니코마쿠스 등식, 그리고 그 이상

김선홍(숙명여자대학교 수학과)

니코마쿠스 등식

대부분의 고등학교 수학교과서에서는 세제곱의 합에 대한 아래의 등식 (1)을 수학적 귀납법을 연습하는 예제로 제시합니다:

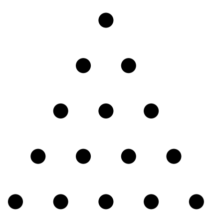
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2. \tag{1}$$

한편, 이 등식은 수학적 귀납법뿐 아니라 조합론적/기하학적 방법 등을 포함하여 다양한 방식으로 증명될 수 있습니다. 등식 (1)의 우변에 있는

$$T_n:=\frac{n(n+1)}{2}=1+2+3+\cdots+n$$

은 n번째 삼각수(triangular number)라 불리는데, 그 이유는 아래의 그림처럼 첫 번째 줄에 1개, 두 번째 줄에 2개, 세 번째 줄에 3개, . . . , n번째 줄에 n개의 점을 배열하면 정삼각형 모양이 되기 때문입니다. 이때 전체 점의 개수가 n번째 삼각수입니다. 예를 들어, 다섯 번째 삼각수는

$$T_5=1+2+3+4+5=15;$$



입니다. 고대 그리스 수학자 니코마쿠스(Nicomachus, 약 60년∼약 120년)는 그의 저서 *산술 입문*에서 등식 (1)과 관련된 내용을 다루었습니다. 이러한 이유로 등식 (1)을 니코마쿠스 등식(Nicomachus' identity)이라고 부릅니다. 편의상 니코마쿠스 등식 (1)을

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=T_n^2 \tag{2}$$

으로 다시 쓰겠습니다.

니코마쿠스 등식을 확장하는 한 가지 방법은 (2)의 좌변에 있는 k의 세제곱 대신 임의의 거듭제곱을 고려하는 것으로, 이는 특히 요한 파울하버(Johann Faulhaber)에 의해 17세기 초에 크게 발전하였습니다 [8]. 이 글에서는 (2)의 좌변에서 k의 세제곱이라는 특징을 유지하는 확장된 등식 또는 (2)의 새로운 변형들을 살펴보고자 합니다.

리우빌의 등식

(2)의 가장 잘 알려진 변형 중 하나는 리우빌(Liouville)의 등식

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \Big(\sum_{d|n} \tau(d)\Big)^2 \tag{3}$$

입니다. 여기서 기호 $\sum_{d|n}$는 "n의 모든 양의 약수 d에 대해 합을 취한다"는 의미이고, $\tau(d)$는 d의 양의 약수의 개수를 나타냅니다. 예를 들어, 10의 양의 약수는 1, 2, 5, 10, 총 4개이므로 $\tau(10) = 4$이고, 소수 p에 대해 p^k의 모든 양의 약수는 $1, p, p^2, \ldots, p^k$이므로 $\tau(p^k) = k+1$입니다. 따라서, 등식 (3)에서 양의 정수 n이 소수의 거듭제곱(prime power) 꼴 p^n일 때, 좌변과 우변은 각각

$$\sum_{d|p^n} \tau(d)^3 = \tau(1)^3 + \tau(p)^3 + \tau(p^2)^3 + \cdots + \tau(p^n)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3,$$

$$\Big(\sum_{d|p^n} \tau(d)\Big)^2 = \big(\tau(1) + \tau(p) + \tau(p^2) + \cdots + \tau(p^n)\big)^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1))^2$$

이 되어 등식 (3)은 니코마쿠스 등식 (2)가 됨을 알 수 있습니다. 등식 (3)의 증명에 관심이 있는 독자분들은 [1]의 명제 1(Proposition 1)을 참고하시기 바랍니다.

바르나르의 q-유사, 그리고 패턴

q-유사(q-analogue)란 기존의 수학적 개념을 하나의 매개변수 q를 이용해 '변형(일반화)'한 것을 말하며, $q \to 1$일 때 원래의 개념으로 돌아가는 것이 특징입니다. 예를 들어, 양의 정수 n에 대해

$$n_q = \frac{1-q^n}{1-q} \tag{4}$$

이라 두면,

$$\lim_{q\to 1} n_q = \lim_{q\to 1}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = n$$

이므로 n_q는 n의 q-유사입니다. 음이 아닌 정수 n, k와 $q \neq 1$에 대해 가우스 이항 계수(Gaussian binomial coefficient)는 기호 (4)를 사용하면, 다음과 같이 정의됩니다:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{n_q(n-1)_q \cdots (n-k+1)_q}{1_q\, 2_q \cdots k_q},$$

여기서 $k > n$이면 가우스 이항 계수를 0으로, $k = 0$이면 1로 정의합니다. 또한 이항계수(binomial coefficient)

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

에 대해

$$\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$$

이므로, 가우스 이항 계수는 이항계수의 q-유사입니다.

삼각수는 다음을 만족합니다:

$$T_n^2 - T_{n-1}^2 = (T_n + T_{n-1})(T_n - T_{n-1}) = (n^2)(n). \tag{5}$$

양의 정수 $1, 2, \ldots, n$에 대해 위 식을 각각 나열하면

$$\begin{aligned} T_2^2 - T_1^2 &= (2^2)(2) \\ T_3^2 - T_2^2 &= (3^2)(3) \\ &\vdots \\ T_n^2 - T_{n-1}^2 &= (n^2)(n) \end{aligned}$$

이 됩니다. 이제 좌변의 모든 항과 우변의 모든 항을 각각 더하면, 좌변에서는 $T_2^2, T_3^2, \ldots, T_{n-1}^2$이 소거되어

$$T_n^2 = T_1^2 + \sum_{k=2}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3, \tag{6}$$

즉 니코마쿠스 등식 (2)가 됩니다. 여기서 (5)의 우변을 보면, 니코마쿠스 등식 (6)의 우변 각 항 k^3을

$$k^2 \cdot k \tag{7}$$

로 보는 것은 자연스럽습니다.

양의 정수 n에 대해 가우스 이항계수

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{n_q (n+1)_q}{1+q}$$

는 삼각수 T_n의 q-유사이며, 이를 이용하면

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}_q^2 - q^2 \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q^2 = \left(n_q\right)^2 n_{q^2} \tag{8}$$

임을 보일 수 있습니다. 식 (8)의 좌변은 $T_n^2 - T_{n-1}^2$의 q-유사이며, (8)은 $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix}\right]_q^2$에 대한 단순한 점화식입니다. 이러한 구조는 (5)의 경우와 본질적으로 동일하며, (6)처럼 다음을 얻을 수 있습니다 [9]:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}_q^2 = \sum_{k=1}^{n} q^{2n-2k} \Big(\frac{1-q^k}{1-q} \Big)^2 \frac{1-q^{2k}}{1-q^2}. \tag{9}$$

이는 니코마쿠스 등식 (2)의 q-유사이며, 바르나르(Warnaar)가 얻은 결과로서 등식 (3)과 더불어 또 다른 등식 (2)의 우아한 변형입니다. 등식 (9)는 (8)과 수학적 귀납법을 이용하여 증명할 수 있습니다. 여기서 $q \to 1$일 때, (9)의 우변의 각 항은

$$1 \cdot k^2 \cdot k \tag{10}$$

로 수렴합니다. 한편, (9)보다 앞서 알려진 (2)의 q-유사로는 가렛(Garrett)과 험멜(Hummel)의 결과가 있습니다 [3].

[2]에는 니코마쿠스 등식 (2)의 또 다른 일반화

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r+2} (2k+r) \Big(\begin{matrix} k+r \\ r+1 \end{matrix} \Big)^2 = \Big(\frac{n}{r+2} \Big(\begin{matrix} n+1+r \\ r+1 \end{matrix} \Big) \Big)^2 \tag{11}$$

이 제시되어 있습니다. $r = 0$일 때 (11)은 니코마쿠스 등식 (2)가 됩니다. 또한 좌변 각 항에서

$$\frac{1}{2} \cdot 2k \cdot k^2$$

이라는 패턴이 나타나는데, 이는 (7) 및 (10)과 본질적으로 동일합니다.

니코마쿠스 등식의 연속적인 유사

연속적인 유사(continuous analogue)란 이산적(discrete) 구조를 연속적인 영역으로 일반화하거나 대응시키는 개념을 말합니다. 따라서 니코마쿠스 등식 (2)의 연속적인 유사로서

$$\int_0^y x^3\,dx = \Big(\int_0^y x\,dx\Big)^2 \tag{12}$$

을 생각할 수 있습니다. 이 절에서는 등식 (12)를 일반화한 적분에 대한 등식 (16)을 소개하겠습니다 [7].

윌리엄 로웰 퍼트넘 수학 경시대회(William Lowell Putnam Mathematical Competition)는 미국과 캐나다에 재학 중인 대학생을 대상으로 매년 열리는 유명한 수학 경시대회입니다. 제 34회 대회는 1973년에 개최되었으며, 다음 문제가 번호 $B4$로 출제 되었습니다:

“닫힌구간 $[0,1]$ 위에서 정의된 함수 f가 $f(0) = 0$이며, 도함수 f'은 연속이고 $0 < f'(x) \leq 1$이라고 가정하자. 부등식

$$\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big)^2 \geq \int_0^1 f(x)^3\,dx$$

을 보이고, 등호가 성립하는 예를 구하시오.”

이 문제에서 적분의 상한이 1인 것은 특별한 의미가 없습니다. 실제로

$$g(y) = \Big(\int_0^y f(x)\,dx\Big)^2 - \int_0^y f(x)^3\,dx$$

라 두면, $g(0) = 0$이고

$$g'(y) = 2f(y)\int_0^y f(x)\,dx - f(y)^3 \tag{13}$$

입니다. $f(0) = 0$이고 도함수가 음이 아니므로 $f(y) \geq 0$입니다. 따라서

$$2\int_0^y f(x)\,dx - f(y)^2 \geq 0 \tag{14}$$

임을 보이면 충분합니다. $y = 0$에서 등호가 성립하므로, 이를 다시 미분하면

$$\frac{d}{dy}\Big(2\int_0^y f(x)\,dx - f(y)^2\Big) = 2f(y) - 2f(y)f'(y) \tag{15}$$

를 얻습니다. 여기서 $f(y) \geq 0$, $f'(y) \leq 1$이므로 이 표현은 음이 아니어 부등식 (14)가 성립함을 알 수 있습니다. 한편 $f(x) = x$일 때 등호가 성립함은 쉽게 확인할 수 있습니다.

등식 (15), (13)에 의해

$$\begin{aligned}
&2\int_0^y\int_0^\alpha f(\alpha)f(t)(1-f'(t))dt\,d\alpha\\
=&2\int_0^y f(\alpha)\Big(\int_0^\alpha f(t)(1-f'(t))dt\Big)d\alpha\\
=&\int_0^y f(\alpha)\Big(\int_0^\alpha \frac{d}{dt}\Big[2\int_0^t f(x)dx - f(t)^2\Big]dt\Big)d\alpha\\
=&\int_0^y f(\alpha)\Big(2\int_0^\alpha f(x)dx - f(\alpha)^2\Big)d\alpha\\
=&\int_0^y g'(\alpha)d\alpha\\
=&g(y)
\end{aligned}$$

이므로, 적분에 대한 등식

$$\left(\int_0^y f(x)\,dx\right)^2 - \int_0^y f(x)^3\,dx = 2\int_0^y \int_0^\alpha f(\alpha)f(t)(1-f'(t))dt\,d\alpha \tag{16}$$

을 얻게 됩니다. 니코마쿠스 등식 (2)의 연속적인 유사

$$\int_0^y x^3\,dx = \left(\int_0^y x\,dx\right)^2$$

는 등식 (16)에서 $f(x)=x$인 경우입니다.

극한으로서 "$\sqrt{11}$" 등식

문헌을 살펴보면, (a,b,c,d,e,f)의 전부 또는 대부분이 0이 아닌 경우

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a+bk+ck^2\right)\left(d+ek+fk^2\right) \tag{17}$$

형태의 합에 대한 간단한 표현은 알려져 있지 않은 것으로 보입니다. $a=c=d=e=0$이고 $b=f=1$일 때, (17)은 니코마쿠스 등식 (2)가 되지만, 이를

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)^3=\right)\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)(1+2k+k^2)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1+k)\right)^2 \tag{18}$$

와 같이 다시 쓰면, 등식 (18)의 좌변을 (17)의 관점에서 보았을 때 c만 0인 경우임을 알 수 있습니다. 한편, 등식 (18)은

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+ak)(1+2k+ak^2)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}(1+ak)\right)^2$$

으로 일반화 되며, 이 등식에서 $a=0$이면 연속된 홀수의 합이 완전제곱수가 됨을 관찰할 수 있습니다.

이 절에서는 먼저 니코마쿠스 등식 (2)의 우변에 있는 삼각수의 제곱에 주목하여 (17) 형태의 합에 대한 새로운 등식 (19)를 아래의 정리 1에서 소개하고자 합니다 [4].

정리 1.

$$(a,b,c)=\left(1,\ \frac{-1+\sqrt{11}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{11}}{2}\right),\quad (d,e,f)=(-a,-c,-b)$$

라 두면,

$$\frac{1}{2n+3}\sum_{k=1}^{n}\left(a+bk+ck^2\right)\left(d+ek+fk^2\right)=T_{n-1}^2. \tag{19}$$

등식 (19)는 임의의 n에 대해 좌변과 우변을 각각 계산하여 서로 같음을 확인할 수 있습니다. 좌변을 위해서는 $\sum_{k=1}^n k^u$ $(1\le u\le 4)$의 공식이 필요한데, 예를 들면

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{(n+1)n(n+1/2)(3n^2+3n-1)}{15}$$

등이 있습니다.

등식 (19)는 새로운 것이며, 증명은 단순하지만 발견된 후에야 그 존재가 드러나는 수학 연구의 통찰을 잘 보여주는 예라고 생각합니다. 특히 (19)의 우변이 삼각수의 제곱이라는 점에서 이 등식은 니코마쿠스 등식 (2)와 매우 가깝고, 여기서 $\sqrt{11}$이 등장한다는 점은 매우 흥미롭습니다.

이 절의 뒷 부분에 있는 정리 2에서는 $\sqrt{11}$의 연분수 전개(continued fraction expansion)의 수렴분수(convergent)가 나타나는 자명하지 않은 등식 (22)를 얻어, 등식 (19)가 등식 (22)의 극한적 경우(limiting case)임을 보이고자 합니다. 이를 위해 먼저 연분수에 대한 개념을 간략히 소개하겠습니다. 실수 x가 다음과 같은 연분수 전개

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

를 가질 때, 이 연분수의 유한 부분을 잘라낸

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

을 n번째 수렴분수라고 부릅니다. 또한,

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

처럼 $(1, 2)$패턴이 무한히 반복될 때는

$$\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$$

와 같이 씁니다.

$(-1 + \sqrt{11})/2$의 연분수 전개는

$$[1; \overline{6, 3}]$$

이며, 이 연분수의 한 수렴분수

$$\alpha_j := [1; \underbrace{6, 3, 6, 3, \ldots, 6, 3}_{2j-2\text{ 개}}]$$

를 계산하면

$$\alpha_j = \frac{1}{2}\Big(-1 + \sqrt{11 - \frac{10}{3 + 2u_j}}\Big) \tag{20}$$

임을 알 수 있습니다. 여기서 u_j는 멱급수 전개

$$\frac{1 + 502x + x^2}{(1 - x)(1 - 398x + x^2)} = 1 + 901x + 359101x^2 + 142921801x^3 + \cdots$$

에서 x^{j-1}의 계수이며, 실제로 u_j의 정확한 값은

$$u_j = \frac{1}{44}\big(5\big(10 - 3\sqrt{11}\big)^{2j-1} + 5\big(10 + 3\sqrt{11}\big)^{2j-1} - 56\big) \tag{21}$$

입니다. 위 내용의 증명은 다소 복잡하여 생략하고, 자세한 내용은 [4]의 제 4절을 참고하시기 바랍니다. 위의 사실들을 이용하면 다음 정리를 얻을 수 있습니다.

정리 2.

$$(a,b,c) = \big(1,\ \alpha_j,\ -(1+\alpha_j)\big), \quad (d,e,f) = (-a,-c,-b)$$

라 두면,

$$\sum_{k=1}^{n}(a+bk+ck^2)(d+ek+fk^2) = T_{n-1}\Big(\frac{(1+n)(2-3n^2)}{3(3+2u_j)} + (2n+3)T_{n-1}\Big). \tag{22}$$

등식 (22)는 임의의 n에 대해 좌변과 우변을 각각 계산하여 서로 같음을 확인할 수 있습니다. 다만 손으로 계산하기에는 다소 복잡하므로, 컴퓨터 대수의 도움을 받는 것이 좋습니다. 한편, 등식 (22)에는 $\sqrt{11}$의 연분수 전개, 삼각수 등이 사용되어 매우 흥미롭습니다.

이제 등식 (22)로부터 정리 1에 있는 등식 (19)를 이끌어내 보겠습니다. $j \to \infty$일 때, (21)에 의하여 $u_j \to \infty$이고, (20)에 의하여

$$\alpha_j \to \frac{-1+\sqrt{11}}{2}, \quad -(1+\alpha_j) \to \frac{-1-\sqrt{11}}{2}$$

입니다. 따라서 $b' = \big(-1+\sqrt{11}\big)/2$, $c' = \big(-1-\sqrt{11}\big)/2$일 때, 등식 (22)의

$$\text{(좌변)} \to \sum_{k=1}^{n}\big(1+b'k+c'k^2\big)\big(-1-c'k-b'k^2\big)$$

$$\text{(우변)} \to (2n+3)T_{n-1}^2$$

이 됩니다. 즉, 등식 (19)는 등식 (22)의 $j \to \infty$인 경우에 해당합니다. 따라서 등식 (19)는 등식 (22)의 극한적 경우가 됩니다.

정리 1과 정리 2는 증명은 쉽지만 발견하기는 어렵습니다. 특히 많은 수들 중에서 무리수 $\sqrt{11}$이 등식 (19)에 등장하는 이유에 대해 필자는 알지 못합니다. 필자는 컴퓨터 대수를 이용해 수많은 실험을 하며 패턴을 읽고 그것을 해석하려고 했을 뿐입니다.

그 밖의 확장

이 글에서 언급된 니코마쿠스 등식의 확장 외에, 다항식

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^3x^k - \Big(\sum_{k=1}^{n} kx^k\Big)^2$$

과 정수들의 유한집합 $\sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$에 대한 연산자

$$\nu(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^3$$

를 고려할 수 있습니다. 니코마쿠스 등식에 의해 $P_n(1) = 0$이고 $\nu(1,2,3,\ldots,n) = 0$이므로, 우리가 공부할 수 있는 내용으로는 다음이 있습니다:

(ㄱ) 다항식 $P_n(x)$의 전개된 모습(closed form), 영점 분포(zero locations),

(ㄴ) $\nu = 0$을 만족시키는 정수들의 집합 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$을 찾는 문제.

(ㄱ)에 대한 기존 연구는 거의 알려져 있지 않으나, 필자와 스톨라스키(Stolarsky)가 여러 결과를 보유하고 있습니다(아직 학술지에 제출된 적은 없습니다). (ㄴ)에 대한 내용은 [1], [6]을 참고하시기 바랍니다.

마지막으로, [5]에서 소개된 니코마쿠스 등식의 바르나르 q-유사 (9)와 관련된 흥미로운 관찰을 소개하며 글을 맺고자 합니다. 니코마쿠스 등식 (2)는 $n \to \infty$일 때 의미 있는 극한을 주지 않지만, 그 확장인 바르나르의 q-유사 (9)의 좌변 혹은 우변은 $n \to \infty$, $|q| < 1$에서 다음으로 수렴합니다:

$$\begin{aligned} G(q) &= \frac{1}{(1-q)^2\left(1-q^2\right)^2} \\ &= 0 \cdot q^{-2} + 0 \cdot q^{-1} + 1 + 2q + 5q^2 + 8q^3 + 14q^4 + 20q^5 + \cdots . \end{aligned} \tag{23}$$

(23)에서 세 개의 연속된 계수의 합으로 이루어진 집합은

$$\{1,\ 3,\ 8,\ 15,\ 27,\ 42,\ 64,\ 90,\ \ldots\}$$

입니다. 이 가운데 홀수 위치에 있는 원소들

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \ldots$$

은 양의 정수의 세제곱임을 보일 수 있으며, 이는 니코마쿠스 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \tag{24}$$

의 좌변 항들과 일치합니다. 한편 짝수 위치의 원소들은

$$\{s(1),\ s(2),\ s(3),\ \ldots\} = \{3,\ 15,\ 42,\ 90,\ \ldots\},$$

여기서

$$s(k) = \frac{1}{2}k(k+1)(2k+1) = 3\sum_{m=1}^{k} m^2$$

임을 보일 수 있으며, 이는 등식

$$\sum_{k=1}^{n} s(k) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{25}$$

의 좌변 항들입니다. (24)의 우변이 삼각수의 제곱이었던 것과는 달리, (25)의 우변은 연속된 두 삼각수의 곱이라는 점이 흥미롭습니다.

위의 관찰에서 바르나르의 (9)가 니코마쿠스 등식 (24)의 q-유사였던 것처럼, [5]에서는 등식 (25)에 대응하는 q-유사를 구해 이를 바르나르의 q-유사의 쌍동이(twin)라 부르고, 바르나르의 q-유사와 그것의 쌍동이를 비교 연구 하였습니다. 필자는 [5]에서 제시한 방법과 결과 외에, 이 글을 읽는 독자들 가운데 누군가가 더 간결하고 우아한 접근을 발견해 주기를 기대해 봅니다.

참고문헌

[1] E. Barbeau and S. Seraj, Sum of cubes is square of sum, *Notes on Number Theory and Discrete Math.* **19** (2013), 1–13.

[2] J. L. Cereceda, A simple generalization of Nicomachus' identity, *Math. Mag.*, **96** (2023), 66-75.

[3] K. C. Garrett, K. Hummel, A combinatorial proof of the sum of q-cubes, *Electron. J. Comb.*, **11** (2004), $\sharp R9$.

[4] S.-H. Kim, K. B. Stolarsky, A Balanced Three-term Generalization of Nicomachus' Identity, preprint, https://arxiv.org/abs/2511.15133.

[5] S.-H. Kim, K. B. Stolarsky, Twin Nicomachean q-identities and conjectures for the associated discriminants, polynomials, and inequalities, *Int. J. Number Theory*, **17** (2021), 621-645.

[6] S.-H. Kim, K. B. Stolarsky, Translations and Extensions of the Nicomachean Identity, *J. Integer Sequences*, **27** (2024), Article 14.6.3.

[7] M. S. Klamkin, D. J. Newman, Inequalities and identities for sums and integrals, *Amer. Math. Monthly* **83** (1975), 26–30.

[8] D. E. Knuth, Johann Faulhaber and Sums of Powers, *Math. Comp.*, **61** (1993), 277-294.

[9] S. O. Warnaar, On the q-analogue of the sum of cubes, *Electron. J. Comb.*, **11** (2004), ♯N13.