구멍과 큰 구멍이 생성된 원반들의 합 $B(X;r)$

(4) 나중에는 큰 구멍 역시 메워져 사라진다.

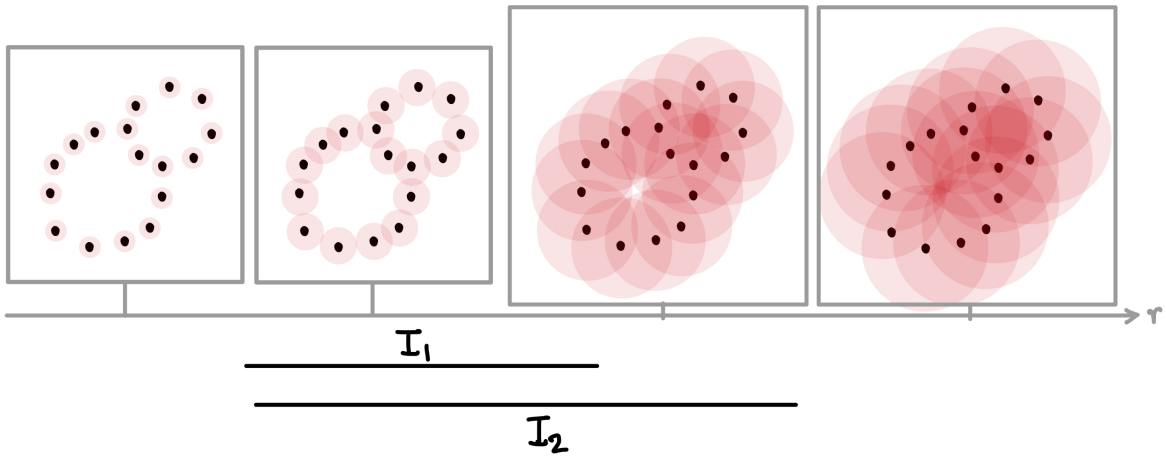


Figure 4:

그림 4와 같이 구간 I_1, I_2 를 각각 작은 구멍, 큰 구멍이 '살아있는' r의 값들의 모임으로 정의할 수 있다. 이 두 구간을 어떻게 정확히 계산할 수 있는지 살펴보기 위하여 호몰로지에 대해 조금 더 자세히 살펴볼 것이다. (예시로 주어진 점구름은 아주 단순해서 두 구간 I_1, I_2를 더 엄밀하게 정의하고 계산할 필요성에 대해 느끼지 못할 수 있다. 그러나 만약 점구름 X가 4차원의 유클리드 공간안에 있고 2차원 원반대신 4차원 원반들의 합 $B(X;r)$을 고려하면, 우리는 X나 $B(X;r)$을 눈으로 직접 볼 수 없기 때문에 위와 같이 시각화에 의존하는 방식은 통하지 않는다. 또한 저차원 공간에 주어진 점구름이라 할지라도 점의 개수가 많아지고 그 형태가 조금만 복잡해지면 구멍들을 인지하고 각 구멍에 이름을 붙이는 것 자체가 쉽지 않은 작업이다.)

구멍과 그를 위한 대수학–호몰로지

백형렬 교수님이 예전에 기고한 Horizon의 기사 *거리 개념이 없는 세상에서 가깝고 멂을 정의하기*에서 '형태가 주어진 집합'을 위상공간이라 부르기로 했다는 것을 기억해보자. 우리가 지금 살펴볼 *호몰로지*는 위상공간 안에 '구멍'의 존재와 그 '구멍'들 사이의 연결관계에 대해서 서술하는 대수적인 도구이다. 그런데 '구멍'이란 것이 무엇일까? 가령 속이 찬 삼각형 A와 속이 빈 삼각형 B가 있다고 하자 (그림 5).

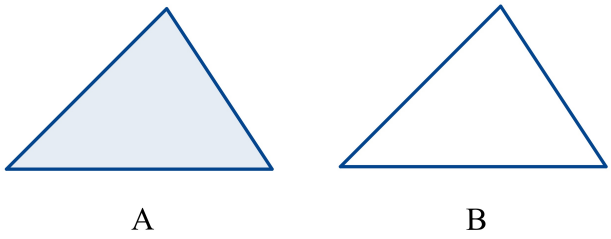


Figure 5:

직관적으로 볼 때, A에는 구멍이 없고 B에는 구멍이 있다. 왜 그러하다고 생각했을까? 먼저 A와 B 모두 세 변을 따라서 한 바퀴 도는 순환로cycle가 있다. 그런데 A의 순환로는 'A 내부영역' (색칠된 부분)의 경계boundary인 반면에 B의 순환로는 'B 내부영역'의 경계가 아니다 ('B 내부영역'은 없음을 기억하자). 즉, *'순환로이면서 내부영역의 경계는 아닌 것'*이 구멍에 대한 개념의 본질이라 할 수 있겠다. 특히 이 예시에서 순환로가 1차원적이므로 B의 구멍은 1차원 구멍이라 하겠다. 한 차원 높은 예시로 꽉찬 정사면체와 속이 빈 정사면체 (네 면은 포함됨)을 생각해보자. (그림 6). 전자는 어떠한 구멍도 갖지 않는 반면 후자는 '속이 비었다'는 사실이 2차원 구멍을 가졌음을 의미한다. 여기서 2차원 순환로는 정사면체의 네 개의 면으로 구성된다.

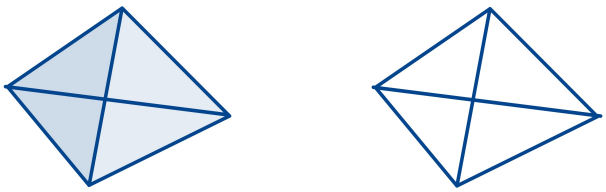


Figure 6:

대수적 위상수학에서는 어떤 주어진 위상공간 X의 *순환로*와 *경계*를 엄밀하게 정의한다. 순환로들의 집합과 경계들의 집합에는 더하기와 빼기를 정의할 수 있어서 군group을 이룬다. (백형렬 교수님의 또다른 Horizon 기사 *자유를 원한다면 탁구를 쳐라*에서 군의 뜻을 찾아볼 수 있다.) 특히 경계는 늘 순환로이며, 이 때문에 경계 군boundary group은 순환로 군cycle group에 포함된다. 경계 군으로 순환로 군을 나눈 것(quotient)을 호몰로지 군homology group이라고 부른다. 요컨대, 순환로이면서 내부영역의 경계는 아닌 것 (즉, 구멍)을 대수학적 방식으로 서술한 것이 바로 호몰로지

군이다. 위의 예시에서 봤듯이 순환로와 경계에는 차원을 부여할 수 있는데, n차원 순환로 군을 n차원 경계 군으로 나눈 군을 *n차원 호몰로지 군*이라고 부른다.

특히 호몰로지 군의 계수coefficient를 체field로 정하면 호몰로지 군은 벡터공간이 되며, 그 벡터공간의 차원을 주어진 위상공간 X의 구멍의 개수로 볼 수 있다. (사실 어떤 체를 계수로 쓰냐에 따라 벡터공간의 차원이 달라질 수 있는데, 이에 대한 자세한 논의는 생략한다.) 임의의 체 $\mathbb{F}$를 고정하고 앞으론 이를 호몰로지 군의 계수로 쓴다고 하자. 예를 들어,

> 그림 5, A에 대하여. 모든 차원의 호몰로지 군은 0이다. 즉, 모든 차원의 구멍이 없다. 이를 수식으로 다음과 같이 쓸 수 있다: 모든 정수 $n \geq 0$에 대하여
>
> $$\mathrm{H}_n(A;\mathbb{F}) = 0.$$
>
> 그림 5, B에 대해서 1차원 호몰로지 군은 벡터공간 $\mathbb{F}$와 동형이다. 그 외 차원의 호몰로지 군은 0이다. 즉, 1차원 구멍이 하나 존재하고 나머지 차원의 구멍은 없다.
>
> $$\mathrm{H}_n(B;\mathbb{F}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & n = 1 \\ 0, & n = 0, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

연속함수는 구멍을 보존할까?–호몰로지의 함자성

예전에 백형렬 교수님이 기고하신 Horizon의 기사 *연속성의 상대성*에서 두 위상공간 사이의 함수의 연속성, 그리고 위상구조에 따른 연속성의 상대성에 대해서 살펴보았다. 앞 절에서 이야기한 호몰로지는 두 위상공간 사이의 연속함수에 대해서도 사실 정의할 수 있다. 두 위상공간 A와 B가 주어지고 그 사이의 연속함수 $f : A \to B$가 주어졌다고 하자. A에 있는 구멍이 f에 의해 B로 사상될 때 그 상image이 여전히 구멍에 해당하는가는 f에 대한 중요한 정보이다. 우리가 n차원 구멍의 보존에 대해 관심이 있다면, f의 n차원 호몰로지인 $\mathrm{H}_n(f;\mathbb{F})$를 계산해보면 된다. $\mathrm{H}_n(f;\mathbb{F})$은 다름아닌 벡터공간 $\mathrm{H}_n(A;\mathbb{F})$에서 벡터공간 $\mathrm{H}_n(B;\mathbb{F})$으로 가는 선형사상이다. 이 선형사상의 랭크rank가 클수록 f의 '구멍보존성'이 높다고 할 수 있다. 특히 고무찰흙으로 만들어진 어떤 위상공간 A를 다른 위상공간 B로 연속적 변형 $f : A \to B$ 을 통해 만들어낼 수 있다면 (즉, f가 호모토피 동치라면) 모든 n에 대하여 선형사상 $\mathrm{H}_n(f;\mathbb{F}) : \mathrm{H}_n(A;\mathbb{F}) \to \mathrm{H}_n(B;\mathbb{F})$은 동형사상isomorphism이다. 이는 구멍보존성이 최대치인 예라 할 수 있다.

또다른 예로 A와 B가 그림 5와 같이 주어진 공간이라 하고 함수 i를 B에서 A로 가는 자연스러운 포함함수라고 하자. 즉, B를 A에 왜곡없이 고스란히 매립하는 함수를 떠올리면 된다. 이 때, B의 순환로가 i에 의해 A의 순환로로 보내진다 (그림 7).

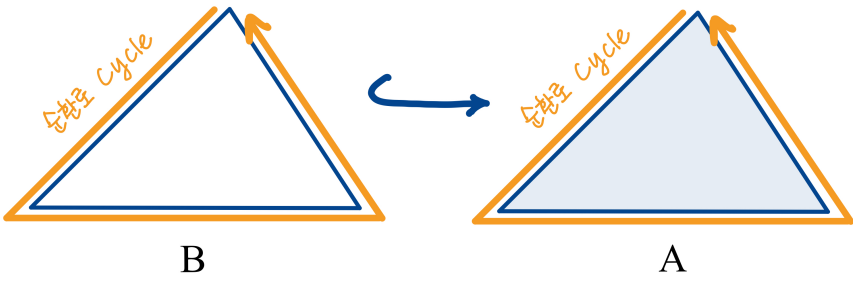


Figure 7:

그런데 그 순환로가 B에서 구멍이었을지언정 A에서는 구멍이 아님을 보았다. 이 사실은 i에 대응하는 1차원 호몰로지는 영함수 $\mathrm{H}_1(i;\mathbb{F}) : \mathbb{F} \to 0$로서 그 랭크가 0임으로 나타난다.

점점 더 커지는 연속적 물체를 점점 더 커지는 이산적 물체로 요약하기

이제 그림 4와 같이 점점 커지는 유한개의 원반합에서 구멍의 생성과 소멸을 어떻게 컴퓨터가 계산할 수 있을지 알아보자 (다시 강조하지만 시각화에 의존하는 방법은 충분치 않다). 먼저 음이 아닌 실수 r을 고정하자. 좌표평면 위의 임의의 점 x에 대하여 $B(x;r)$ 을 x를 중심으로하는 반지름 r의 닫힌 원반이라 하자. 그러면 앞에서 정의한 원반들의 합 $B(X;r)$은 모든 $x \in X$에 대한 $B(x;r)$의 합집합이다. 다음 X의 부분집합들의 모임을 생각하자.

$$\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r) = \left\{ A \subset X : \bigcap_{x\in A} B(x;r) \neq \emptyset \right\}.$$

이 집합은 **X의 r-체흐 복합체**라 불린다. 위 수식을 찬찬히 해석해보면 다음을 알아낼 수 있다.

1. 모든 점 $x \in X$에 대해 $\{x\} \in \check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$.
2. 임의의 두 점 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 두 원반 $B(x_1;r)$과 $B(x_2;r)$가 겹치면 $\{x_1, x_2\} \in \check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$.

$$\vdots$$

n. X에 포함된 임의의 서로 다른 n개 점에 대해 그들이 대응하는 원반들의 교집합이 비어있지 않으면 그 n개 점으로 구성된 집합은 $\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$의 원소이다.

위에서 보듯이 $\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$는 유한집합 X의 특정 부분집합들로 구성된 모임일 뿐이므로, 어떤 무한개의 점을 포함하는 연속적인 위상공간과는 다르다. 그럼에도 불구하고 $\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$로부터 다음과 같은 연속적인 위상공간을 떠올릴 수 있다: 임의의 $A \in \check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$의 원소의 개수가 1개이면 점, 2개이면 선분, 3개이면 속이 찬 삼각형, 4개이면 속이 찬 정사면체 등등, n개이면 n개의 점으로부터

생성되는 $n-1$차원의 볼록껍질convex hull 으로 치환하여 생각한다. 이들의 합으로 구성된 연속적인 공간을 **Čech$(X;r)$의 기하적 실체**라 하고 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)|$라 쓴다 (그림 8).

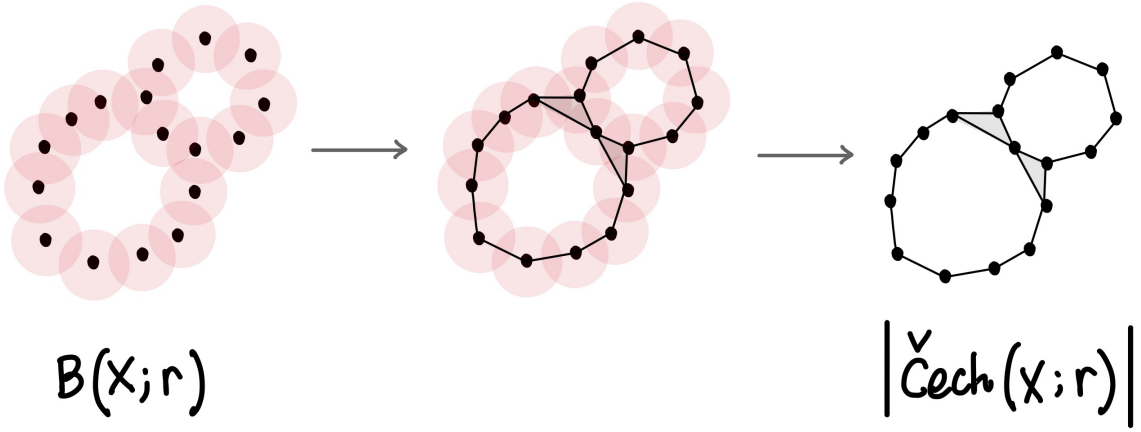


Figure 8:

다음 두 가지에 주목하자.

(1) 그림 8에서 $B(X;r)$ 형태로 주어진 고무찰흙은 연속적 변형을 통해 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)|$ 형태의 고무찰흙으로 만드는 게 가능하다는 것을 관찰하자. 이는 이 예시에서만이 아니라 일반적으로 참이다. 즉, 임의의 점구름 X와 임의의 실수 $r \geq 0$에 대하여 $B(X;r)$은 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)|$와 호모토피 동치이다. 이를 $B(X;r) \simeq |\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)|$로 쓰자. **신경정리**Nerve theorem가 이를 함의한다.

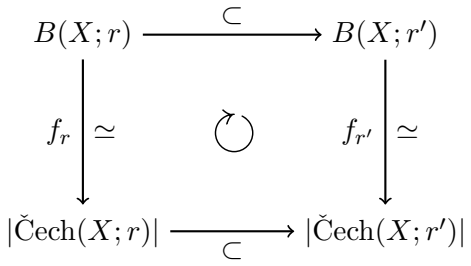
(2) 임의의 실수쌍 $0 \leq r \leq r'$에 대하여 포함관계 $B(X;r) \subset B(X;r')$와 $\check{\text{C}}\text{ech}(X;r) \subset \check{\text{C}}\text{ech}(X;r')$가 성립한다. 두 번째 포함관계는 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)| \subset |\check{\text{C}}\text{ech}(X;r')|$를 함의한다.

(1)에서 언급된 각 r에서의 연속적 변형은 (2)에서의 포함관계들과 잘 조화되도록 선택할 수 있다. 이말인즉슨, 매개변수 r로 색인된 연속적 변형들의 모임 $\{f_r : B(X;r) \to |\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)|\}_{r\geq 0}$ 이 존재하여 모든 실수쌍 $0 \leq r \leq r'$ 에 대하여

(a) $B(X;r)$ 에서 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)|$ 로의 연속적 변형 f_r을 가한 뒤에 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r)|$를 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r')|$ 에 매립embedding하는 것과

(b) $B(X;r)$ 을 $B(X;r')$에 먼저 매립하고 $B(X;r')$를 $|\check{\text{C}}\text{ech}(X;r')|$로 연속적 변형 $f_{r'}$을 가하는 것

은 동일한 결과를 낳은다. 다르게 말하면 모든 실수쌍 $0 \leq r \leq r'$ 에 대하여 다음 포함함수들inclusion maps (가로 화살표들)과 호모토피 동치 함수들(세로 화살표들)로 이루어진 다이어그램이 순환한다.



(1)

이는 **함자적 신경정리**에 의한 결과이다 [1].

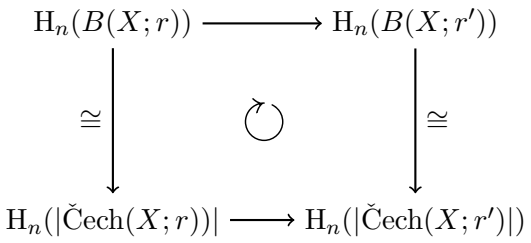
종합하자면 $B(X;r)$의 위상구조에 대한 정보는 이산적 물체인 $\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$에 요약되며 그 요약 방식은 r의 변화에 대해서 *일관적 혹은 자연적*으로 설정될 수 있다.

우리가 예시로 이용한 숫자 8 형태의 점구름은 2차원 평면에 포함되어 있지만, 위의 정의와 정리들은 다른 차원으로도 자연스럽게 일반화된다. 예를들어 만약 점구름이 3차원 좌표공간 공간안에 주어진다면 $B(x;r)$를 2차원 원반 대신 3차원 원반 (속이 찬 구)으로 대체하기만 하면 위의 다이어그램 (1) 이 순환한다.

모든 실수쌍 $0 \leq r \leq r'$ 에 대하여 다이어그램 (1)이 순환한다는 것은 r이 증가함에 따라 점점 커지는 공간 $B(X;r)$의 지속적 호몰로지(??) 계산을 점점 커지는 이산적 물체 $\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$로 요약할 수 있음을 의미하며, 이는 $B(X;r)$의 지속적 호몰로지 계산을 알고리즘으로 구현할 수 있게 해주는 중요한 징검다리 역할을 한다.

점구름의 모양을 바코드에 담아내기

호몰로지의 계수가 어떤 체 $\mathbb{F}$라 하고 $\mathrm{H}_n(-;\mathbb{F})$ 대신 $\mathrm{H}_n(-)$로 간단히 쓰기로 하자. 모든 실수쌍 $0 \leq r \leq r'$ 에 대하여 다이어그램 (1)이 순환한다는 사실은 곧 모든 실수쌍 $0 \leq r \leq r'$ 에 대하여 다음 다이어그램이 순환한다는 것을 의미한다.



여기서 가로 화살표는 포함함수들의 호몰로지를 나타내고 세로 화살표는 호모토피 동치의 호몰로지이므로 동형함수이다 (동형함수 임을 강조하고자 $\cong$를 썼다). 특히 위상공간 $|\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)|$는 유한집합 $\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)$에 그 위상구조에 대한 정보를 완벽히 담으므로, 매개변수화된 호몰로지군의 모임 $\{\mathrm{H}_n(|\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)|)\}_{r\geq 0}$에 대한 모든 대수적인 정보는 유한집합들의 매개변수화된 모임 $\{\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)\}_{r\geq 0}$으로부터 얻어질 수 있다.

그런데 $\{\mathrm{H}_n(|\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)|)\}_{r\geq 0}$ 의 대수적인 구조는 집합 $[0,\infty)$ 안의 실구간들의 집합으로 완벽하게 특성화될 수 있는데, 이는 이 글에서는 다루지 않는 어떤 대수적인 정리에 따른다 [7]. 이 실구간들의 집합을 X**의 n번째 체흐 지속적 호몰로지 바코드**라고 부른다. 이 바코드는 당연히 이산적인 물체인 $\{\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X;r)\}_{r\geq 0}$ 로부터 계산될 수 있다. 바코드에 있는 각 실구간은 r의 증가에 따라 원반합 $B(X;r)$에 나타나고 사라지는 특정 n차원 구멍에 대응한다. 그림 4에 나오는 두 구간 I_1과 I_2의 모임이 바로 그림 2에 있는 점구름 X 의 1번째 체흐 지속적 호몰로지 바코드를 나타낸다. 두 개의 다른 길이의 실구간은 크기가 다른 두 개의 구멍이 X에 존재함을 시사한다.

지속적 호몰로지가 처음 도입되던 때에는 바코드에 있는 짧은 구간들은 별로 의미 없는 정보이고 긴 구간들이 데이터에 대한 의미있고 중요한 기하/위상적 정보로 인식되었었다. 하지만 더 최근의 연구에서는 데이터가 곡면으로부터 추출될 때 그 곡면의 곡률에 대한 정보가 짧은 구간에 담겨있을 수 있음이 알려졌다 [3]. 즉, 짧은 구간도 유용한 정보를 담고 있을 수 있다.

실제로 어떻게 바코드를 컴퓨터로 계산할 수 있을까? X가 유클리드 공간 안의 점구름이었음을 기억하자. 이 경우 각 부분집합 $A \subset X$에 대해 A를 포함하는 가장 작은 구의 반지름을 계산하고 X 위에 지어지는 체흐 복합체의 구조를 하나의 행렬로 나타낸 뒤에 기본 행/열 연산을 통해서 바코드를 계산할 수 있다. 이러한 모든 과정의 계산을 위한 소프트웨어는 이미 개발되어 있으며 프로그래밍 언어 Python이나 R에서 각각 scikit-TDA 와 TDA라는 Library를 불러와 쉽게 수행할 수 있다.

마치며

지속적 호몰로지는 점구름으로 주어진 데이터의 국소적/거시적인 연결형태를 바코드로 기술하는데에 유용한 도구임을 살펴보았다. 이는 기존의 통계학이 제공하지 않던 데이터에 대한 새로운 시각을 제시한다. 점구름 데이터로부터 지속적 호몰로지를 만드는 방법은 체흐 복합체를 이용하는 방법 외에도 여러가지가 있으며 [9], 그들에 대응하는 바코드가 있어서 주어진 데이터를 다양한 시각에서 분석할 수 있다. 또한 점구름 외에도 지속적 호몰로지를 유도할 수 있는 다양한 형태의 데이터가 있다 [5].

특정한 방식으로 지속적 호몰로지를 얻을 때 그 방법이 실제 응용에서 유용하게 쓰이기 위해서는 만들어지는 지속적 호몰로지의 바코드가 데이터의 소음으로부터 안정적인지 수학적으로 증명할 필요가 있다. (예를들어 이 글에서 본 점구름의 체흐 복합체로부터 바코드를 얻은 경우 그로모프-하우스도르프 거리 Gromov-Hausdorff distance를 에 대한 그 안정성이 증명되었다 [6]. 박지원 교수님이 쓰신 Horizon 기사 *휘어진 공간의 극한은 어떻게 생겼을까*에서 그로모프-하우스도르프 거리가 무엇인지 찾을 수 있다.). 이렇게 바코드의 안정성을 증명하거나 지속적 호몰로지를 더 추상화하여 연구하는 데에는 위상수학 뿐만 아니라 대수학, 범주론, 조합론 등 다양한 수학이 이용된다는 것이 흥미로운 점이다 [4, 12]. 또한 지속적 호몰로지를 리만 다양체로부터 특정한 방식으로 유도하면 리만

다양체의 중요한 정보가 바코드에 담긴다는 사실이 밝혀지기도 했다 [11].

현재 지속적 호몰로지에 대하여 활발히 연구되고 있는 주제를 몇가지 소개하자면 지속적 호몰로지의 일반화 격인 다매개변수 지속적 호몰로지의 바코드를 정의하는 문제 [2, 10], 지속적 호몰로지 바코드의 통계적인 분석을 위한 이론적 토대 [14], 지속적 호몰로지 바코드의 효과적인 계산 [8], 기계학습에서 지속적 호몰로지 바코드의 활용방법 개발 등이 있다 [13].

References

[1] Ulrich Bauer, Michael Kerber, Fabian Roll, and Alexander Rolle. A unified view on the functorial nerve theorem and its variations. *Expositiones Mathematicae*, 2023.

[2] Magnus Bakke Botnan and Michael Lesnick. An introduction to multiparameter persistence. In *Representations of Algebras and Related Structures, International Conference on Representations of Algebras, ICRA 2020*. European Mathematical Society, 2023.

[3] Peter Bubenik, Michael Hull, Dhruv Patel, and Benjamin Whittle. Persistent homology detects curvature. *Inverse Problems*, 36(2):025008, 2020.

[4] Peter Bubenik and Jonathan A Scott. Categorification of persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, 51(3):600–627, 2014.

[5] Gunnar Carlsson and Mikael Vejdemo-Johansson. *Topological data analysis with applications*. Cambridge University Press, 2021.

[6] Frédéric Chazal, Vin De Silva, and Steve Oudot. Persistence stability for geometric complexes. *Geometriae Dedicata*, 173(1):193–214, 2014.

[7] William Crawley-Boevey. Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules. *Journal of Algebra and its Applications*, 14(05):1550066, 2015.

[8] Tamal Krishna Dey and Yusu Wang. *Computational topology for data analysis*. Cambridge University Press, 2022.

[9] Herbert Edelsbrunner and John L Harer. *Computational topology: an introduction*. American Mathematical Society, 2010.

[10] Woojin Kim and Facundo Mémoli. Persistence over posets. *Notices of the American Mathematical Society*, 70(08), 2023.

[11] Sunhyuk Lim, Facundo Memoli, and Osman Berat Okutan. Vietoris-Rips persistent homology, injective metric spaces, and the filling radius. *arXiv preprint arXiv:2001.07588*, 2020.

[12] Steve Y Oudot. *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*, volume 209. American Mathematical Society, 2017.

[13] Theodore Papamarkou, Tolga Birdal, Michael Bronstein, Gunnar Carlsson, Justin Curry, Yue Gao, Mustafa Hajij, Roland Kwitt, Pietro Liò, Paolo Di Lorenzo, et al. Position paper: Challenges and opportunities in topological deep learning. *arXiv preprint arXiv:2402.08871*, 2024.

[14] Larry Wasserman. Topological data analysis. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 5:501–532, 2018.