

??? ??

??? ??? ?????? ????? ??? ?????? ? ? ??, ?? ??? ????? ????????? ?????? ???, ??? ?????? ?? ?? ??? ??????  
?? ?? ?? ?????? ??? ??? ?? ?? ?? ?????.

??? ??? ??? ??? ?? ??? ?? '??? ???!' ??? ??? ?????? ??? ?????? ? ? ?? ??????? ??? ???????, ???  
??????? ? ? ?? ?? ??? ?????? ?????? ??? ? ?? ?? ?? ???.

**?? ????? (1854-1912)**



?? ?????

?? ?? 200? ? ??? ?? ?????? ?????? ??????. ?????? ?????? ? ??? ??, ??? ??? ??????? ???. ?? ??? ??? ???  
????? ?????? ??? ??? ?????? ??????. ?? ??? ?????? ??????? ??? ?? ?? ??? ?????? ???, ?????? ??????? ? ?  
????, ??? ?? ??? ?????? ?????? ??? ?????? ???. ??? ?? ?????? ??????.

????? "???? ??? ??? ?? ??? ??? ??????, ??? ?? ?? ??? ?? ??? ??? ?????."?? ?? ?????, ?? ?? ????? ???  
????? ??? ?? ?????? ?? ?????? ??????.

**?? ????? ??? (1884-1944)**



???? ?? ?????? ? ?? ??? ????? ????? ?? ? ?? . ??? ??? 1?? ?? ?? 1942?? ??? ??? ????? ??(Birkhoff ergodic theorem) ? ? ??? ?? . ?????? ????? ?? ? ??? ?? ????? ? , ??? ??? ??? ??? ??? ??? . ?? ????? ?? ?? ?????? ??? .

**???? ?????? (1903-1987)**



??????? ????? ???????, ??? ?????? ??? ????? ? ??????? ??? ??? ???, ??? ??? ?????? ?????? ?? ????? . ???????? KAM ??(?????-????-?? ??)??? ????? ???????, ? ??? ??? ????? ?????? ?? ????? ?????? ??? . KAM ??? ??? ????? ????? ?? ????? ? ??? ????? ?? ??????? ??? ??? .

???? ?? (1979-)



???: 2014? ?? ????????

??? ??? ????? ???

2014? ?? ??????? ?? ?? ?? ?? ?? ?? ??

?? ??? ??????? ?? ?? ?? ?? 2014? ??? ????? ????? ? ? ?? . ?? 2011? ??? ????? ?? ??? ?? ?? ?????, ? ??? ????? ?? ?????.

**????? ?**

????? ?? ? ?? ????? ??? ? ?? . ? ??? ??? ??(Julia set)? ????? ??(Mandelbrot set)? ????? . ????? ??? ???

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

???? ??? ??????. ?? c? ??? ??? ???, ?? ???

$$z_0$$

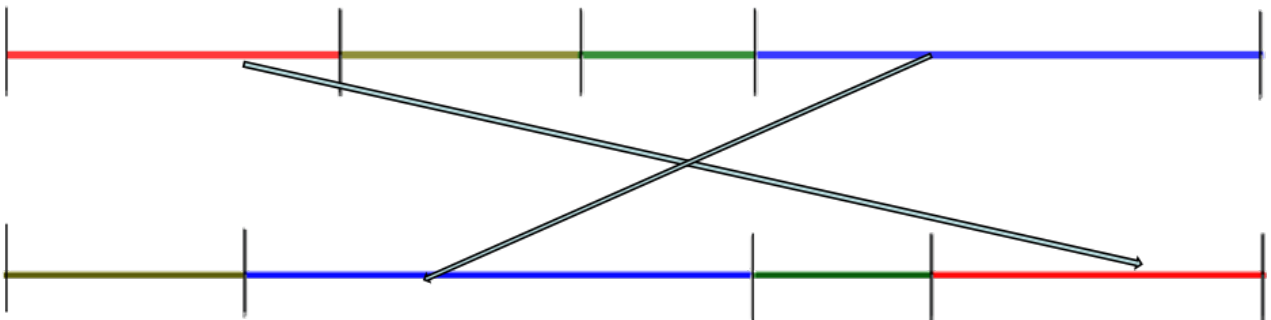
? ????? ? ??? ??? ??? . ??? ????? c? ?? ?? ??? ????? ??? ??? ??? ?? ??? ?????.







??? ??? ? ??? ????? ??? ????? ??? ??????, ??? 1? ??? ??? ?? ?? ????? ?? ?, ? ????? ?? ????? ???  
 ?????, ??? ??? '???? ??' ????? ?????.



?: 4? ??? ??? ?

??

?? ??? ??? ??? ??? ????? ??? ?? ?????? ?????? ?????? ????. ????? ????? ??? ?? ?????? ?????? ?? ??? ?? ?  
 ???, ??? ?? ??? ?? ??? ?? ?????? ??? ??? ?? ??? ????. ?? ????? ?? ?? ?????? ??.

**???? ? (logistic map)**

???? ?? ?? ????? c? ???

$$f(x) = cx(1-x)$$

? ?? ????? ?????? ? ??? ?????? ?????? ?? ?? ?????? ??? ?? ? ??? ? ???. ?? ?? ?? ??? ??? ?? ?? ?????? ??  
 ?? ??? ??? ??????

??

$$x_n = f(x_{n-1})$$

? ????? c? ???

$$x_0$$

?? ??



---

/mho/mho

?? ?? ??(measure preserving map), ??

? ? ?\Alpha \quad \Epsilon \quad \Im

??

$$\tau^{-1}(A) = \tau^{-1}(A) \Rightarrow \mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A)$$

???? ????.

?? ???? ???? ???? ??, ???? ???? ?? ???? ??.

??

? ? ?{\Alpha \quad \epsilon \quad \wp}

?

$\mu(A) > 0$

???? ?

$$\mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A) \Rightarrow \mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A)$$

???? ?? ?? ?? ?? n? ?? ?????

?? ???? '???'? ???, ? ??? ?????? ???. ??? ?? ??? ??? ??? ?????? ??????? ???. (???)

$\mu(\chi) = 1$

??? ??? ???, ?? ?? ??????  $x^2 - x + 1$ ? ??? ??? ?????? ?????? ??? ?????? ?? ? ? ??.)

**???? (ergodic)**

??

$\tau^{-1}(A) = A \Rightarrow \tau^{-1}(A) = A$

???? ??

? ? ?{\Alpha \quad \epsilon \quad \wp}

?? ???

$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$

???



---

??

?:0,1?0,1

?

?x=x+?(mod 1)\Tau\left(x\right)=x+\alpha(mod\quad 1)

????

([0,1),?,?,?)([0,1),\Beta,\Tau,\lambda)

?? ???? ????? ???? ? ???. ?? ?? ?? ?? f? 0?? 1?? ??? ?? n?? ?? ?? ????? ????? ?? ? ??.

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x+ia}{n}\right) \pmod{1}$$

?? ???? ?? ??????? ????? ????? ????? ????? ???. ??? ?? ????? ??? ??? ? ?? ? ?? ???.

### ??2

?? ??

???\Alpha\subset\Chi

? ?? A? ????? ?? 1?? ??? 0? ?? ??

x<sub>A</sub>

? ??????. ??? ????? ??? ??? ?? ?? x? ???

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A\left(\frac{x+ia}{n}\right) = \int_0^1 A(x) dx$$

?????. ??? ??? ? ??? ????? ??? ?? A? ????? ?? ??? ??????? A? ??? ?????? ?? ? ?? ??.

### ??3

???? ?????? ???

?,???\Alpha,\Beta\subset\Chi

? ?? ??? ?? ??? ??? ? ??.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (A \cap B)\left(\frac{x+ia}{n}\right) = \int_0^1 (A \cap B)(x) dx$$

?? ?? ?? A? T? ?? ??? ? ? ??? ????? ??? ??? ??? ?? ? ???, ??????

$\tau^i(A)$

? B?? ????? ???



?? ??

?? ????? ??? ?????? ??????. ??? ??? 2?? ??? ??? ?????, ? ?? ?????? ????????? ??? ????? ????? ??  
?? ??? ??????. ????? ??? ??? 3 ?? ?? ?????? ??? ?????? ??? ??? 3?? ??? 2?? ??? ?????(renormalize)??  
??? ?? 3? ?? ??? ?? ?????? ?? 1967?? ?????. ??? ????? ? ?? ??? ?? ?????? ??? ??? ?????? ??  
2007? ????? ????? ?? ??? ?????, ????? ? ????? 2011? ?? ?? ?????? 2014? ????? ?? ??.

??[???, ???, 2007?] ??

n>2

? ??

????(typical) n? ?? ??? ?? ?? ??? ??????. (??? ??(mixing)? ???.)

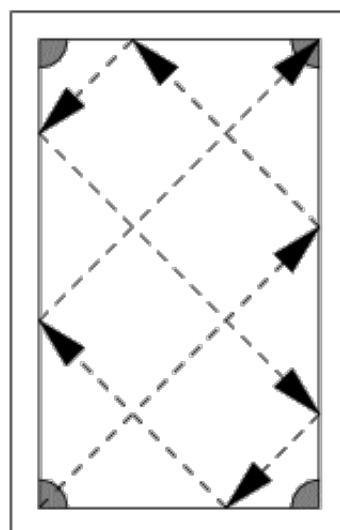
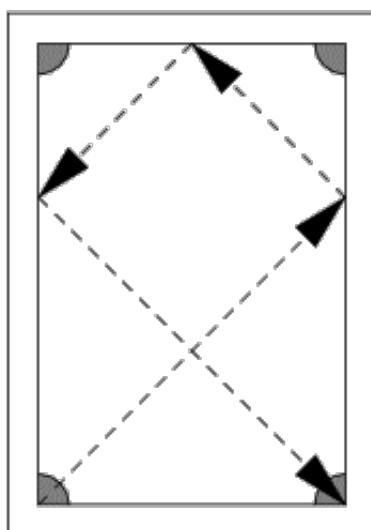
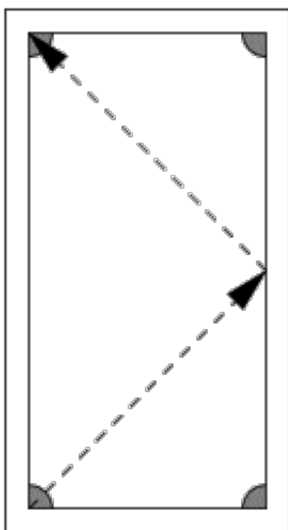
?? ??? ?????? ? ??? ??? ?????? ?????? ??? ??????. ??? ?????? ??? ?????? ?????? '?? ????'? ?????? ??? ??? ?? ??  
??? ?????? ??? ?????.

??? ??? ?? ??? ?? ??? ?????? ? ??? ?? ??? ?????, ?? ? ??? ? ??? ?? ??? ?? ?????? ? ??? ? ?????? ??  
??? ?????? ?????? ?? ??????. ?? ?? ??? ?????? ?????? ?? ??? ?? ??????, ??? ?????? ?? ??? ?? ?????? ??? ?  
??. ? ?? ??? ?????? ??(Teichmüller space)??? ?? ??(translation flow) ?? ?? ??? ??? ??? ??.

?? ?????, ?????????? ??? ??? ??? ?????? ?? ?? ??? ?? ??? ??? ?? ?????.

??

??? ?? ??? ??? ??? ??? ?????? ?????? ?????? ? ??? ? ??? ????. ?? ??? ?? ?? ?????? ?????? ??? ??????.



??: ????? ??? ??????

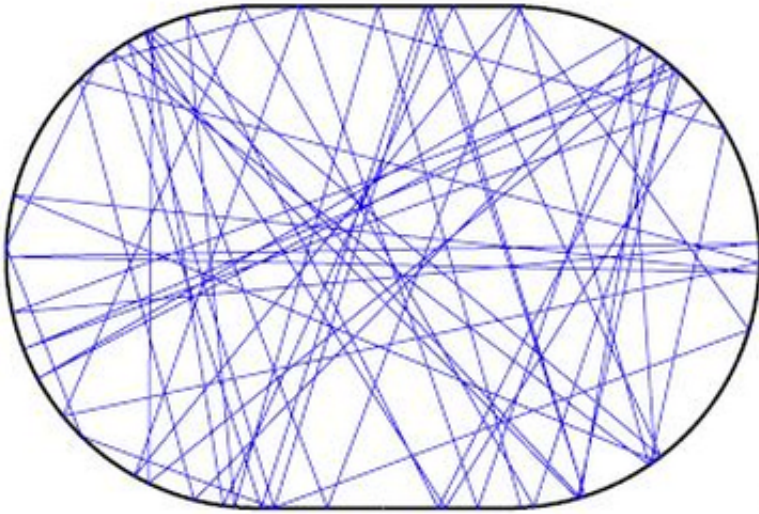
??

?? ??? ?????? ?? ????? 45°????? ?? ?????? ??? ??? ?????????? ?? ? ? ???, ?? ? ? ?????????? ??? ??? ? ??.

---

???? ???? ?????? ???? ?? ?????? ??? ?????? ??? ?? ? ??.

???, ??? ?? ?????? ??? ?????? ?? ???(stadium) ?????? ?????? ??? ?????? ??.



?: ??? ??? ?????? ??

??? ?????? ?????? ??? ??????, ??? ?? ?? ?? ?????? ?????? ??? ?????? ??? ?? ??, ??? ??? ?????? ???  
????(deterministic, ???=0)??.

???? ?

$c=4$  ?? ????? ?

$$f(x)=4x(1-x) \text{ fleft(x\right)=4x(1-x)}$$

?

$$x=1/2 \text{ x}=\frac{1}{2}$$

?? ??? 1? ???. ? ?????? ?? ?? ?????? ?????? ?????? ?????? ??? ????. ?? ?? ??????

$$x_0=0.4 \text{ } \{x\}_0=0.4$$

? ???

$$x_0=0.41 \text{ } \{x\}_0=0.41$$

? ?? ??? ?? ??? ?????? ??????.



	$x=0.4$	$x=0.41$
$f(x)$	0.96	0.9676
$f^2(x)$	0.1536	0.125400
$f^3(x)$	0.520028	0.438702
$f^4(x)$	0.998395	0.984970
$f^5(x)$	0.006407	0.059215
$f^6(x)$	0.025466	0.222834
$f^7(x)$	0.099272	0.692717

	$x=0.4$	$x=0.41$
$f^8(x)$	0.357670	0.851439
$f^9(x)$	0.918969	0.505960
$f^{10}(x)$	0.297859	0.999857
$f^{11}(x)$	0.836557	0.000568
$f^{12}(x)$	0.546916	0.002271
$f^{13}(x)$	0.991195	0.009066
$f^{14}(x)$	0.034909	0.035936

?: ????? ?? ????? ? ??? ??

???? ?????? ?? ??? ??? ? ?????? ??? ?? ?? ??? ?? ? ? ?? . ??? ??? 0.4? ?? ?????? ??? ??? ?????? ???? ??? 0.41? ?? ??? ??? ?? ?? .

??,  $c=2$ ? ?? ????? ?

$$f(x)=2x(1-x) \quad f(\left(x\right))=2x(1-x)$$

? ?? ????? ?????? ?? ??????. ?? ? ?? ?????? ??

$$f_n(x) = f^n(x)$$

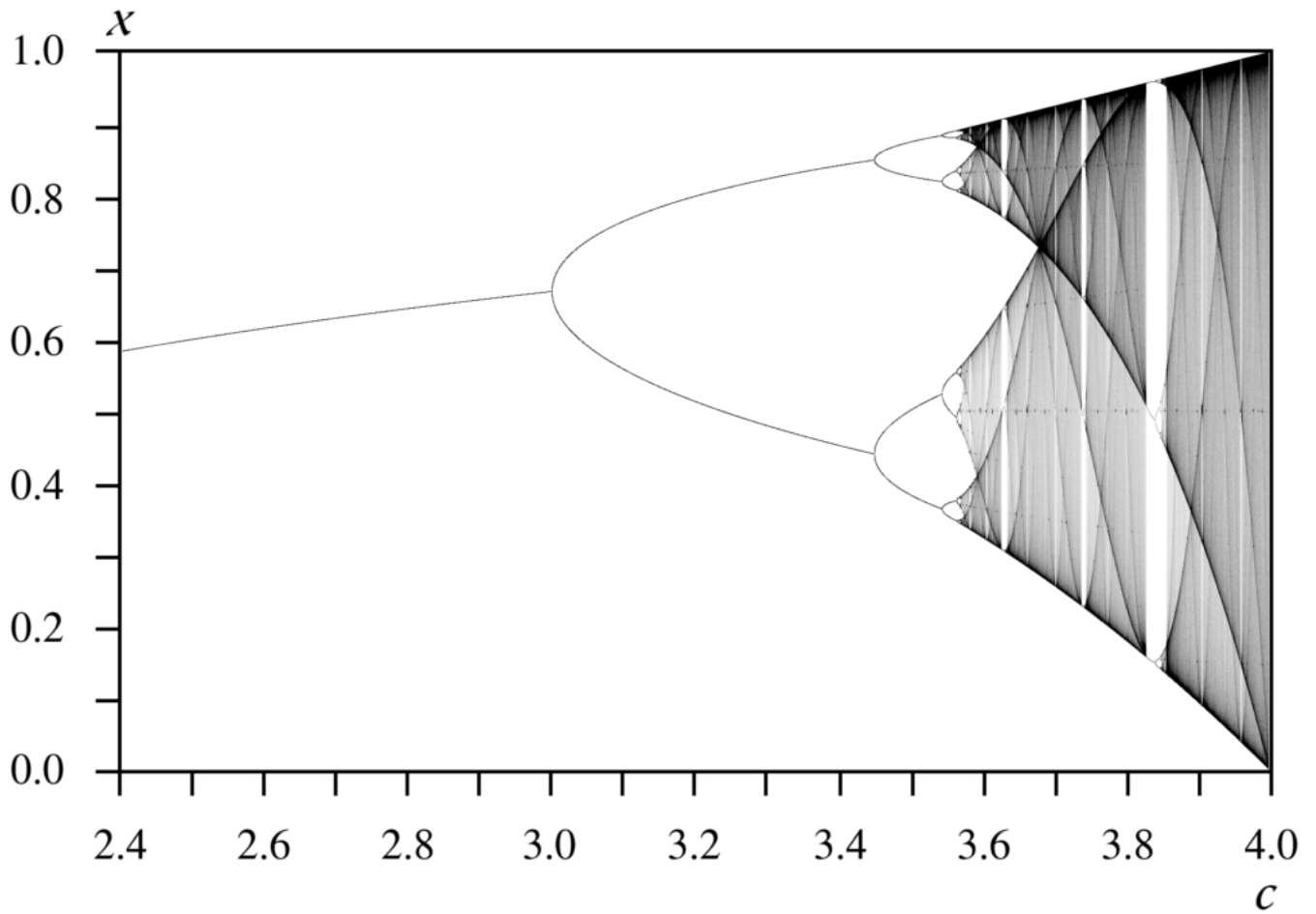
?

$$f_2(x) = \frac{1}{2}$$

? ????? ?????. ??? ????? ?? ?? ?????? ??? ??? ??? ??? **?(bifurcation)?** ?? . ?? ??? ????? ?

$$f_c(x) = cx(1-x) \quad f_{c'}(x) = cx(1-x)$$

? ?? ?????? ?????. ? ?????? ?? ?? ??? ?? ? ??? ?????? ?? ? ?? ??(???? ? ???)? ??? ??? . ?  $c$ ? 4? ?????? ?? ??? ??? ?? ? ????? ?? ? ?? .



??: ????? ?? ?? ??????

wqdwdqzcasdwdwq wd wwdioh wqdijwq dopwjqd opqwjq fknqwnq wfo pwqnfopw nopw dnoqwdn qwopdnqwopdn oqwp dnqwopd

**????**

?? ?? ?????? ?????? ??? ??????. ????? ? ??? ??? ? ????? ?????(entropy)? ????? ??? ????????? ?????? ???

$(\chi, \mu, \tau)$

? ????????? ?? . ??? ? ? ??? ??(partition)?? ????? . ??????? ??? ???

$\rho \in B$

? ?? ?????? ??? ??.

