원의 위상동형사상 군에서 자유 부분군과 TITS 대안

최인혁

Abstract. 본 원고에서는 위상적인 원의 자기위상동형사상 군 안에 자유 부분군이 존재하는지를 살펴보고자 한다. 이는 약한 위상적인 Tits 대안(Tits alternative)이라는 이름으로 알려져 있고, Ghys가 질문한 뒤 Margulis가 처음 증명한 것인데, 이후 Ghys가 새로운 접근을 제시한 바 있다. 여기에서는 학부 수준의 위상수학 및 해석학을 상정한 기초적인 논법을 설명하고자 한다.

핵심 단어. 원의 위상동형사상 군, Tits 대안, Schottky 순서쌍

MSC classes: 20F67, 30F60, 57M60, 60G50

1. 서론

본 논문에서는 위상적인 원 S^1의 자기위상동형사상 군 $\mathrm{Homeo}(S^1)$ 안에서의 자유 부분군의 존재성을 공부하고자 한다. 이는 곧 Étienne Ghys가 묻고 Gregory Margulis가 [Mar00]에서 증명한 원의 위상동형사상 군에 대한 약한 위상적인 Tits 대안(Tits alternative)이다. 그 내용은 다음과 같다.

원의 위상동형사상으로 이루어진 임의의 군 G는 다음 중 정확히 하나를 만족한다는 것인데, (i) G의 모든 원소가 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재하거나 혹은 (ii) G의 원소 두 개 f, g 및 서로 겹치지 않는 원의 열린 부분집합 U_1, U_2, V_1, V_2가 존재하여,

$$f\big(S^1 \setminus U_1\big) \subseteq U_2,\ f\big(S^1 \setminus U_2\big) \subseteq U_1,\ g\big(S^1 \setminus V_1\big) \subseteq V_2,\ g\big(S^1 \setminus V_2\big) \subseteq V_1$$

가 성립한다는 것이다. 이때 f, g의 순서쌍 (f, g)를 Schottky 순서쌍이라 부른다. 만약 G의 모든 원소가 동시에 고정하는 점이 존재하지 않고 G의 작용이 강하게 팽창적(strongly expansive)이라면 반드시 (ii)의 경우에 해당하며, 이때 상기한 열린 집합들 U_i, V_i는 모두 열린 구간(interval)으로 잡을 수 있다.

더욱 구체적으로, Ghys가 [Ghy01]에서 기술한 버전은 다음과 같다.

정리 1.1. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 임의의 부분군* G*에 대해, 다음 중 정확히 한 가지가 성립한다.*

(1) G*의 모든 원소가 동시에 보존하는 원 위의 확률 측도가 존재한다.*

(2) 준켤레바꾸기(semiconjugation) 및 유한 차수 덮음(finite-degree covering)을 통해 원래 G*의 작용에 잘 들어맞는 또다른* G*의 작용을 건설할 수 있는데, 서로 겹치지 않는 원의 열린 구간에 결부된 Schottky 순서쌍을 이 새로운 작용으로부터 찾을 수 있다. 자세히 말하자면,*

- *단조증가성이고(monotone) 차수가 1인 원의 연속사상* $c : S^1 \to S^1$*,*
- *원의 자가 덮음 사상* $\pi : S^1 \to S^1$

이 존재하고, 또 군 맞춤 사상 $\rho : G \to \rho(G) \le \mathrm{Homeo}(S^1)$*이 존재하여, 각* $g \in G$*마다*

$$\pi \circ c \circ g = \rho(g) \circ \pi \circ c$$

가 성립하는 한편, $\rho(G)$*의 원소 두 개* f, g *및 서로 겹치지 않는 원의 열린 구간* I_1, I_2, J_1, J_2 *가 존재하여,*

$$f\big(S^1 \setminus I_1\big) \subseteq I_2,\ f^{-1}\big(S^1 \setminus I_2\big) \subseteq I_1,\ g\big(S^1 \setminus J_1\big) \subseteq J_2,\ g^{-1}\big(S^1 \setminus J_2\big) \subseteq J_1,$$

Date: October 31, 2025.

가 성립한다.

정리 1.2. Homeo(S^1)*의 어떤 부분군* G*가 원 위에서 근접적인(proximal) 작용을 가지면서 군 원소 전체가 동시에 보존하는 고정점을 가지지 않는다. 그러면* G*는 열린 구간에 결부된 Schottky 순서쌍을 가지는즉,* G*의 원소* f, g *및 서로 겹치지 않는 원의 열린 구간* I_1, I_2, J_1, J_2*가 존재하여,*

$$f\big(S^1 \setminus I_1\big) \subseteq I_2,\ f^{-1}\big(S^1 \setminus I_2\big) \subseteq I_1,\ g\big(S^1 \setminus J_1\big) \subseteq J_2,\ g^{-1}\big(S^1 \setminus J_2\big) \subseteq J_1,$$

가 성립한다.

위 정리들에서 기술하는 Schottky 순서쌍은 차수 2인 자유 부분군을 생성한다 (Margulis). 이는 흔히 탁구 보조정리(ping-pong lemma)라고 불리는 것이다.

이 논문에서는 Margulis와 Ghys의 방법론을 큰 틀에서 따라가되, 세세한 부분을 조금 바꾸어 설명하려고 한다. 이는 즉, 컴팩트한 Lie 군의 Haar 측도 혹은 원의 위상동형사상의 회전수(rotation number)을 사용하지 않은 채, π 및 c라는 사상들을 직접 빚어 내겠다는 뜻이다.

원의 위상동형사상 군은 저차원 위상수학 및 동역학의 다양한 관점에서 연구되어 왔다. 이 원고에서는 아쉽게도 그 관점들을 모두 다룰 수는 없겠으나, 더 자세한 맥락을 알고 싶은 독자들은 Ghys의 survey [Ghy01] 및 Navas의 survey [Nav11]를 참고하면 좋겠다.

2. 원의 위상동형사상

위상공간 및 측도공간으로서, 원 S^1는 실수 집합 $\mathbb{R}$을 $\mathbb{Z} \simeq \langle z \mapsto z+1 \rangle$의 작용으로 자른 것이다. 이를 기록하는 사영(projection) $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$을 기억하도록 하자.

원 S^1의 자기위상동형사상(self-homeomorphism)들은 자기들끼리 군을 이룬다. 이 군을 Homeo(S^1)로 표기한다. Homeo(S^1)은 매우 많은 부분군을 품고 있기에 어떤 군들이 Homeo(S^1)의 부분군으로 나타날 수 있는지 물어볼 수 있다. 이를 위해 다음 개념을 정의하자. 어떤 군 G로부터 Homeo(S^1)로 향하는 군 맞춤 사상 (group homomorphism) $\varphi : G \to \mathrm{Homeo}(S^1)$를 다른 말로 *$S^1$상의 작용(action)*이라고 부른다. 다시 말해, 어떤 군 G가 원 S^1에 작용한다는 것은, 군 맞춤 사상 $\varphi : G \to \mathrm{Homeo}(S^1)$를 하나 정한다는 것이다.

연속함수 $f : S^1 \to S^1$를 생각하자. 이때, $\Pi \circ \tilde{f} = f \circ \Pi$가 성립하게끔 하는 연속함수 $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 존재한다. 이때 $\tilde{f}$를 f의 $\mathbb{R}$로의 *끌어올림(lift)*이라고 부른다. f의 끌어올림 $\tilde{f}$는 유일하지는 않지만 $z \mapsto z+1$의 작용을 통해 모든 선택지 사이를 오갈 수 있다. 더욱이, $\tilde{f}(x+1) - \tilde{f}(x)$는 정수 값을 가지며, 그 값은 $\tilde{f}$의 선택지 혹은 $x \in \mathbb{R}$의 선택지에 의존하지 않는다. 이 정수 값을 f의 차수(degree)라고 부른다. 합성함수의 차수는 두 성분 함수의 차수의 곱이고, 이로써 원의 위상동형사상의 차수는 반드시 1 혹은 -1이어야 함을 알 수 있다. 또한, 차수가 1인 위상동형사상들의 집합은 Homeo(S^1)의 지수 2짜리 부분군을 이루고, 이를 Homeo$_+$(S^1)로 표기한다. 차수가 1인 위상동형사상을 다른 말로 *방향 보존 위상동형사상*이라고 부르기도 한다.

한편, 주어진 연속함수 $f : S^1 \to S^1$에 대해, 그 끌어올림 $\tilde{f}$는 유일하지 않지만 끌어올림의 단조증가성, 단조감소성 및 단조성은 잘 정의된다. 이를 바탕으로 f의 단조증가/감소성 및 단조성을 정의한다.

2.1. **결레바꾸기 및 준결레바꾸기(conjugation and semiconjugation).**

S^1을 위상공간으로 보면서 S^1의 위상동형사상 f의 위상적 동역학을 분석할 때, 이를테면 $f(x)$가 x보다 1/3바퀴 앞서 있는지를 묻는 것은 그다지 의미 있는 질문이 아니다. S^1의 각 점에 매겨진 좌표, 즉 거리 구조를 신경 쓰지 않기 때문이다. 다시 말해, f의 위상적 동역학을 공부하고 싶다면 S^1의 위상 구조를 보존하는 좌표 변환에 의해 좌우되지 않는 성질 혹은 불변량을 알아야 한다. 이에 다음 개념이 필요해진다.

정의 2.1. *두 위상동형사상 $f, g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 서로의 위상적 좌표변형*(topological conjugate) *이라는 것은 어떤 위상동형사상 $h \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 존재하여 $h \circ f = g \circ h$가 성립한다는 것이다. 이때, $g = hfh^{-1}$을 f의 h에 의한 위상적 좌표변형이라고 한다. 다른 관점에서 보면, 위상동형사상 $h \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 주어질 때마다 $f \mapsto hfh^{-1}$라는* $\mathrm{Homeo}(S^1)$ *안의 자기사상이 정의되는데, 이 자기사상을 h에 의한 켤레바꾸기*(conjugation by h)*라고 부른다.*

마찬가지로, 어떤 군 Γ의 원에 대한 두 작용 $\Phi_1, \Phi_2 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(S^1)$가 서로의 위상적 좌표변형이라는 것은, 어떤 위상동형사상 $h \in \mathrm{Homeo}(S^1)$가 존재하여 각 $g \in \Gamma$마다 $h \circ \Phi_1(g) = \Phi_2(g) \circ h$가 성립한다는 것이다.

어떤 위상동형사상을 위상적으로 켤레바꾸더라도 (위상적) 동역학적인 성질은 하나도 잃지 않는다. 한편, 어떤 위상동형사상들은 원의 특정 부분에서는 복잡한 동역학을 보이고, 다른 부분에서는 재미없는 동역학을 보인다. 이때, 전자 영역을 그대로 남겨 복잡한 동역학적 정보는 살리면서 후자 영역은 각 연결성분을 한 점으로 압축해 자명한 정보는 무시하면 편리하다. 이러한 정보의 축약은 (위상동형사상 대신) 단조적이고 차수가 1인 연속사상이 담당하기에 다음 개념이 필요해진다.

정의 2.2. *두 위상동형사상 $f, g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$에 대해, g가 f의 준좌표변형*(semiconjugate)*이라는 것은 단조적인 차수 1짜리 연속사상 $h : S^1 \to S^1$가 존재하여 $h \circ f = g \circ h$가 성립한다는 것이다.*

마찬가지로, 어떤 군 Γ의 원에 대한 두 작용 $\Phi_1, \Phi_2 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(S^1)$가 준좌표변형이라는 것은, 단조적인 차수 1짜리 원의 연속사상 h가 존재하여 각 $g \in \Gamma$마다 $h \circ \Phi_1(g) = \Phi_2(g) \circ h$가 성립한다는 것이다.

명제 2.3. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 임의의 부분군 G에 대해 다음 셋 중 정확히 하나가 성립한다.*

(1) 유한한 G-궤도가 존재한다. 즉, $\#\{gx : g \in G\} < +\infty$인 점 x을 원에서 잡을 수 있다.
(2) 모든 G-궤도가 원 안에서 조밀하다. 다시 말해, 그 어느 $x \in S^1$에 대해서도 $G \cdot x \subseteq S^1$의 닫음 (closure)이 원 전체다.
(3) G에 불변하는 (공집합이 아닌) 닫힌 부분집합 중 최소한이고, 무한집합이면서 원 전체가 아닌 $K \subsetneq S^1$이 존재한다.

(3)의 경우에는 G에 불변하는 (공집합이 아닌) 닫힌 부분집합 중 최소한인 K는 유일하고, Cantor 집합과 위상동형이며, 그 어느 G-궤도의 집적점 집합에도 포함된다. (*)

Proof. S^1의 부분집합에 대한 다음 성질을 먼저 정의하자. 먼저

$$\mathcal{S} := \{A \subseteq S^1 : A\text{는 공집합이 아닌 컴팩트 집합이면서 } G\text{에 불변함}\}$$

를 정의하자. 그러면 $\mathcal{S}$의 원소 간에는 집합 포함관계라는 부분순서(partial order)가 정의되어 있다. 이제, 어떤 $A \in \mathcal{S}$가 $\mathcal{S}$ 안에서 최소한(minimal)일 때, A가 *G-최소한이다*라고 하겠다. 이제 $x \in A$를 임의로 하나 뽑은 뒤, x의 G-궤도 $G \cdot x$를 생각하자. A가 G-불변이기에 $G \cdot x$는 A에 포함된다. 그러면 $G \cdot x$의 닫음 $\overline{G \cdot x}$ 역시 A의 부분집합이면서 G-불변이고, 닫혀 있기까지 하다. 이에 A의 최소성으로부터 $A = \overline{G \cdot x}$임이 따라나온다. 이 관찰을 요약하면 다음과 같다.

주장 2.4. *S^1의 부분집합 A가 G-최소한이라고 하자. 그러면 그 어느 $x \in A$에 대해서도, x의 G-궤도 $G \cdot x$의 닫음 $\overline{G \cdot x}$는 A와 일치한다.*

이제 원래 명제로 돌아가자. Zorn의 보조정리에 의해, G-최소한인 부분집합은 적어도 하나는 존재한다. 그중 하나를 K라고 이름붙이자. K의 집적점 집합

$$K' := \{x \in S^1 : \text{서로 다른 } k_1, k_2, \ldots \text{가 있어 } \lim_i k_i = x\text{가 성립함}\}$$

과 K의 경계 $\partial K := K \setminus \operatorname{int} K$는 각각 G-불변인 K의 닫힌 부분집합이 된다. 이때 다음 중 하나가 성립한다.

(a) $K' = \emptyset$: 이는 K가 유한집합이라는 뜻이다. 주장 2.4에 의해, 그 어느 $x \in K$에 대해서도 K는 x의 G-궤도 $G \cdot x$와 일치한다. 즉 (1)이 성립한다.

(b) $\partial K = \emptyset$: 이는 $K = S^1$을 의미하며, 주장 2.4에 의해, 그 어느 $x \in K = S^1$에 대해서도 K는 $G \cdot x$의 닫음 $\overline{G \cdot x}$와 일치한다. 즉 (2)가 성립한다.

(c) K'도 ∂K도 공집합이 아님: 이 경우 K는 무한집합이고 원 전체는 아니다. 즉 (3)이 성립한다.

한편 결론부의 (1)과 (2)가 양립할 수 없음은 분명하다. 따라서 [(a) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (a) 혹은 (c)] 및 [(b) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (b) 혹은 (c)]가 성립한다. 여기에 더해 [(3) $\Rightarrow$ $(*)$]를 증명하기만 하면,

$$[(\mathrm{c}) \Rightarrow (3) \Rightarrow (*) \Rightarrow \text{임의의 } G\text{-최소한인 집합은 Cantor 집합} \Rightarrow (\mathrm{a})\text{도 } (\mathrm{b})\text{도 아님}]$$

임을 알 수 있어, [(a) $\Leftrightarrow$ (1)], [(b) $\Leftrightarrow$ (2)], [(c) $\Leftrightarrow$ (3)]을 완성하게 된다.

이제 [(3) $\Rightarrow$ $(*)$]을 완성하기 위해서는 다음을 관찰하면 된다.

주장 2.5. *S^1의 부분집합 A가 G-최소한이면서 무한집합이고 원 전체는 아니라고 하자. 그러면 A는 Cantor 집합과 위상동형이다. 그러면 임의의 $x \in S^1$에 대해, $G \cdot x$의 집적점 집합은 A를 포함한다.*

실제로, 주장 2.4 및 주장 2.5를 상정하고, K 및 K_1가 G-최소한임과 동시에 K가 조건 (c)를 만족한다고 가정하자. 그러면 (공집합이 아님을 이용해) K_1의 임의의 원소 x를 뽑으면 $G \cdot x$의 극점 집합은 K를 포함하는데, 이 극점 집합은 주장 2.4에 의해 K_1에 포함된다. 따라서 $K \subseteq K_1$이고, K_1의 최소성으로부터 $K = K_1$임을 이끌어낼 수 있다.

이제 주장 2.5를 증명하는 일만 남았다. 먼저, A가 무한집합이라는 것은 A'가 공집합이 아니라는 것이고, A가 원 전체가 아니라는 것은 ∂A가 공집합이 아니라는 것이다. A가 G-불변인 닫힌 집합이기에 이 두 집합 A' 및 ∂A는 A에 포함된 G-불변인 닫힌 집합이다. 그러면 A의 최소성으로부터 $A' = \partial A = A$임을 알 수 있다. 이는 곧 A가 Cantor 집합과 위상동형이라는 뜻이다.

이제 원 위의 임의의 점 x를 잡고 그 궤도 $G \cdot x$를 생각하자. 만약 $x \in A$라면 $\overline{G \cdot x}$는 A에 포함된 (공집합이 아닌) G-불변인 닫힌 집합이기에, A의 최소성으로부터 $\overline{G \cdot x} = A$임을 알 수 있다. 다음으로 x가 A 밖에 있다고 가정하자. 그러면 x는 $S^1 \setminus A$의 어떤 연결성분 $(a, b) \subseteq S^1$에 포함되어 있다. 이제 임의의 $y \in A$가 $G \cdot x$의 극점임을 결론짓기 위해서는, y의 임의의 근방 N에 대해 $N \cap (G \cdot x)$의 크기가 무한하다는 것만 보이면 된다.

여기서 A가 완벽집합(perfect set)이기 때문에 N은 무한히 많은 A의 원소를 가지고 있다. 임의의 자연수 k를 정하고, $A \cap N$의 원소 $2k+1$개를 뽑은 뒤 (근방 N 안에서 정의된 방향에 따라) 왼쪽부터 순서대로 $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$이라고 이름붙이자. 이제 각 $i = 1, \ldots, k$마다 주장 2.4에 의해 a_{2i-1}은 $G \cdot a$의 극점이고, 따라서 $g_i a \in (a_{2i-2}, a_{2i})$이게끔 하는 $g_i \in G$가 존재한다. 이때 $g_i(a, b)$는 한쪽 끝점이 $[a_{2i-2}, a_{2i}]$ 안에 위치하는 $S^1 \setminus A$의 연결성분이고, a_{2i-2} 및 a_{2i}는 $S^1 \setminus A$ 바깥에 있음을 주목하라. 이는 $g_i x \in (g_i a, g_i b) \subseteq (a_{2i-2}, a_{2i}) \subseteq N$을 의미한다. $(a_0, a_2), (a_2, a_4), \ldots, (a_{2k-2}, a_{2k})$는 서로 겹치지 않는 구간들이기에, $g_1 x, \ldots, g_k x$는 모두 서로 다른 x의 G-궤도 점들이다. 요약하자면, 임의의 자연수 k에 대해 $N \cap (G \cdot x)$의 크기는 k 이상이다. 다시 말해, $N \cap (G \cdot x)$의 크기는 무한하다. □

위 명제에서의 (2)의 경우에, 즉 G-궤도가 원 안에서 조밀할 때 G의 작용이 *최소한이다(minimal)* 라고 한다. 최소한이 아닌 작용의 경우 G-궤도가 신경쓰는 영역, 즉 $\overline{G \cdot x}$만을 남기고 나머지를 정의역에서 삭제함으로써 최소한인 작용으로 환원할 수 있다는 점에서 이 용어의 의미가 드러난다. 다만, 이 과정은 $\overline{G \cdot x}$가 충분히 커서 여전히 원을 이룰 수 있을 때만 유용하다. 위 명제 속 (1)에서의 유한한 G-궤도는 원을 이루기에 너무 작지만, (3)에서의 Cantor set은 S^1로의 전사함수를 가지기에 상기한 전략을 적용할 수 있다. 위 명제에서의 (3)의 경우, G가 *예외적인 최소 집합 K를 가진다*고 말하기도 한다.

명제 2.6. *만약 $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$의 한 부분군 G가 예외적인 최소 집합을 가질 경우, 준켤레바꾸기를 통해 최소한인 작용으로 바꿀 수 있다. 다시 말해, G로부터 $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$의 다른 부분군 G'로 향하는 군 맞춤 사상 $\rho : G \to G'$ 및 단조적인 차수 1짜리 연속사상 $h : S^1 \to S^1$가 존재하여 $h \circ g = \rho(g) \circ h$가 성립한다.*

Proof. G의 예외적인 최소 집합을 K라고 하자. 그러면 $S^1 \setminus K$는 가산 개의 서로 겹치지 않는 열린 구간으로 이루어져 있는데, 각각의 열린 구간의 닫음을 한 점으로 묶어 내면 그 몫공간(quotient space)은 여전히 위상적인 원이 된다. 다시 말해, $S^1 \setminus K$의 각 연결 성분 및 그 양 끝점을 한 점으로 축약시키는 단조적인 연속 함수 $h : S^1 \to S^1$가 존재한다는 것이다. (K가 이를테면 표준적인 Cantor 집합이라면 h는 Cantor 3진 함수로 구현할 수 있다.) 이때 임의의 $y \in S^1$에 대해 $h^{-1}(y)$는 $S^1 \setminus K$의 한 연결 성분의 닫음이거나 혹은 한 점이다. 즉 $h^{-1}(y)$는 어떠한 경우에도 연결된 부분집합이고, h의 차수는 ± 1임을 알 수 있다. 여기서 치역인 원에 적절한 방향을 줌으로써 h의 차수가 1이게 할 수 있다.

이제 각 $g \in G$에 대해 $\rho(g)$를 구성해 보자. 임의의 점 $y \in S^1$에 대해, $h^{-1}(y)$는 $S^1 \setminus K$의 한 연결성분의 닫음이거나 혹은 한 점이다. g는 최소 집합인 K를 보존하기에, $S^1 \setminus K$의 연결성분을 연결성분으로 보낸다. 따라서, $g(h^{-1}(y))$는 여전히 $S^1 \setminus K$의 한 연결성분의 닫음이거나 혹은 한 점이고, 따라서 h를 취하면 한 점으로 묶여 나온다. 이 덕분에, y의 $\rho(g)$에 의한 함숫값을 $\big(\rho(g)\big)(y) := (h \circ g)(h^{-1}(y))$로 잘 정의할 수 있다. 주어진 g에 대해, $f \circ h = h \circ g$를 만족하는 함수 $f : S^1 \to S^1$는 상술한 $\varphi(g)$밖에 없다 (†).

이렇게 정의한 $\rho(g)$가 연속일 충분조건은 임의의 열린 구간 U의 역상 $V := (\rho(g))^{-1}(U)$가 열린 구간이라는 것이다. 여기서 $h \circ g$가 단조적인 연속함수이기에 $h^{-1}(V) = (h \circ g)^{-1}(U)$는 열린 구간인데, 그 끝점들은 $\overline{S^1 \setminus K}$ 안에 위치할 수는 없다 $(*)$. 실제로, 만약 예를 들어 $h^{-1}(V)$가 $S^1 \setminus K$의 어떤 연결성분 I와 조금이라도 겹친다면, 모든 $x \in \bar{I}$에 대해 $h(x)$는 동일하고 이 값이 V에 들어간다. 따라서 $h^{-1}(V)$는 $\bar{I}$ 전체를 포함하고, $h^{-1}(V)$의 왼쪽 끝점도 오른쪽 끝점도 $\bar{I}$ 바깥에 형성된다. $(*)$를 만족하는 열린 구간의 h-이미지는 마찬가지로 열린 구간이기에 증명이 끝난다.

마지막으로, ρ가 G의 연산과 잘 어울리는지를 확인하자. 정의로부터

$$h \circ g_1 \circ g_2 = \rho(g_1) \circ h \circ \rho(g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2) \circ h$$

임을 관찰할 수 있고, 성질 (†)로부터 $\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$을 이끌어낼 수 있다. 특히, $\rho(id) = id$임을 알기에 각 $g \in G$마다 $\rho(g)\rho(g^{-1}) = \rho(g^{-1})\rho(g) = id$가 성립한다. 연속인 역함수를 가지는 연속함수인 $\rho(g)$는 S^1의 자기위상동형사상이어야만 한다. 이로써 증명이 끝난다. □

2.2. **팽창성(Expansivity) 혹은 근접성(Proximality).** 이 절에서는 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군에 대한 동역학적인 특성을 하나 정의하고, $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군이 만족할 수 있는 이분법적인 상황을 기술할 것이다. 이는 정리 1.1을 위한 예비적인 단계로 볼 수 있다.

정의에 앞서 Homeo(S^1) 안에 있는 부분군 두 개를 살펴보겠다. 이 논의에서 원 S^1을 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 단위원 $\{z : |z| = 1\}$과 동일시하겠다. 이 원은 Poincaré 계량이 얹어진 원판 $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$의 가장자리로 볼 수 있으며, $\mathbf{D}$의 등거리사상 군

$$\mathrm{PSU}(1,1) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

은 자연히 S^1에 작용한다. 즉 PSL$(1,1)$을 Homeo(S^1)의 부분군으로 간주할 수 있다.

PSU$(1,1)$ 안에는 원점 기준 회전 $\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$들이 살고 있다. 이 회전들의 집합 $\mathcal{R}$은 더 작은 부분군을 이루며, S^1 위의 호 길이를 보존한다. 즉 원점 기준 각도를 이용해 S^1 위에 거리 구조 d 혹은 길이 측도 μ를 구성하면, $\mathcal{R}$은 (S^1, d)의 등거리사상 군이 되고 또 (S^1, μ)라는 확률 공간의 측도 보존사상 군이 된다. 이렇게 S^1상의 어떤 확률 측도 혹은 거리 구조를 보존하는 부분군이 $\mathcal{R}$만 있는 것은 아니다. 예를 들면, 원점 $\mathbf{0}$을 다른 점 $p \in \mathbf{D}$로 옮기는 행렬 $M_p \in \mathrm{PSU}(1,1)$을 생각하면, M_p에 의한 $\mathcal{R}$의 켤레바꿈(conjugate) $\mathcal{R}_p := M_p \mathcal{R} M_p^{-1}$은 이제 $M_p^* d$ 및 $M_p^* \mu$라는 새로운 거리 구조 및 확률 측도를 보존하는 군이 된다. 비록 $M_p^* d$와 d가 다른 거리 구조이기는 하지만 상수배 동치 관계에 있다. 즉 $C^{-1} d \leq M_p^* d \leq Cd$이 성립하게끔 하는 양수 C가 존재한다. 따라서 $\mathcal{R}_p$는 비록 d를 보존하지는 않으나 심각하게 뒤틀 수는 없다. 다시 말하자면, $\mathcal{R}_p$의 원소들은 (S^1, d) 위에서 *균일연속하다 (equicontinuous)*.

한편, $\mathbb{D}$는 곡률이 -4인 쌍곡 곡면들의 보편적 덮개 공간(universal covering space)이기도 하다. 따라서 PSU$(1,1)$ 안의 이산 군(discrete group)들 $\mathbb{D}$에 어떻게 작용하는지를 보는 것이 중요한데, 이러한 군들을 *Fuchsian* 군이라고 부른다. 이제 유한한 넓이를 가지는 쌍곡 곡면을 하나 생각하자. 이 곡면은 $\mathbb{D}$를 어떤 Fuchsian 군 $G \leq \mathrm{PSU}(1,1)$로 잘라낸 것인데, 이 G에는 반드시 균일연속성을 해치는 원소가 존재한다. 구체적으로, G의 원소인 행렬 $f \in G$ 및 S^1 위의 서로 다른 점 x 및 y가 존재하여, $S^1 \setminus y$ 안의 임의의 컴팩트 집합 K에 대해 $\lim_{i \to +\infty} \mathrm{diam}(y \cup f^i K) = 0$이 성립하고, $S^1 \setminus x$ 안의 임의의 컴팩트 집합 K에 대해 $\lim_{i \to +\infty} \mathrm{diam}(x \cup f^{-i} K) = 0$이 성립한다. 이러한 G의 원소를 쌍곡행렬(hyperbolic matrix) 혹은 쌍곡적인 원소(hyperbolic element)라고 부른다. 또, x를 f의 작용에 대한 밀개(repeller), y를 끌개(attractor)라고 부른다. 이 두 점은 정확히 f의 작용에 대한 S^1 상의 고정점(fixed point theorem)이다.

실은, G에는 본질적으로 다른 쌍곡적인 원소가 수없이 많이 존재한다. 구체적으로, f의 작용에 대한 밀개 x 및 끌개 y, 그리고 g의 작용에 대한 밀개 x' 및 끌개 y' 네 점이 모두 서로 다르게끔 G의 원소 두 개 $f, g \in G$를 찾을 수 있다. 이 경우, x, y, x', y'를 각각 포함하는 충분히 작은 열린 구간들 I_1, I_2, J_1, J_2를 잡으면 이들 열린 구간들 또한 서로 겹치지 않는다. 또한 f 및 g의 동역학이 쌍곡적이기에 충분히 큰 N에 대해

$$f^N\big(S^1 \setminus I_1\big) \subseteq I_2,\ f^{-N}\big(S^1 \setminus I_2\big) \subseteq I_1,$$
$$g^N\big(S^1 \setminus J_1\big) \subseteq J_2,\ g^{-N}\big(S^1 \setminus J_2\big) \subseteq J_1$$

가 성립한다. 이는 곧 정리 1.1에서 얻고자 했던 결론 중 한 경우인데, 우리 논증에서 중요한 역할을 하는 상황이기에 이름을 따로 붙이겠다.

정의 2.7. *원의 자기위상동형사상 f와 g를 생각하자. 만약*

$$f\big(S^1 \setminus U_1\big) \subseteq U_2,\ \ f\big(S^1 \setminus U_2\big) \subseteq U_1,\ \ g\big(S^1 \setminus V_1\big) \subseteq V_2,\ \ g\big(S^1 \setminus V_2\big) \subseteq V_1$$

를 만족하는 서로 겹치지 않는 원의 열린 부분집합 U_1, U_2, V_1, V_2가 존재한다면, f와 g의 순서쌍 (f, g)를 (U_1, U_2, V_1, V_2에 결부된) Schottky 순서쌍이라고 부른다.

위 두 예시에서 대조되는 동역학은 일반적인 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군에서도 관찰된다는 것이 바로 정리 1.1의 주제다. 이제 정리 1.1을 몇 단계에 걸쳐 증명하겠다. 먼저 정리 1.1의 두 결론이 양립할 수 없음을 관찰하자.

보조정리 2.8. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 부분군 G가 원 위의 어떤 확률 측도를 보존한다고 하자. 그러면 G 안에는 Schottky 순서쌍이 존재할 수 없다. 특히, G는 정리 1.1의 (2)의 경우에 해당할 수 없다.*

Proof. G가 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군이라고 하자. 만약 G가 정리 1.1의 (2)의 경우에 해당한다면 G는 Schottky 순서쌍을 가진다는 것을 보이자. 이를 위해 어떤 덮음 사상 c, 준결레바꾸기 π, 군 맞춤 사상 ρ 및 열린 구간 I_i, J_i에 결부된 $\rho(G)$ 안의 Schottky 순서쌍 (f, g)을 통해 G가 정리 1.1의 (2)의 결론을 만족한다고 가정하고, $\rho(\mathfrak{f}) = f$, $\rho(\mathfrak{g}) = g$인 두 원소 $f, g \in G$를 잡자. 그러면

$$\mathfrak{f}\big(S^1 \setminus (\pi \circ c)^{-1}(I_1)\big) = (\pi \circ c)^{-1}\Big(f\big(S^1 \setminus I_1\big)\Big) \subseteq (\pi \circ c)^{-1}(I_2)$$

가 성립한다. 비슷한 이유로

$$\mathfrak{f}\big(S^1 \setminus (\pi\circ c)^{-1}(I_2)\big) \subseteq (\pi\circ c)^{-1}(I_1),\ \mathfrak{g}\big(S^1 \setminus (\pi\circ c)^{-1}(I_1)\big) \subseteq (\pi\circ c)^{-1}(I_2),\ \mathfrak{g}\big(S^1 \setminus (\pi\circ c)^{-1}(I_2)\big) \subseteq (\pi\circ c)^{-1}(I_1)$$

를 관찰할 수 있다. 또 I_1, I_2, J_1, J_2가 서로 겹치지 않는 열린 구간이니 (연속사상인) $\pi \circ c$로 이들의 역상을 취하면 서로 겹치지 않는 열린 집합이 된다. 이로써 $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$가 G 안의 Schottky 순서쌍임을 알 수 있다.

이제, 서로 겹치지 않는 열린 집합 U_1, U_2, V_1, V_2에 결부된 Schottky 순서쌍 (f, g)가 주어졌을 때, f와 g가 동시에 보존하는 확률 측도가 없다는 것만 보이면 된다. 이를 위해, f 및 g가 어떤 유한 측도 μ를 동시에 보존한다고 가정하자. 이때, $\{f^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big) : i \in \mathbb{Z}\}$는 서로 겹치지 않는 집합들의 모임임을 관찰할 수 있다. 이는

$$U_2 \supseteq f\big(S^1 \setminus U_1\big) \supseteq f(U_2) \supseteq f^2\big(S^1 \setminus U_1\big) \supseteq \dots f^i(U_2) \supseteq f^{i+1}\big(S^1 \setminus U_1\big) \supseteq f^{i+1}(U_2) \supseteq \dots$$

라는 포함관계로부터 따라나온다. f가 μ를 보존하므로 ${}^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)$에 모두 같은 μ값을 부여하는데, 이 집합들이 서로 겹치지 않으므로

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} f^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)\Big) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mu\Big(f^i\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)\Big) = \infty \cdot \mu\big(S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)\big)$$

가 성립한다. μ가 유한 측도이므로, $S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)$의 μ값이 0일 수밖에 없다.

마찬가지 이유로, g와 집합 $S^1 \setminus (V_1 \cup V_2)$ 사이 관계를 생각하면 $\mu(S^1 \setminus (V_1 \cup V_2) = 0$을 관찰할 수 있다. 이제 $S^1 = (S^1 \setminus (U_1 \cup U_2)) \cup (S^1 \setminus (V_1 \cup V_2))$임을 이용하면 $\mu(S^1)$ 또한 0임을 알 수 있다. 즉, f와 g 둘 다에 의해 보존되는 유한 측도는 영측도밖에 없고, 확률 측도는 보존될 수 없다. 이로써 증명이 끝난다. □

이제 정리 1.1의 이분법적인 상황을 기술하기 위한 개념을 하나 정의하겠다.

정의 2.9. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 부분군 G가 주어졌을 때, 만약 원의 각 점 $x \in S^1$마다 그를 포함하는 열린 구간 $I_x \subsetneq S^1$이 존재해 $\{\mathrm{diam}(gI_x) : g \in G\}$의 최대 하한이 0이 된다면, G의 작용이 팽창적*(expansive)*이라고 부른다. 만약 임의의 닫힌 구간 $I \subsetneq S^1$에 대해 $\inf_{g\in G} \mathrm{diam}(gI) = 0$가 성립한다면, G의 작용이 강하게 팽창적*(strongly expansive)*이라고 부른다.*

이것과 연관된 개념으로 *근접성(proximality)*가 있다. $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 어떤 부분군 G의 작용이 근접적(proximal)이라는 것은, 임의의 $x, y \in S^1$에 대해 $\inf_{g\in G} d(gx, gy) = 0$이라는 뜻이다. G의 작용이 강하게 팽창적이라면 반드시 근접적이어야 함은 쉽게 관찰할 수 있다. G의 작용이 최소한이라는 가정하에, 그 역 또한 성립함을 곧 관찰할 것이다.

보조정리 2.10. *원 위의 최소한인 작용은 팽창적이거나 혹은 균일연속하다.*

Proof. $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 부분군 G를 하나 생각하고, G의 작용이 최소한이지만 균일연속하지 않다고 가정하자. 두번째 조건은 다시말해 어떤 $\epsilon > 0$ 및 $x_n, y_n \in S^1$, $g_n \in G$가 존재해 $\lim_{n\to 0} d(x_n, y_n) = 0$ 및 $d(g_n x_n, g_n y_n) > \epsilon$이 성립한다는 뜻이다. 여기서 x_n과 y_n을 양 끝점으로 가지는 원 위의 구간은 두 개가 있는데, 그중 크기가 더 작은 것을 I_n이라고 부르자. 이는 $\lim_{n\to 0} \mathrm{diam}(I_n) = 0$임을 보장한다. $g_n I_n$의 중점을 c_n이라고 부르겠다.

원은 컴팩트하므로, $(x_n)_{n>0}$, $(y_n)_{n>0}$ 및 $(g_n)_{n>0}$을 어떤 부분나열로 대신함으로써 $(g_n x_n)_{n>0}$, $(g_n y_n)_{n>0}$ 및 $(g_n c_n)_{n>0}$가 각각 원 위의 어떤 점 a, b 및 c로 수렴한다는 것을 보장할 수 있다. 이때 $d(a, b) = \lim_n d(g_n x_n, g_n y_n) > \epsilon$임을 관찰할 수 있다.

이제 c를 중점으로 하는 길이 $\frac{1}{10}d(a, b)$짜리 구간 I를 생각하자. 그러면 충분히 큰 n에 대해 다음이 성립한다.

(1) $d(c, g_n c_n) < \frac{1}{100}d(a, b) \le \mathrm{diam}(I)/2$이므로 $g_n c_n$은 I에 포함된다.
(2) $d(g_n x_n, c) > d(a, c) - d(a, g_n x_n) > 0.4d(a, b)$이므로 $g_n x_n$은 I 바깥에 있다. 마찬가지로, $g_n y_n$은 I 바깥에 있다.

즉, I는 $S^1 \setminus \{g_n x_n, g_n y_n\}$를 이루는 두 열린 구간 중 $g_n c_n$을 포함하는 구간인 $g_n I_n$에 포함되어 있다. 이는 곧

$$g_n^{-1} I \subseteq g_n^{-1}(g_n I_n) = I_n, \quad \lim_{n\to 0} \mathrm{diam}(g_n^{-1} I) = 0$$

이라는 사실로 이어진다.

이제 임의의 점 $x \in S^1$을 생각하자. G의 작용이 최소한이라고 가정했으므로 $d(gx, c) < \frac{1}{10}d(a, b)$, 즉 $gx \in I$이게끔 하는 $g \in G$가 존재한다. 이 경우 $g^{-1}I$는 x의 근방인 열린 구간이면서 $\lim_{n\to 0} \mathrm{diam}(g_n^{-1} g \cdot (g^{-1} I)) = 0$을 만족한다. 각각의 $x \in S^1$에 대해 이러한 열린 구간을 잡아줄 수 있으므로, G의 작용은 팽창적이라고 할 수 있다. □

이제 S^1 안의 구간을 생각할 때 방향이 중요해지므로 다음을 상기하도록 하자. 먼저, 사영 $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$을 고정했다는 사실을 기억하자. S^1 위의 구간이란 원 전체가 아닌 연결된 부분집합을 뜻한다. 원 위의 닫힌 구간을 만들기 위해서는, 차이가 1보다 작은 두 실수 $a < b$를 고정한 뒤, (a, b)를 사영하면 된다. 이때, $\Pi(a)$를 $\Pi([a, b])$의 *왼쪽 끝점*, $\Pi(b)$를 $\Pi([a, b])$의 *오른쪽 끝점*이라고 부른다. 그리고 $\Pi([a, b])$를 편의상 $[\Pi(a), \Pi(b)]$로 나타내겠다. 물론 원 위의 특정 닫힌 구간 I를 사영으로 가지는 $\mathbb{R}$ 위의 닫힌 구간 $[a, b]$는 수없이 많지만, 그 $[a, b]$의 선택지와 무관하게 I의 왼쪽 끝점 및 오른쪽 끝점은 일관성 있게 정의된다. 마찬가지로 열린 구간 및 반열림 구간의 왼쪽/오른쪽 끝점들을 정의한다. 그러면 다음을 관찰할 수 있다:

사실 2.11. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 원소* g*에 대해 다음 조건들은 동치이다:*

(1) g*는 방향 보존 위상동형사상이다.*
(2) 원 위의 임의의 구간 I*에 대해* gI*의 왼쪽 끝점은* $g \cdot (I$*의 왼쪽 끝점*$)$*이다.*
(3) 원 위에 (점이 아닌) 어떤 구간 I*가 존재해,* gI*의 왼쪽 끝점은* $g \cdot (I$*의 왼쪽 끝점*$)$*이다.*

$\mathrm{Homeo}(S^1)$의 임의의 부분군 G를 다룰 때 방향 보존 위상동형사상들로 이루어진 그 부분군 $G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$에 먼저 집중하면 편할 때가 있다. 이 과정에서 동역학적인 특성을 그다지 잃지 않는다는 것을 다음 보조정리를 통해 알 수 있다.

보조정리 2.12. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 한 부분군* G*이 주어졌을 때,* G*가 명제 2.3의 특정 결론에 해당할 필요충분조건은* $G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$*가 그 결론에 해당하는 것이다. 다시 말해, 유한한* G*-궤도가 존재할 필요충분조건은 유한한* $G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$*-궤도가 존재한다는 것이고, 모든* G*-궤도가 원 안에서 조밀할 필요충분조건은 모든* $G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$*-궤도가 원 안에서 조밀하다는 것이며,* G*-불변인 공집합이 아닌 닫힌 부분집합 중 최소한인 Cantor 집합이 존재할 필요충분조건은* $G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$*-불변인 공집합이 아닌 닫힌 부분집합 중 최소한인 Cantor 집합이 존재한다는 것이다.*

Proof. 편의상 $G_+ := G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$로 표기하겠다. 또 편의상, 비어 있지 않은 G-불변인 닫힌 집합 중 포함 관계상 최소한인 집합을 G-최소한이라고 부르겠다.

$G = G_+$인 경우에는 명제가 당연하므로 $G \setminus \mathrm{Homeo}_+(S^1)$가 어떤 원소 r을 가지고 있을 때만 다루면 된다. 이때 G_+는 G의 지수 2짜리 정규 부분군이 되며, G는 $G_+ \cup rG_+ = G_+ \cup G_+r$의 형태가 된다.

먼저 유한한 G_+-궤도가 존재한다고 가정해 보자. 다시 말해, $G_+ \cdot y$가 유한집합이 되게끔 하는 $y \in S^1$이 존재한다는 뜻이다. 이 경우, $G \cdot y = G_+y \cup rG_+y$ 또한 유한집합이 되어, G 또한 명제 2.3의 결론 (1)을 만족한다. 역으로, 어떤 점의 G-궤도가 유한하면 G_+-궤도는 그것보다 클 수 없으니 역시 유한하다.

이제 G_+-최소한인 Cantor 집합 K가 존재한다고 하자. 명제 2.3에 의하면 G_+는 결론 (1)에 해당할 수 없으므로, 그 어느 유한 집합도 보존할 수 없다. 그러니 G 또한 그 어느 유한집합도 보존할 수 없다. $(*)$ 한편, K 및 rK는 내부(interior)가 공집합인 Cantor 집합들이므로 그 합집합 또한 내부가 비어 있다. 다시 말해, $K \cup rK$는 원 전체가 아닌 컴팩트 집합이다. 또 G_+의 각 원소는 K는 물론, rK 또한 보존한다. 이는 임의의 $g \in G_+$에 대해 $r^{-1}gr$ 또한 G_+의 원소이므로

$$g(rK) = r \cdot (r^{-1}gr) \cdot K = rK$$

이기 때문이다. 한편, r은 K를 rK로 보내고 rK를 $r^2K = K$로 보내기에, $K \cup rK$를 보존한다. 이를 고려했을 때, G-최소한인 부분집합 K'를 하나 잡으면 K'는 결코 원 전체일 수 없고, $(*)$ 때문에 유한집합일 수도 없다. 따라서 K'는 무한집합이면서 원 전체가 아닌 집합이다. 즉, G는 명제 2.3의 결론 (3)을 만족한다.

역으로, 만약 G-최소한인 Cantor 집합 K가 존재하면, G_+ 또한 이를 보존하기에 G_+는 명제 2.3의 결론 (2)를 만족할 수 없다. 다시 말해, G_+는 유한한 궤도를 가지거나 혹은 명제 2.3의 결론 (3)을 만족해야 한다. 하지만 G_+가 유한한 궤도를 가지면 G 또한 그러하다는 것을 관찰했으니, G가 명제 2.3의 결론 (3)을 만족한다는 가정에 모순이다. 따라서 G_+는 명제 2.3의 결론 (3)을 만족해야 한다. 이로써 [(G_+가 명제 2.3의 결론 (3)을 만족) $\Leftrightarrow$ (G가 명제 2.3의 결론 (3)을 만족)]이 증명되었다. □

다음으로, 균일연속한 작용에 대해 다음 사실이 성립한다.

보조정리 2.13. $\mathrm{Homeo}(S^1)$*의 어떤 부분군* G*의 작용이 최소한이면서 균일연속하다고 하자. 그러면* G*는 켤레바꾸기를 통해 원 위의 Lebesgue 측도를 보존하는 군으로 나타낼 수 있다. 즉, 켤레바꾸기를 통해,* G*를 원의 회전(rotation) 및 지름에 대한 반전들(reflection)로 이루어진 군으로 변환할 수 있다.*

Proof. 증명을 위해, 최소한이고 균일연속한 작용을 보이는 원의 자기위상동형사상 군 G를 고정하겠다. 편의상 $G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$를 G_+로 나타내겠다. 그러면 자연히 G_+의 작용도 균일연속하다. 또한

보조정리 2.12에 의해 G_+의 작용은 최소한이기도 하다. 다시 말해,

(2.1) 임의의 $x, y \in S^1$에 대해, $\lim_{n\to\infty} g_n x = y$이게끔 하는 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$이 존재한다.

G의 작용이 균일연속이므로, 각 $\epsilon > 0$마다 $0 < \delta = \delta(\epsilon) < \epsilon$이 존재하여, 임의의 $g \in G$ 및 $\mathrm{diam}(I) < \delta$인 임의의 구간 I에 대해 $\mathrm{diam}(gI) < \epsilon$이 성립한다. 이제 다음을 살펴보자.

주장 2.14. *원 위의 임의의 두 점 $x, y \in S^1$, 임의의 양수 $\epsilon > 0$ 및 임의의 방향 보존 위상동형사상 $g \in G_+$에 대해,*

$$d(x, gx) < \delta(\epsilon) \Rightarrow d(y, gy) < 2\epsilon,$$

이 성립한다.

주장 2.14의 증명 x와 gx를 두 끝점으로 가지는 닫힌 구간 중 크기가 δ 이하인 것을 I라고 하자. 이때 $I = [x, gx]$, 즉 x가 I의 왼쪽 끝점인 경우만 다루면 충분하다. 그렇지 않은 경우 $I' = [gx, gy]$ 및 $g^{-1} \in G \cap \mathrm{Homeo}_+(S^1)$에 대해 살펴보면 되기 때문이다.

이제 다음을 관찰하자.

(1) 각 $i \geq 0$에 대해, $\mathrm{diam}(I) < \delta$이고 $g^i \in G_+$이므로 $\mathrm{diam}(g^i I) < \epsilon$이다.
(2) 각 $i > 0$에 대해 $g^{i-1}I$의 오른쪽 끝점과 $g^i I$의 왼쪽 끝점은 $g^i x$로 동일하다.

이제 $\mathcal{A} := \{i \geq 0 : g^i I \subseteq [x, y]\}$로 두면 다음 두 가능성이 생긴다.

(1) $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$: 이 경우, $x, g^1x, g^2x, \ldots$는 $[x, y]$ 위에 순서대로 왼쪽에서 오른쪽으로 놓여 있다. 이들의 극한점 c를 잡으면 $x, gx, g^2x, \ldots$는 왼쪽으로부터 c로 점점 다가오며, $d(g^i x, c) \searrow 0$가 성립한다. 따라서 $d(g^i x, g^{i+1}x)$의 극한도 0이다. 이 말은 곧, 제아무리 작은 $\eta > 0$에 대해서도 $d(g^i x, g^{i+1}x) < \eta$, $d(g^{-i} \cdot g^i x, g^{-i} \cdot g^{i+1} x) = d(x, gx)$를 만족하는 i가 존재한다는 뜻인데, 이는 $\{g^j : j \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$의 균일연속성에 위배된다.
(2) $\mathcal{A}$에 속하지 않는 양의 정수가 존재하는 경우: 그러한 양의 정수 중 가장 작은 것을 N이라고 두면, y는 $[g^N x, g^{N+1}x]$에 속하게 된다. 이는 곧 $gy \in [g^{N+1}x, g^{N+2}x]$를 의미하기도 한다. 이 두 구간은 $g^{N+1}x$라는 공통점을 가지는 한편 둘 다 ϵ보다 크기가 작으므로,

$$d(y, gy) < \mathrm{diam}\left([g^N x, g^{N+1}x]\right) + \mathrm{diam}\left([g^{N+1}x, g^{N+2}x]\right) < 2\epsilon$$

라는 결론을 얻는다. □

거의 같은 증명을 통해 다음 결과도 관찰할 수 있다.

주장 2.15. *원 위의 임의의 구간 $J \subseteq S^1$ 및 G의 임의의 원소 $g \in G$에 대해,*

$$gJ \subseteq J \;\Rightarrow\; gJ = J$$

가 성립한다.

주장 2.15의 증명.. 먼저, g가 방향 보존성일 때만 증명하면 된다는 것을 관찰하자. 실제로, 일반적인 $g \in G$에 대해 $gJ \subseteq J$가 성립하면 $g^2 J \subseteq gJ \subseteq J$ 또한 성립한다. 이제 방향 보존성인 g^2에 대해 명제를 적용하면 $g^2 J = J$를 이끌어낼 수 있고, 이는 곧 $g^2 J = gJ = J$임을 의미한다. 또, J가 닫힌 구간일때만 증명해도 충분하다.

이제 증명을 위해 g가 방향 보존성이면서 $gJ \subseteq J$임을 가정하자. 이로부터 gJ와 J의 왼쪽 끝점 및 오른쪽 끝점이 쌍마다 일치한다는 것을 보이기만 하면 된다. 귀류법을 적용하기 위해, gJ의 왼쪽 끝점이 J의 왼쪽 끝점과 일치하지 않는다고 가정해 보자. $J = [x, y]$로 표기하면, 이는 $d(x, gx) > 0$임을

의미한다. 또한 $I := [x, gx]$는 J에 포함되어 있다. 이제, 각 $i > 0$에 대해 $g^i I \subseteq g^i J \subseteq g^{i-1} J \subseteq \ldots \subseteq J$가 성립하고, $g^{i-1}I$의 오른쪽 끝점과 $g^i I$의 왼쪽 끝점은 $g^i x$로 동일하다. 그말인즉, $x, gx, g^2x, \ldots$는 J 위에 순서대로 왼쪽에서 오른쪽으로 놓여 있다. 이들의 극한점 c를 잡으면 $x, gx, g^2x, \ldots$는 왼쪽으로부터 c로 점점 다가오며, $d(g^i x, c) \searrow 0$가 성립한다. 따라서 $d(g^i x, g^{i+1}x)$의 극한도 0이다. 이 말은 곧, 제아무리 작은 $\eta > 0$에 대해서도 $d(g^i x, g^{i+1}x) < \eta$, $d(g^{-i} \cdot g^i x, g^{-i} \cdot g^{i+1}x) = d(x, gx)$를 만족하는 i가 존재한다는 뜻인데, 이는 $\{g^j : j \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$의 균일연속성에 위배된다. 따라서 gJ의 왼쪽 끝점과 J의 오른쪽 끝점은 일치해야 한다.

이제 gJ의 오른쪽 끝점이 J의 오른쪽 끝점과 일치하지 않는다고 가정해 보자. 그말은 $J' := S^1 \setminus (g \operatorname{int} J)$라는 구간의 왼쪽 끝점과 $g^{-1}J' = S^1 \setminus \operatorname{int} J$의 왼쪽 끝점이 일치하지 않는다는 말이다. 더하여 $g^{-1}J' \subseteq J'$가 성립한다. 상술한 논증을 적용하면 마찬가지로 모순을 얻는다. 이로써 증명이 끝난다. □

주장 2.14는 다음과 같은 결과를 낳는다.

주장 2.16. *임의의 두 점 $x, y \in S^1$ 및 G_+ 안의 임의의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$에 대해*

$$(g_n x)_{n>0}\text{가 수렴함} \;\Leftrightarrow\; (g_n y)_{n>0}\text{가 수렴함}$$

이 성립한다.

또한, G가 균일연속하므로, 어떤 점 $x \in S^1$으로 수렴하는 점의 나열 $x_1, x_2, \ldots \in S^1$ 및 G 안의 임의의 원소 나열 $(g_n)_{n<0}$에 대해

$$(g_n x)_{n>0}\text{가 수렴함} \;\Leftrightarrow (g_n x_n)_{n>0}\text{가 수렴함}$$

이 성립한다. 또 두 나열이 수렴할 경우 그 수렴값 또한 일치한다. 이를 종합하면 다음과 같다.

주장 2.17. *원 안에서 수렴하는 임의의 점의 나열 $(x_n)_{n>0}$, 임의의 점 $y \in S^1$ 및 G_+ 안의 임의의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$에 대해*

$$(g_n x_n)_{n>0}\text{가 수렴함} \;\Leftrightarrow\; (g_n y)_{n>0}\text{가 수렴함}$$

이 성립한다.

이제 본격적으로 G_+가 보존하는 측도를 건설하겠다. 이를 위해 $x_0 \in S^1$을 고정하자.

주장 2.18. *각 $N \in \mathbb{Z}_{>1}$마다, 다음을 만족하는 점 $x_{1;N}, x_{2;N}, \ldots, x_{N-1;N} \subseteq S^1$이 각각 유일하게 존재한다. 편의상*

$$x_{kN+l;N} := x_{l;N},\; x_{kN;N} := x_0 \quad (k \in \mathbb{Z}, l \in \{1, \ldots, N-1\})$$

로 표기하겠다.

- *(1) 구간 $(x_0 =: x_{0;N}, x_{1;N}), (x_{1;N}, x_{2;N}), \ldots, (x_{N-1;N}, x_{N;N} := x_0)$들은 서로 겹치지 않는다.*
- *(2) $\lim_n g_n x_0 = x_{1;N}$이게끔 하는 임의의 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$에 대해 (참고: 문장 2.1), $\lim_n g_n^k x_{i;N} = x_{i+k;N}$가 각 $i, k \in \mathbb{Z}$마다 성립한다.*

주장 2.18의 증명.. 문장 2.1에 의해, 임의의 $y \in S^1$가 주어졌을 때 $\lim_n g_n x_0 = y$이게끔 하는 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$이 존재한다. 이때 각 $k > 0$에 대하여 $x_k(y) := \lim_n g_n^k x_0$로 정의하면, 주장 2.17 덕분에 $x_k(y)$의 정의에서 나타나는 극한은 잘 정의되며, 그 값은 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$의 선택지에 의존하지

않는다. 또 주장 2.17 덕분에 $x_1(y), x_2(y), \ldots$ 각각은 y에 대해 연속이다. 이제,

$$\mathcal{A} := \{y \in S^1 \setminus \{x_0\} : \big(x_0 := x_0(y), y := x_1(y)\big), \big(x_1(y), x_2(y)\big), \ldots, \big(x_{N-1}(y), x_N(y)\big)\text{이 서로 겹치지 않음}\}$$

$$= \left\{y \in S^1 \setminus \{x_0\} : \sum_{k=1}^{N} \big((x_{k-1}(y), x_k(y))\text{의 길이}\big) \le 1\right\}$$

라는 집합을 정의하겠다. (여기서 $x_k(y)$들이 잘 정의된다는 것은 주장 2.17이 보장한다.) 먼저 $\mathcal{A}$의 영역이 어느 정도 제한되어 있다는 점을 관찰하겠다. 이를 위해, $\delta = \delta(1/10)$를 잡은 뒤, $[x_0, y]$의 길이가 $1 - 0.5\delta$를 넘도록 하는 $y \in S^1$을 생각해보자. 그런 y에 대해 $g_n x_0 \to y$인 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$을 가져오면 충분히 큰 n에 대해 $d(x_0, g_n x_0) > 2 \cdot \epsilon$가 성립하고, 주장 2.14에 의해 $d(g_n x_0, g_n^2 x_0)$는 δ보다 커진다. 이에 따라 (x_0, x_1) 및 (x_1, x_2)의 길이 합은 1보다 크고 두 구간은 겹칠 수밖에 없다. 따라서 이러한 y는 $\mathcal{A}$에 속할 수 없다. 다시 말해, $\mathcal{A}$가 길이 $1 - 0.5\delta$ 이하인 구간에 포함되어 있다.

이제 $\mathcal{A}$의 최소 상한을 생각하자. 더 엄밀하게는,

$$I := \bigcap_{y \in \mathcal{A}} [x_0, y] \subseteq S^1$$

는 원 위의 구간이기에 어떤 $s \in S^1$에 대하여 $[x_0, s]$ 또는 $[x_0, s)$의 형태인데, 이 s를 $\mathcal{A}$의 상한이라고 부르겠다. 그러면 함수 $x_1(y), x_2(y), \ldots$의 연속성에 의해, $\sum_{k=1}^{N} \big((x_{k-1}(s), x_k(s))\text{의 길이}\big) = 1$임을 알 수 있다. 이는 곧 $x_N(y) = x_0$임을 의미하고, 이로부터 귀납적으로 $x_{kN+l} = x_l$임이 따라나온다. 더하여, 주장 2.17을 다시 한번 적용하면 $\lim_n g_n^k x_i = x_{i+k}$를 관찰할 수 있다.

이제 남은 것은 점 $x_{1;N}, x_{2;N}, \ldots x_{N-1;N}$의 유일성이다. 참고로, 명제의 조건으로부터 $x_{1;N}$의 유일성만 증명해 내면, (2)의 조건 $\lim_n g_n^k x_{1;N} = x_{1+k;N}$로부터 나머지 점들의 유일성은 따라나온다. (이는 또다시 주장 2.17 덕분이다) 따라서,

$$\sum_{k=1}^{N} \big((x_{k-1}(y), x_k(y))\text{의 길이}\big) = 1 \tag{2.2}$$

이게끔 하는 y의 유일성만 보이면 된다.

이를 귀류법으로 보이기 위해, 등식 2.2가 성립하게끔 하는 서로 다른 두 입력값 $y_1, y_2 \in S^1 \setminus x_0$가 있다고 가정하자. 일반성을 잃지 않고 y_1이 y_2보다 더 왼쪽에 있다고 가정하자. 즉, $\epsilon_1 := ([x_0, y_2]\text{의 길이}) - ([x_0, y_1]\text{의 길이}) > 0$이라고 가정하는 것이다. 귀납적으로,

$$\epsilon_{i+1} := \delta(\epsilon_i / 4)$$

를 정의하자. 이로부터 $x_N(y_2)$가 $x_N(y_1)$보다 ϵ_N 이상 오른쪽에 있다는 것을 보여, $x_N(y_2) = x_N(y_1)$에 모순임을 이끌어내는 것이 우리의 목표다.

이를 위해, 귀납적으로 $x_k(y_2)$가 $x_k(y_1)$보다 ϵ_k 이상 오른쪽에 있다고 해보자. 이와 함께 $\lim_n g_n x_0 = y_1, \lim_n h_n x_0 = y_2$인 원소 나열 $(g_n)_{n>0}, (h_n)_{n>0}$을 준비하자. 그러면 충분히 큰 n에 대해, $h_n^k g_n^{-k} \cdot g_n^k x_0 = h_n^k x_0$는 $g_n^k x_0$보다 $\epsilon_k/2$ 이상 오른쪽에 있다. 그러면 주장 2.14에 의해 $h_n^k g_n^{-k} \cdot g_n^{k+1} x_0$는 $g_n^{k+1} x_0$로부터 최소 $\delta(\epsilon_k/2)$ 이상 떨어져 있어야 한다. 또, 만약 $h_n^k g_n^{-k} \cdot g_n^{k+1} x_0$가 $g_n^{k+1} x_0$보다 오른쪽에 있지 않다면,

$$h_n g_n^{-k} \cdot [g_n^k x_0, g_n^{k+1} x_0] \subsetneq [g_n^k x_0, g_n^{k+1} x_0]$$

가 성립해 주장 2.15에 모순이다. 이를 종합하면, $h_n^k g_n x_0$는 $g_n^{k+1} x_0$보다 최소 ϵ_{k+1} 이상 오른쪽에 있음을 알 수 있다. 또, (충분히 큰 n에 대해) $x_0, h_n x_0), (h_n x_0, h_n^2 x_0), \ldots, (h_n^k x_0, h_n^{k+1} x_0)$은 순서대로 왼쪽부터 오른쪽으로 줄지어 놓인 구간들이고 $g_n x_0$이 $(x_0, h_n x_0)$ 사이에 있으므로, $h_n^{k+1} x_0$은 $h_n^k g_n x_0$

보다도 더욱 오른쪽에 있다. 즉 충분히 큰 n에 대해 항상$h_n^{k+1}x_0$은 $g_n^{k+1}x_0$보다 ϵ_{k+1} 이상 오른쪽에 있으므로, $x_{k+1}(y_1)$ 및 $x_{k+1}(y_2)$의 위치 관계에 대한 주장이 따라나온다. 이로써 증명이 끝난다. $\square$

이제, 각각의 $N \in \{2^k : k \in \mathbb{Z}_{>1}\}$마다, $x_{k;N}$을 $x_{k/N}$이라고 표기하겠다. 이 표기가 일관성 있기 위해서는 $x_{k;N} = x_{2k;2N}$라는 등식이 항상 성립해야 하는데, 이는 주장 2.18의 결론의 조건 (2) 및 $x_{i;j}$들의 유일성으로부터 따라나온다.

이로부터 유한 2진 소수들 $\mathcal{S} := \{\Pi(i/2^k) : k > 0, i = 1, \ldots, 2^k\} \subseteq S^1$로부터 S^1로의 사상 $\rho : a \mapsto x_a$가 잘 정의된다. 주장 2.18의 결론의 조건 (1)로부터 이 사상이 단조적임을 알 수 있다. 또 이 사상은 $\mathcal{S} \subseteq S^1$에 제한해서 보았을 때도 균일연속하다. 실제로, 임의의 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 $\delta = \delta(\epsilon)$을 잡을 수 있다. 이때 만약 어떤 $k > 0$ 및 $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$에 대해 $d(x_{(i-1)/2^k}, x_{i/2^k}) > 2\epsilon$이 성립한다면, 주장 2.14에 의해 다른 모든 $j \in \{1, \ldots, 2^k\}$에 대해서도 $d(x_{(j-1)/2^k}, x_{j/2^k}) > \delta$임을 알 수 있다. 이는 곧

$$2^k \cdot \delta < \sum_{j=1}^{2^k} \big((x_{(j-1)/2^k}, x_{j/2^k})\text{의 길이}\big) \leq 1$$

라는 결론으로 이어져, k의 상한을 하나 제시한다. 다시 말해, 이 상한보다 더 큰 k에 대해서는 각 i에 대해 $[x_{(i-1)/2^k}, x_{i/2^k}]$의 길이가 ϵ 이하이다.

이처럼 ρ가 원 위에서 조밀한 집합인 $\mathcal{S}$로부터 S^1로 향하는 단조적인 균일연속 사상이기에, ρ는 S^1에서 S^1로 향하는 단조적인 연속사상으로 확장된다. 또한, ρ의 차수를 계산하는 한 방법으로 $[0,1]$을 따라 $\Pi^{-1} \circ \rho \circ \Pi$의 변화량을 적분하는 것이 있는데, $\mathcal{S}$ 안의 점점 조밀해지는 샘플 입력값들을 이용해 계산했을 때 항상 그 값이 1이도록 정의했기에 (이는 주장 2.18의 결론 (1), 즉 등식 2.2에 다름 아니다) ρ의 차수 또한 1이다. 즉, ρ는 S^1 위의 위상동형사상이다.

이제 S^1 상의 Lebesgue 측도 μ의 당겨옴(pullback) $\rho^*\mu$를 정의할 수 있다. 즉, Borel 집합 $A \subseteq S^1$에 대해 $(\rho^*\mu)(A) := \mu(\rho^{-1}(A))$로 정의하는 것이다. 이 측도가 G_+의 작용에 불변한다는 것을 증명하기 위해서는 각각의 $s \in [0,1]$에 대해 $I = [x_0, x_s]$의 측도가 G_+의 작용에 의해 변하지 않음을 관찰하기만 하면 된다. 이를 위해 $g \in G_+$을 하나 생각하자. 그러면 각 $k > 0$마다

$$gx_0 \in [x_{(i(k)-1)/2^k}, x_{i(k)/2^k}],\ \ gx_s \in [x_{(j(k)-1)/2^k}, x_{j(k)/2^k}]$$

를 만족하는 $i(k), j(k)$가 있다. 이때 $(\rho^*\mu)(A) = \lim_k 2^{-k}[j(k) - i(k)] = s$로 정의된다.

이제, 주장 2.18에 의해 다음을 보장할 수 있다. 어떤 G의 원소 h_k가 $d(hx_0, x_{1/2^k})$를 충분히 작게 한다면, $h_k^{-i(k)}x_0$는 $x_{(i(k)-1)/2^k}$를 $x_{(2^k-1)/2^k}$ 근처로, $x_{i(k)/2^k}$를 x_0 근처로 보낸다. 이는 특히

$$h_k^{-i(k)}gx_0 \in h_k^{-i(k)}[x_{(i(k)-1)/2^k}, x_{i(k)/2^k}] \subseteq [x_{(2^k-2)/2^k}, x_{1/2^k}]$$

가 성립함을 의미한다. 마찬가지로, $d(hx_0, x_{1/2^k})$가 충분히 작기만 하다면,

$$h_k^{-i(k)}gx_s \in h^{-i(k)}[x_{(j(k)-1)/2^k}, x_{j(k)/2^k}] \subseteq [x_{(j(k)-i(k)-2)/2^k}, x_{(j(k)-i(k)+1)/2^k}]$$

가 성립한다. 이제 k를 무한대로 보낼 때, $h_k^{-i(k)}g$는 x_0를 점점 x_0 가까이 보낸다. 그러면 주장 2.16에 의해 $h_k^{-i(k)}gx_s$ 또한 x_s에 가까워진다. 따라서 $2^{-k}(j(k) - i(k))$가 s로 수렴하고, $[x_0, x_s]$의 $g[x_0, x_s]$의 $\rho^*\mu$값은 s로 일치하게 된다. 즉 임의의 $g \in G_+$가 x_0를 왼쪽 끝점으로 가지는 임의의 구간의 $\rho^*\mu$값을 보존하고, 이는 G_+가 $\rho^*\mu$값을 보존함을 의미한다.

만약 $G_+ = G$라면 이대로 증명이 끝난다. 그렇지 않은 경우, 각각의 $r \in G \setminus G_+$가 측도 $\rho^*\mu$를 보존함을 증명해야 한다. 즉, 임의의 닫힌 구간 I에 대해 $r\rho^{-1}(I)$와 $\rho^{-1}(I)$의 길이가 같음을 확인해야 한다. 귀류법을 적용하기 위해 어떤 $r \in G \setminus G_+$, 어떤 $0 < \epsilon < 0.1$ 및 어떤 닫힌 구간 I에 대해, $r\rho^{-1}(I)$

가 $\rho-1(I)$보다 ϵ 이상 길다고 가정해 보자. 그러면 $\rho^{-1}(I)$의 왼쪽 끝점을 $r\rho^{-1}(I)$의 왼쪽 끝점으로부터 오른쪽으로 $\epsilon/4$ 이상 $\epsilon/2$ 이하 떨어져 있도록 보내는 $g \in G_+$가 존재한다. 이는 G_+의 작용이 최소한이기 때문이다. 이때 $g\rho^{-1}(I)$의 길이는 $\rho^{-1}(I)$와 같으므로, $g\rho^{-1}(I)$는 $r\rho^{-1}(I)$에 포함되면서 그 왼쪽 끝점이 차이나게 된다. 다시 말해, $gI \subsetneq rI$이다. 이는 $rg^{-1} \in G$라는 사실 및 주장 2.15에 모순이다. 따라서 이러한 일은 생길 수 없고, 각 $r \in G \setminus G_+$ 역시 측도 $\rho^*\mu$를 보존한다. $\square$

이제 원 위에서 최소한이지만 균일연속하지 않은 작용들, 즉 팽창적인 작용들을 살펴보겠다.

보조정리 2.19. *$\mathrm{Homeo}(S^1)$의 어느 부분군 G의 작용이 최소한이면서 팽창적이라고 하자. 그러면 강하게 팽창적인 작용을 가지는 부분군 $\rho(G) \le \mathrm{Homeo}(S^1)$로 향하는 군 맞춤 사상 $\rho : G \to \rho(G) \le \mathrm{Homeo}(S^1)$ 및 원의 자가 덮음 사상 $\pi : S^1 \to S^1$이 존재하여 각 $g \in G$마다*

$$\pi \circ g = \rho(g) \circ \pi$$

가 성립한다.

Proof. 이번에도 $G_+ := G \cap \mathrm{Homeo}(S^1)$로 두면, $G = G_+$이거나 혹은 G_+가 G의 지수 2짜리 정규 부분군이다. 그 어느 경우이든, G의 작용이 최소한이므로 G_+의 작용 또한 최소한임을 기억하자. G가 이미 강하게 팽창적인 경우 π 및 ρ를 항등사상들로 두는 것으로 증명이 끝난다. 이제 G가 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않다고 가정해 보자. 그렇다면 G_+ 또한 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않다. 편의상, 어떤 구간 $I \subseteq S^1$가 $\inf_{g\in G_+} \mathrm{diam}(gI) = 0$을 만족할 때 I가 *축약 가능하다(contractible)*고 부르겠다. 그러면 다음을 쉽게 관찰할 수 있다.

사실 2.20. *임의의 구간 $I, J \subseteq S^1$ 및 $g \in G_+$에 대해,*

$$I\text{가 축약 가능하고 } gJ \subseteq I\text{임} \Rightarrow J\text{가 축약 가능함}$$

이 성립한다.

G_+에 대한 가정으로부터, 축약 가능한 열린 구간 I 및 축약 불가능한 원 전체가 아닌 열린 구간 J가 적어도 하나씩 존재함을 알 수 있다. G_+의 작용이 최소한이므로, $\{g^{-1}I : g_+ \in G\}$ 및 $\{g^{-1}(S^1 \setminus \bar{J}) : g_+ \in G\}$는 각각 S^1의 열린 집합 덮개가 된다. Lebesgue 덮음 보조정리에 의해 적당한 $\epsilon_G > 0$에 대해 다음이 보장된다: 임의의 구간 $A \subseteq S^1$에 대해

$$\begin{aligned} \mathrm{diam}(A) < \epsilon_G &\Rightarrow A \subseteq g^{-1}I\text{를 만족하는 } g_+ \in G\text{가 존재함} \Rightarrow A\text{는 축약 가능}, \\ \mathrm{diam}(A) > 1-\epsilon_G &\Rightarrow A \supseteq g^{-1}J\text{를 만족하는 } g_+ \in G\text{가 존재함} \Rightarrow A\text{는 축약할 수 없음} \end{aligned} \tag{2.3}$$

가 성립한다.

특히,

$$\mathcal{A}_x := \{y \in S^1 \setminus \{x\} : [x,y]\text{가 축약 가능함}\}$$

은 길이 ϵ_G짜리 구간을 포함하면서 길이 $1-\epsilon_G$짜리 구간에 포함된다. 또한, 사실 2.20로부터 다음을 알 수 있는데, 만약 $y \in \mathcal{A}_x$이고 $z \in [x,y]$라면 $z \in \mathcal{A}_x$라는 점이다. 이를 종합하면, $\mathcal{A}_x$라는 집합은 어떤 $y \ne x$에 대해 (x,y) 혹은 $(x,y]$라는 형태를 가진다. 이때 이 점 y를 $\phi(x)$라고 정의하겠다.

주장 2.21. *사상 $\phi : S^1 \to S^1$와 G_+의 원 위의 작용은 호환 가능하다. 그말인즉, 임의의 $x \in S^1$ 및 임의의 $g \in G_+$에 대해 $\phi(gx) = g\phi(x)$가 성립한다.*

Proof. $x \in S^1$ 및 $g \in G_+$를 임의로 생각했을 때, 각각의 $y \in \mathcal{A}_x$마다 $[x, y]$는 축약 가능하고, 따라서 사실 2.20에 의해 $[gx, gy] = g[x, y]$ 또한 축약 가능하다. 이로부터 $\mathcal{A}_{gx} \subseteq g\mathcal{A}_x$임이 따라나온다. 마찬가지 이유로 $\mathcal{A}_x \subseteq g^{-1}\mathcal{A}_{gx}$가 성립하고, g가 일대일대응이므로 $g\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{A}_{gx}$ 또한 성립한다. 즉 $\mathcal{A}_{gx} = g\mathcal{A}_x$이므로 증명이 끝난다. □

이제 다음과 같은 ϕ의 '단조성'을 쉽게 관찰할 수 있다. 사실 원에서 자기 자신으로 가는 사상의 단조성을 얘기하기 위해서는 실수 집합으로 끌어올려야 하기에, 그 사상의 연속성을 논하는 것이 먼저여야 한다. 하지만 우리 증명에서는 '단조성'이 연속성보다 먼저 필요하다.

주장 2.22. *그 어떤 $x, y \in S^1$에 대해서도, $[y, \phi(y)]$가 $[x, \phi(x))$에 포함되는 일은 일어나지 않는다.*

Proof. 귀류법을 적용하기 위해, $[y, \phi(y)] \subseteq [x, \phi(x))$를 가정해 보자. 이는 $\phi(x) \notin [y, \phi(y)]$를 의미한다. 한편, $(x, \phi(x))$에 포함되어 있는 $(y, \phi(x))$의 각 점 z에 대해 $[y, z] \subseteq [x, z]$는 축약 가능하다. 그렇다면 $\phi(y)$의 정의상 $[y, \phi(x))$는 $[y, \phi(y))$에 포함되어야 한다. 이는 $\phi(x)$가 $[y, \phi(y)]$ 바깥에 있다는 관찰과 모순이기에 증명이 끝난다. □

이제 ϕ의 연속성을 보이겠다. 귀류법을 적용하기 위해,

$$\lim_n x_n = a = \lim_n y_n, \quad \lim_n \phi(x_n) = b \neq c = \lim_n \phi(y_n)$$

을 만족하는 세 점 $a, b, c \in S^1$ 및 원 위의 점의 나열 $(x_n)_{n>0}$, $(y_n)_{n>0}$을 생각하자. 일반성을 잃지 않고, $c \in (a, b)$라고 가정하자.

G_+의 작용이 최소한이기에 b를 (c, b) 안으로 보내는 $g \in G_+$가 존재한다. 이때 만약 ga가 $[a, gb)$ 안에 있으면 $[ga, gb]$는 (a, b)에 포함되고, 충분히 큰 n 및 그보다 더욱 충분히 큰 m에 대해 $[gy_m, g\phi(y_m)]$가 $[y_n, \phi(y_n))$에 포함된다. 이는 주장 2.22에 모순이다. 다음으로, 만약 $ga \in (gb, a)$라면 (ga, gb)는 $[a, c]$를 포함하고, 충분히 큰 n에 대해 $[gy_n, g\phi(y_n))$가 $[x_n, \phi(x_n)]$을 포함한다. 이는 마찬가지로 모순이다. 마지막으로, g는 일대일대응이기에 $ga \neq gb$이다. 따라서 가정한 상황은 생길 수 없고, ϕ는 연속하다.

이제 점 $x_0 := \Pi(0) \in S^1$를 고정하고, $\tilde{\phi}(0) = ([x_0, \phi(x_0)]$의 길이$)$를 만족하는 ϕ의 $\mathbb{R}$로의 끌어올림 $\tilde{\phi}$를 생각하면, $\tilde{\phi}(t) := [t + \epsilon_G, t + 1 - \epsilon_G]$가 항상 성립한다. 이는 곧 ϕ의 차수가 1임을 의미한다.

다음으로 ϕ가 일대일 사상임을 보이겠다. 귀류법을 적용하기 위해, 어떤 $a \in S^1$에 대해 $\phi^{-1}(a)$가 한 개 이상의 점을 가지고 있다고 가정하자. $x \in \phi^{-1}a$에 대한 $[x, a]$의 길이의 최대 하한을 m, 최소 상한을 M이라고 하면 $\epsilon_G \leq m < M \leq 1 - \epsilon_G$이 성립한다. $[b, a]$의 길이가 M, $[c, a]$의 길이가 m이게끔 하는 두 점 $b, c \in S^1$을 잡으면, b와 c는 $\phi^{-1}(a)$의 집적점이기에 ϕ의 연속성에 의해 둘 다 $\phi^{-1}(a)$에 속한다.

이제 c를 (b, c) 안으로 보내는 어떤 $g \in G_+$를 생각하자. 이때 만약 $ga \in (a, gc)$라면 $[c, \phi(c)] = [c, a] \subseteq [gc, ga) = [gc, \phi(gc))$가 성립해 주장 2.22에 모순이다. 만약 $ga \in (gc, a)$라면 $[gc, ga] = [gc, \phi(gc)]$가 $[b, a) = [b, \phi(b))$에 포함되어 역시 주장 2.22에 모순이다. 마지막으로, g는 일대일대응이기에 $ga \neq gc$이다. 이를 종합하면, c를 (b, c) 안으로 보내는 $g \in G_+$는 반드시 a를 고정해야 한다는 것이다. 여기서 (gc, a) 안에 c가 포함되어 있음을 유념하자. 이는 곧 $g^{-1}c \in g^{-1}(gc, a) = (c, g^{-1}a) = (c, a)$임을 의미한다. 다시 말해, $[g^{-1}c, a]$는 $[c, a]$보다 짧은 구간이면서, $\phi(g^{-1}c) = g^{-1}\phi(c) = g^{-1}a = a$가 성립한다. 이는 $x \in \phi^{-1}a$에 대한 $[x, a]$의 길이의 최솟값이 c에서 구현된다는 사실에 모순이다.

위 모순에 의해, ϕ가 일대일 사상이라는 것이 따라나온다. 그러면 $\phi : S^1 \to S^1$는 연속이고 일대일 사상이면서 차수가 1이다. 이는 곧 ϕ가 방향 보존 위상동형사상임을 의미한다.

이제 $x \in S^1$을 임의로 하나 고정한 뒤, $S_k(x) := \sum_{i=1}^{k}([\phi^{i-1}x, \phi^i(x)]$의 길이$)$가 1 이하이도록 하는 양의 정수 k 중 최댓값을 N이라고 적자. (N은 반드시 유한하고, 특히 반드시 $1/\epsilon_G$ 이하이다.) 만약

$\phi^N x = x$라면 $S_N(x) = 1$이 성립하고, 이 경우 $y = x$로 둔다. 만약 그렇지 않다면, $S_N(x) < 1$, $S_{N+1}(x) > 1$이 성립한다. 그러면 $[\phi^{N-1}x, x]$는 $[\phi^{N-1}x, \phi^N x]$보다 짧은 부분구간이므로 축약가능하고, 따라서 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$이 존재해 $d(g_n\phi^N x, g_n x) = d(\phi^N g_n x, g_n x) \to 0$이 성립한다. 필요하다면 $(g_n)_{n>0}$을 적당한 부분나열로 대체함으로써 나열 $(g_n x)_{n>0}$이 어떤 점 $y \in S^1$로 수렴한다는 것을 보장할 수 있다. 한편, $S_N(x) < 1$로부터 $(x, \phi x), \ldots, (\phi^{N-1}x, \phi^N x)$가 모두 서로 겹치지 않음을 알 수 있는데, 각각의 g_n은 위상동형사상이므로 구간들의 겹침 여부를 보존한다. 즉, $(g_n x, g_n \phi x = \phi g_n x), \ldots, (\phi^{N-1}g_n x, \phi^N g_n x)$는 모두 겹치지 않으므로, $S_N(g_n x) \le 1$이 각 n마다 성립한다. 이제 ϕ의 연속성을 이용하면 $S_N(y) \le 1$임을 알 수 있다. 한편, $g_n x \to y$이고 $d(\phi^N g_n x, g_n x) \to 0$이므로, ϕ의 연속성에 의해 $\phi^N y = y$이다. 이 사실과 $\epsilon_G N \le S_N(y) \le 1$를 결합하면 $S_N(y) = 1$임을 알 수 있다. 즉,

$$[y, \phi y], [\phi y, \phi^2 y], \ldots, [\phi^{N-1}y, \phi^N y = y]$$

는 그 내부끼리는 서로 겹치지 않으면서 원 전체를 덮는다.

이제 y를 임의의 $g \in G_+$로 움직여 보자. 그러면

$$[gy, \phi gy], \ldots, [\phi^{N-1}gy, \phi^N gy = g\phi^N y = gy]$$

의 내부끼리 겹치지 않는다는 사실이 유지되기에, $S_N(gy) = 1$가 성립한다. 이제 임의의 점 $z \in S^1$이 주어졌을 때 $g_n y \to z$이게끔 하는 G_+의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$을 잡으면, 모든 $S_N(g_n y) = 1$이 성립하고 (ϕ의 연속성의 결과인) $S_N(\cdot)$의 연속성으로부터 $S_N(z) = 1$임을 알 수 있다. 즉, $S_N(\cdot)$는 원 위에서 항상 1이라는 상수값을 가진다. 다시 말해, 임의의 점의 ϕ-궤도는 점 N개짜리 집합이고, S^1의 각 ϕ-궤도를 한 점씩으로 묶어 내면 차수 N짜리 덮음 사상 $\pi : S^1 \to S^1$가 만들어진다. ϕ와 G_+의 작용이 호환 가능하기에, G_+는 몫공간인 S^1에도 자연스럽게 작용한다.

이제 G 전체가 몫공간인 S^1에 자연스럽게 작용하기 위해서는 $G \setminus G_+$의 각 원소의 작용이 덮음 사상 π와 호환 가능해야 한다. 이에 다음을 관찰하자.

주장 2.23. *임의의 $x \in S^1$ 및 임의의 $r \in G \setminus G_+$에 대해, $r\phi(x) = \phi^{-1}(rx)$가 성립한다.*

주장 2.23의 증명 $I = [x, \phi(x)]$라고 두고, $rI = [r\phi(x), rx]$는 다음 세 가지 중 하나를 만족한다.

(1) $rI \subsetneq [r\phi(x), \phi r\phi(x)]$: 이 경우, ϕ의 연속성을 이용하면 $rI \subseteq (c, \phi(c))$인 점 $c \in S^1$를 잡아줄 수 있다. 이제 G_+의 작용이 최소한이라는 점과 ϕ의 연속성을 이용하면 $rI \subseteq (gx, \phi gx) = (gx, g\phi x)$이게끔 하는 $g \in G_+$를 찾을 수 있다. 이는 곧 $rI \subsetneq gI$ 및 $I \subsetneq r^{-1}gI \subsetneq r^{-1}gr^{-1}gI$를 의미한다. 여기서 $h := r^{-1}gr^{-1}g$는 G_+의 원소이므로, 주장 2.21에 의해 $[x, \phi(x)] \subsetneq hI = [hx, h\phi(x)] = [hx, \phi(hx))]$임을 얻는다. 이는 ϕ가 순증가한다는 사실에 모순이다.

(2) $rI \supsetneq [r\phi(x), \phi r\phi(x)]$: 이 경우, $r' := r^{-1}$, $y := r\phi(x)$, $J := [y, \phi y]$에 대해 생각해 보면 $r'J \subsetneq r'rI = [\phi^{-1}(r'r\phi(x)), r'r\phi(x)]$가 성립한다. 그러면 위와 비슷한 이유로 $r'J \subsetneq gJ = g[y, \phi(y)]$이도록 하는 $g \in G_+$를 찾을 수 있다. 그러면 $r'^{-1}gr'^{-1}g$는 G_+의 원소이면서 J를 그보다 더 큰 구간으로 보내는데, 이는 ϕ가 순증가한다는 사실에 모순이다.

(3) $rx = \phi r\phi r(x)$가 성립한다.

이중 세번째 경우만이 가능하므로 증명이 끝난다. □

즉 $G \setminus G_+$의 임의의 원소 r은 임의의 $x \in S^1$가 주어졌을 때 그 ϕ-궤도 $\{x, \phi x, \ldots, \phi^{N-1}x\}$를 다른 ϕ-궤도 $\{rx, \phi^{-1}(rx), \phi^{-2}(rx), \ldots, \phi^{-(N-1)}rx\} = \{rx, \phi(rx), \ldots, \phi^{N-1}(rx)\}$로 보낸다는 것을 알 수 있고, 따라서 G 전체가 몫공간인 S^1에도 자연스럽게 작용한다. 즉, π와 호환되는 군 맞춤 사상 $\rho : G \to \rho(G)$가 존재한다.

이제 몫공간 S^1에서 임의의 닫힌 구간 I가 주어졌을 때, $S^1 \setminus I$ 안의 점 c를 하나 잡으면 $\pi^{-1}(I)$는 N개의 연결 성분으로 이루어져 있으며 각각은 $[c, \phi(c)), [\phi(c), \phi^2(c)), \ldots, [\phi^{N-1}(c), \phi^N(c) = c)$ 안에 포함되어 있다. 예를 들어 $[c, \phi(c))$ 안에 있는 연결성분 $\tilde{I}$를 택하면, $\tilde{I}$는 축약 가능하고 $\inf_{g \in G} \operatorname{diam}(g\tilde{I}) = 0$이 성립한다. 이 사실은 덮음 사상 π를 통해서도 전달되므로 $\inf_{g \in G} \operatorname{diam}(\rho(g)I) = 0$ 또한 성립한다. 따라서 $\rho(G)$의 작용은 강하게 팽창적이다. $\square$

여기서 근접성에 관한 논의를 잠깐 마무리짓겠다. 만약 $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 어떤 부분군 G의 작용이 최소한이라면, G의 작용은 균일연속하거나, 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않거나, 혹은 강하게 팽창적이다. G의 작용이 균일연속한 경우, 켤레바꾸기를 통해 S^1의 등거리사상 군으로 나타낼 수 있다. 이 경우 임의의 두 점 $x, y \in S^1$ 사이 거리는 G의 작용에 의해 보존되므로, 이 작용은 근접적일 수 없다. 만약 G의 작용이 팽창적이되 강하게 팽창적이지는 않다면, 보조정리 2.19에서 기술하는 원의 자가 덮음 사상 $\pi : S^1 \to S^1$이 존재해 G의 작용과 π는 호환 가능하고, 몫공간 S^1에서의 G의 작용은 강하게 팽창적이다. 이 경우 π는 차수가 1보다 큰 덮음 사상이어야 한다. 이제 어떤 점 $y \in S^1$을 잡은 뒤 $\pi^{-1}(y)$ 안의 서로 다른 두 점 $a, b \in \pi^{-1}(y)$을 고르면, 그 어느 $g \in G$를 가져와도 ga 및 gb는 같은 π-값을 가지는 다른 점들이다. 이러한 점들 사이 거리는 0에 한없이 가까울 수 없기에 (보조정리 2.19의 증명에서 $d(x, \theta(x)) > \epsilon_G$가 항상 성립했음을 기억하라), $\inf_{g \in G} d(ga, gb) > 0$이다. 따라서 이 경우에도 G의 작용은 근접적일 수 없다. 요약하자면, $\mathrm{Homeo}(S^1)$의 어떤 부분군 G의 작용이 최소한이라는 가정 하에, G의 작용이 만약 근접적이라면 반드시 강하게 팽창적이어야 한다.

이제 어떤 $G \leq \mathrm{Homeo}(S^1)$의 작용이 최소한이고 강하게 팽창적이라면 G 안에는 서로 겹치지 않는 열린 구간 네 개에 결부된 Schottky 순서쌍이 존재함을 관찰하자. 이를 위해 임의의 (원 전체가 아닌) 열린 구간 I을 생각하자. 그러면 I도 $J := (\int I_1)^c$도 축약가능한 구간이므로 $\lim_n \operatorname{diam}(g_n I) = \lim_n \operatorname{diam}(h_n J) = 0$이게끔 하는 G의 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$ 및 $(h_n)_{n>0}$이 존재한다. 이때, $\{g_n I : n > 0\}$의 집적점 x 및 $\{h_n J : n > 0\}$의 집적점 y를 서로 다른 것으로 잡을 수 있는지 살펴보자. 이것이 불가능한 유일한 경우는 $(g_n I)_{n>0}$ 및 $(h_n J)_{n>0}$가 모두 같은 점 $x \in S^1$로 수렴할 때뿐인데, 이 경우에는 x를 $S^1 \setminus \{x\}$ 안으로 보내는 어떤 $g' \in G$를 잡으면 $(g_n I)_{n>0}$의 집적점인 x와 $(g' h_n J)_{n>0}$의 집적점인 $g'x$는 서로 다른 점이 된다. 물론 $g' h_n J$의 크기 또한 0으로 수렴하므로, $(h_n)_{n>0}$ 대신 $(g' h_n)_{n>0}$을 사용함으로써 앞의 질문에 대답할 수 있다. 즉, G 안의 적당한 원소 나열 $(g_n)_{n>0}$ 및 $(h_n)_{n>0}$ 및 원 위의 서로 다른 점 $x, y \in S^1$가 존재하여

$$\operatorname{diam}(g_n I \cup x) \to 0, \quad \operatorname{diam}(h_n J \cup x) \to 0$$

이게끔 할 수 있다.

이제 $\{x, y\}$와 $\{fx, fy\}$가 원소를 공유하지 않게끔 하는 $f \in G$를 찾고자 한다. 먼저, G의 작용이 최소한이기에 $f_1(x), \ldots, f_6(x)$가 (x, y) 안의 서로 다른 여섯 개의 점이 되도록 하는 G의 원소 $f_1, \ldots, f_6$를 찾을 수 있다. 여기서 f_i들 중 어느 하나라도 y를 $\{x, y\}$ 밖의 점으로 보내면 그 원소를 f로 쓰면 된다. 그렇지 않고 예를 들어 $f_1 y$, $f_2 y$ 및 $f_3 y$가 $\{x, y\}$ 안의 어떤 한 점 p로 일치한다고 해보자. 그러면 p를 (x, y) 안으로 보내는 어떤 원소 $f' \in G$가 존재할 텐데, 이때 $f' f_1 y, f' f_2 y$ 및 $f' f_3 y$는 서로 다른 세 점이기에, 이들 중 적어도 하나는 x 도 y도 아니다. 따라서 $f' f_i y \notin \{x, y\}$인 $i \in \{1, 2, 3\}$을 잡을 수 있고, 이때 $f' f_i x = f' p$ 또한 $\{x, y\}$ 바깥에 있어 $f' f_i$를 f로 쓸 수 있다.

이제, 충분히 큰 n에 대해, $g_n I, h_n J, f g_n I, f h_n J$는 서로 다른 네 점에 충분히 가까운 구간들이므로 서로 겹치지 않는다. 이제 $F = h_n g_n^{-1}$ 및 $G = f h_n g_n^{-1} f$를 생각하면 F는 $g_n I^c$를 $h_n \overline{J}$로 보내고, F^{-1}는 $h_n J^c$를 $g_n \overline{I}$로 보내며, G는 $f g_n I^c$를 $f h_n \overline{J}$로, G^{-1}는 $f h_n J^c$를 $f g_n \overline{I}$로 보낸다. 이제 $g_n I, h_n J, f g_n I, f h_n J$를 모두 살짝씩 키워 열린 구간으로 만들되 여전히 서로 겹치지 않게끔 할 수

있고, (F, G)는 이 구간들에 결부된 Schottky 순서쌍이 된다. 이로써 정리 1.1 및 정리 1.2의 증명이 끝난다.

References

[Ghy01] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseign. Math. (2)*, 47(3-4):329–407, 2001.

[Mar00] Gregory Margulis. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(9):669–674, 2000.

[Nav11] Andrés Navas. *Groups of circle diffeomorphisms*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, spanish edition, 2011.

Cornell University, 583 Malott Hall, Ithaca, NY, USA
Email address: `inhyeokchoi48@gmail.com`