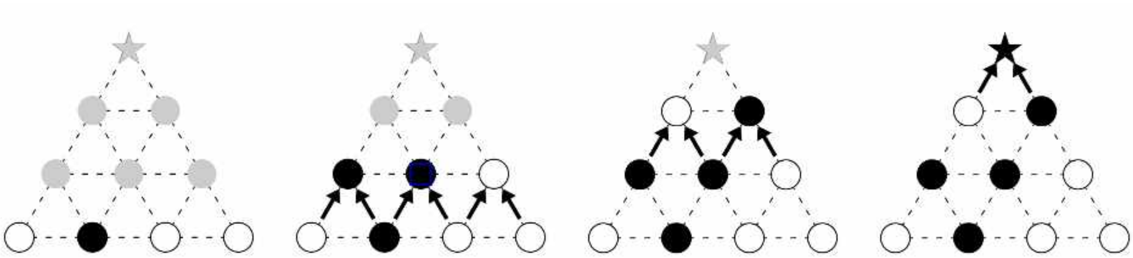
크리스마스 트리의 귀환

지난 2022년 12월 Horizon에서 삼각형 모양의 크리스마스 트리에 대해 다룬 적이 있는데 (https://horizon.kias.re.kr/23378/) 혹시 기억하실지, 다시 돌아올 성탄절을 앞두고 올해의 마무리로는 이 크리스마스 트리를 다른 방법으로 다뤄보려 한다.

진후가 정삼각형 격자를 토대로 전구들을 달아 피라미드 모양의 크리스마스 트리를 만들고 있다. 트리의 층수가 N일 때 전구는 1층에 N개의 전구로 시작하여 그 위에 N-1, N-2, ... 순으로 쌓여 마지막 1개의 전구가 최상층에 위치한다.
1층에 있는 N개의 전구를 원하는 대로 켜거나 끈 상태로 만들면 위층 전구의 점등상태는 다음 규칙에 따라 바닥에서 천장까지 순차적으로 결정된다.
1. 바로 아래층 두 전구의 점등상태가 같으면(모두 켜져 있거나 모두 꺼져있다면) 위 전구는 켜진다.
2. 두 전구의 점등상태가 다르면(한 쪽은 켜져있고 다른 쪽은 꺼져있다면) 위 전구는 꺼진다.

예를 들어 4층 트리가 있고 1층의 불이 OXOO, 즉 '켜짐', '꺼짐', '켜짐', '켜짐' 상태였다면 각 층의 전구는 그림과 같이 결정된다.



이제 진후는 2049층의 초대형 크리스마스 트리를 만든 뒤 1층 전구의 점등상태를 원주율의 소숫점 자리들의 홀짝성으로 결정하기로 했다. 1층의 제일 왼쪽 전구부터 소수점 자리를 대응시켜 순서대로 1,3,5,7,9면 끄고, 0,2,4,6,8이면 켜는 것이다. 원주율은 3.1415926535...와 같이 진행되므로 소수 첫째 자리부터 따지면 XOXXXOOXXX...와 같이 시작해 2049번째 자리까지 이어질 것이다.
그렇다면, 이 트리의 꼭대기, 2049층의 전구는 켜져있을까, 꺼져있을까? 프로그래밍에 대해 잘 모르는 진후가 컴퓨터의 도움 없이 일일이 계산해 문제를 해결하는 것은 무모한 도전일까? 여러분의 도움이 필요하다.

검색을 돕기 위해 원주율의 소수점 2049번째 자리까지 숫자들을 미리 소개한다.
3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273

7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912

9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952
0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151
5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983
8175463746 4939319255 0604009277 0167113900 9848824012
8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744
9448255379 7747268471 0404753464 6208046684 2590694912
9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511
2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279
6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745
5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955

3211653449 8720275596 0236480665 4991198818 3479775356
6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000
8164706001 6145249192 1732172147 7235014144 1973568548
1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333
4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542
5688767179 0494601653 4668049886 2723279178 6085784383
8279679766 8145410095 3883786360 9506800642 2512520511
7392984896 0841284886 2694560424 1965285022 2106611863
0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287
4677646575 7396241389 0865832645 9958133904 7802759009

9465764078 9512694683 9835259570 9825822620 522489407…

풀이

진후가 만든 초대형 트리의 층간 개수를 세면 2048(=2049-1)인데, 이 수가 2의 거듭제곱 (2^11=2048)임이 트릭이다.

트리를 따라 숫자를 그대로 더해보자. 각 전구는 해당하는 숫자는 짝수 또는 홀수인데 언제나 짝수의 경우 켜지고 홀수의 경우 꺼짐을 알 수 있다. 따라서 규칙에 따라 덧셈을 진행했을 때 최상층 숫자가 짝수인지 홀수인지 판가름하기만 하면 된다.

1층의 각 값을 $a_i\,(i=0,1,\ldots,2048)$라 하고 최상층 값을 a라고 했을 때 파스칼의 삼각형과 이항계수의 성질에 의해

$$a=\sum_{i=0}^{2048}\binom{2048}{i}a_i$$

가 된다. 이때 2048이 2의 거듭제곱이므로 $\binom{2048}{i}$는 $0<i<2048$에 대해 항상 짝수가 된다. (증명은 독자에게 남긴다.) 따라서 a의 홀짝성은 $\binom{2048}{0}a_0+\binom{2048}{2048}a_{2048}=a_0+a_{2048}$, 즉 처음 값과 끝 값에 의해서만 결정된다.

제일 처음 값 a_0은 1, 제일 마지막 값 a_{2048}은 7이므로 홀짝성이 같아 최상층 전구는 켜진다.

1층의 각 값을 \$a_i (i=0, 1, ..., 2048)\$라 하고 최상층 값을 \$a\$라고 했을 때 파스칼의 삼각형과 이항계수의 성질에 의해

\$a = \sum_{i=0}^{2048} \binom{2048}{i} a_i\$

가 된다. 이때 2048이 2의 거듭제곱이므로 \$\binom{a}{b}\$는 \$0<i<2048\$에 대해 항상 짝수가 된다.(증명은 독자에게 남긴다.) 따라서 \$a\$의 홀짝성은 \$\binom{2048}{0} a_0 + \binom{2048}{2048} a+2048 = a_0 + a_2048\$, 즉 처음 값과 끝 값에 의해서만 결정된다.

제일 처음 값 \$a_0\$은 1, 제일 마지막 값 \$a_2048\$은 7이므로 홀짝성이 같아 최상층 전구는 켜진다.

[참고] 강성훈님 정답설명 - 퍼즐 설명의 생략된 부분을 채워주셨기에 그 풀이를 같이 올립니다

[정답]

- 2049층 전구는 켜집니다.
- 원주율 소수점 모든 자리를 볼 필요가 없고, 양 끝 두 자리만 보면 됩니다.

[Lemma] m이 1 이상의 정수일 때, $\binom{2^m}{k}$는 $0 < k < 2^m$인 정수 k에 대해 짝수이다. (증명은 아래에 따로)

[이유]

- 편의상 켜진 상태를 0, 꺼진 상태를 1로 두겠습니다.
- 아래층 두 값이 같으면 위층은 0, 다르면 위층은 1이 되는데,
- 이것은 아래층 두 값의 합을 2로 나눈 나머지를 보는 것과 같습니다.
- 1층의 상태를 아래와 같은 이진 순서쌍으로 보겠습니다.

$$a_1|a_2|\cdots|a_n$$

- 2층은 아래와 같습니다. 모든 것은 2로 나눈 나머지만 봅니다. (즉 0 또는 1만 있음)

$$a_1+a_2|a_2+a_3|\cdots|a_{n-1}+a_n$$

- 3층은 아래와 같습니다.

$$a_1+2a_2+a_3|a_2+2a_3+a_4|\cdots|a_{n-2}+2a_{n-1}+a_n$$

- 각 a_i에 곱해지는 계수가 파스칼의 삼각형이 됨을 알 수 있습니다.
- 따라서 마지막 n 층은 아래와 같은 하나의 수가 남습니다.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a_{k+1}$$

- 그런데 문제에 주어진 n이 2049이고 $2049 = 2^{11}+1$이므로
- 마지막 2049층 값은 아래와 같고

$$\sum_{k=0}^{2^{11}}\binom{2^{11}}{k}a_{k+1}$$

- Lemma에 의해 $k = 1, 2, \ldots, 2047$에 대해 $\binom{2^{11}}{k}a_{k+1}$이 모두 짝수(0)입니다.
- 결국 마지막 층의 값을 결정하는 것은 $a_1 + a_{2049}$입니다.
- 그런데 원주율의 소수점 첫 째 자리가 1, 2049번째 자리가 7이므로
- 최종 값은 짝수(1+7=8=0)가 되고 2049층 불은 켜집니다.

[Lemma의 증명] m이 1 이상의 정수일 때, $\binom{2^m}{k}$는 $0 < k < 2^m$인 정수 k에 대해 짝수이다.

- $\binom{2^m}{k}$는 아래와 같이 쓸 수 있습니다.

$$\binom{2^m}{k} = \frac{(2^m)!}{k!(2^m-k)!}$$

- 이 값은 양의 정수이므로,
- 분모와 분자를 소인수 분해했을 때 분모의 각 소인수에 대해 분자는 그 소인수의 지수가 분모보다 크거나 같아야 합니다.
- 따라서 분자의 2의 지수가 분모의 2의 지수보다 크다면 이 값은 짝수가 됩니다.
- 우선 분자는 $(2^m)!$이므로 2의 지수는 아래와 같습니다.

$$\frac{2^m}{2}+\frac{2^m}{4}+\cdots+\frac{2^m}{2^m} = 2^m-1$$

- 분모 중 $k!$의 2의 지수를 따져보면,
- $1, 2, \ldots, k$ 중 2의 배수는 최대 $k/2$개 있습니다.
- $1, 2, \ldots, k$ 중 4의 배수는 최대 $k/4$개 있습니다.
- $1, 2, \ldots, k$ 중 8의 배수는 최대 $k/8$개 있습니다.
- 이 과정을 통해 $k!$의 2의 지수는 아래 값보다 클 수 없는데,

$$\frac{k}{2}+\frac{k}{4}+\frac{k}{8}+\cdots$$

- $k \neq 0$이라는 조건에 의해 이 값은 k보다 작으므로,
- $k!$의 2의 지수는 최대 $k-1$입니다.
- 같은 이유로, $k \neq 2^m$이라는 조건에 의해 $(2^m-k)!$의 2의 지수는 최대 2^m-k-1입니다.
- 따라서 분모의 2의 지수는 최대 2^m-2가 되어 분자보다 작으므로
- $\binom{2^m}{k} = \frac{(2^m)!}{k!(2^m-k)!}$ 는 $0 < k < 2^m$에 대해서 항상 짝수입니다.