

????? ?????

????? ????



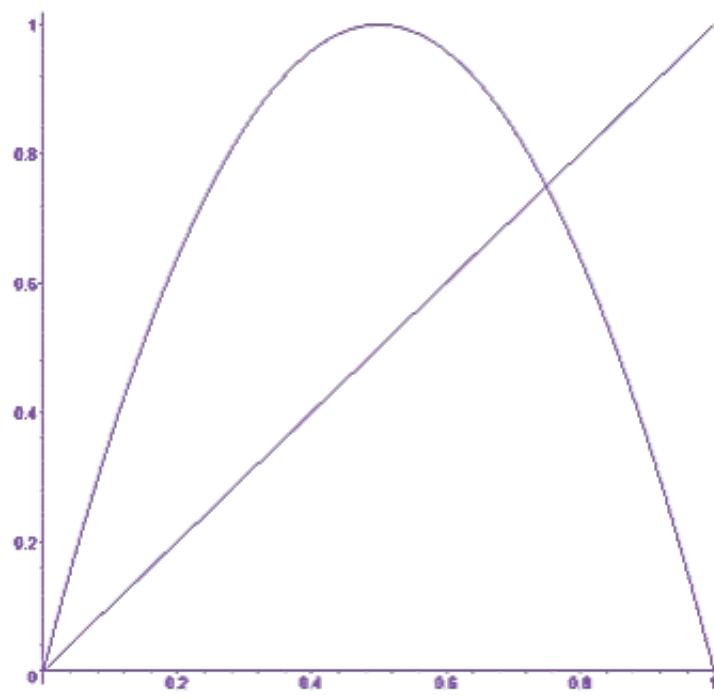


??:????? ??

????? ??? ???? ?? ???? ??, ? ??? ?? ???? ????? . ??? ???? ?? ??? ??? ???, ???, ?? ???
?? ? ??. ??? ????? ?????? ??? ??? ??? ?? ????? ??? ? ??. ??? ????? ?? ? ??? ?? ??? ??
?? ??? ? ??. ?? 2014? ??? ?? ?????????? ??? ??? ?? 2?? ????. ?? ?????? ?? ??? ??
????? ??? ???? ??, ?? ??? ???? ?? ??? ?????? ??? ?????? ??? ?????? ??? ?????? ??.
????? ??? ???? ?? ??? ?????? ??.

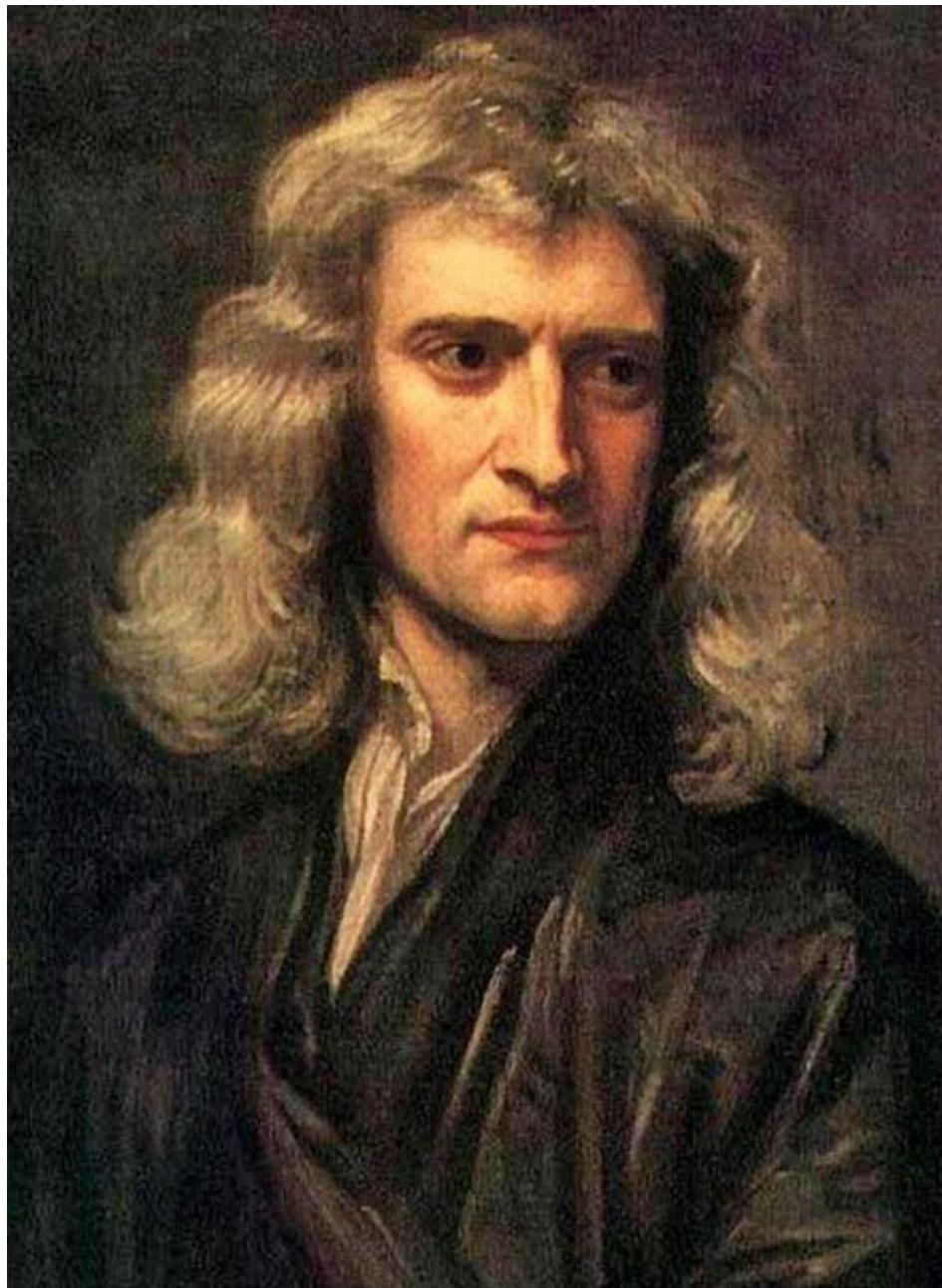
????? ??? ???? ?? ?????? ??.

?? ??(1643-1727)



??: ????

??: ????



??? ??

??? ??? ?????? ????. ?? ??? ?????? ??????? ????, ??? ?????? ?? ?? ??? ?????.

??? ??? ??? ?? '??? ???!' ??? ??? ???????? ? ? ?? ?????? ??? ??????. ???

?? ??? (1854-1912)



?? ???

????? "??? ??? ??? ?? ??? ??? ?????, ??? ?? ?? ??? ?? ??? ??? ?????."?? ?? ????, ?? ?? ????, ?? ?? ????.
????? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ????.

?? ???? ??? (1884-1944)



????? ?? ?????? ? ?? ??? ????? ?? ? ?? . ??? ??? 1?? ?? ?? 1942?? ??? ??? ????? ??(Birkhoff ergodic theorem) ? ? ??? ?. ?????? ??? ? ?? ??? ?? ??? ?, ??? ??? ??? ??? ??? ??? ?. ?? ????. ?? ????? ?? ?? ????? ???.

????? ????? (1903-1987)



?????? ????? ???????, ??? ?????? ??? ??? ? ??????? ??? ??? ???, ??? ??? ?????? ?????? ?? ????. ??????? KAM ??(?????-????-?? ??)??? ??? ?????? ??????, ? ??? ??? ??? ?????? ??? ??? ?????? ????. KAM ??? ??? ??? ??? ??? ?? ??? ??? ? ??? ?????? ?? ?????? ??? ???.

????? ??? (1979-)



내가 기술적 수준에서 계산했던 몇 가지가
생각보다 더 통상적인 분석이란 걸 알게 됐습니다

????: 2014? ?? ????????

??? ??? ????

2014? ?? ????????

?? ??? ??????? ??? ??? ??? 2014? ??? ??? ??? ? ? ?. ?? 2011? ??? ??? ?? ??? ?? ??? ???, ?? ??? ??? ?? ???.

????? ?

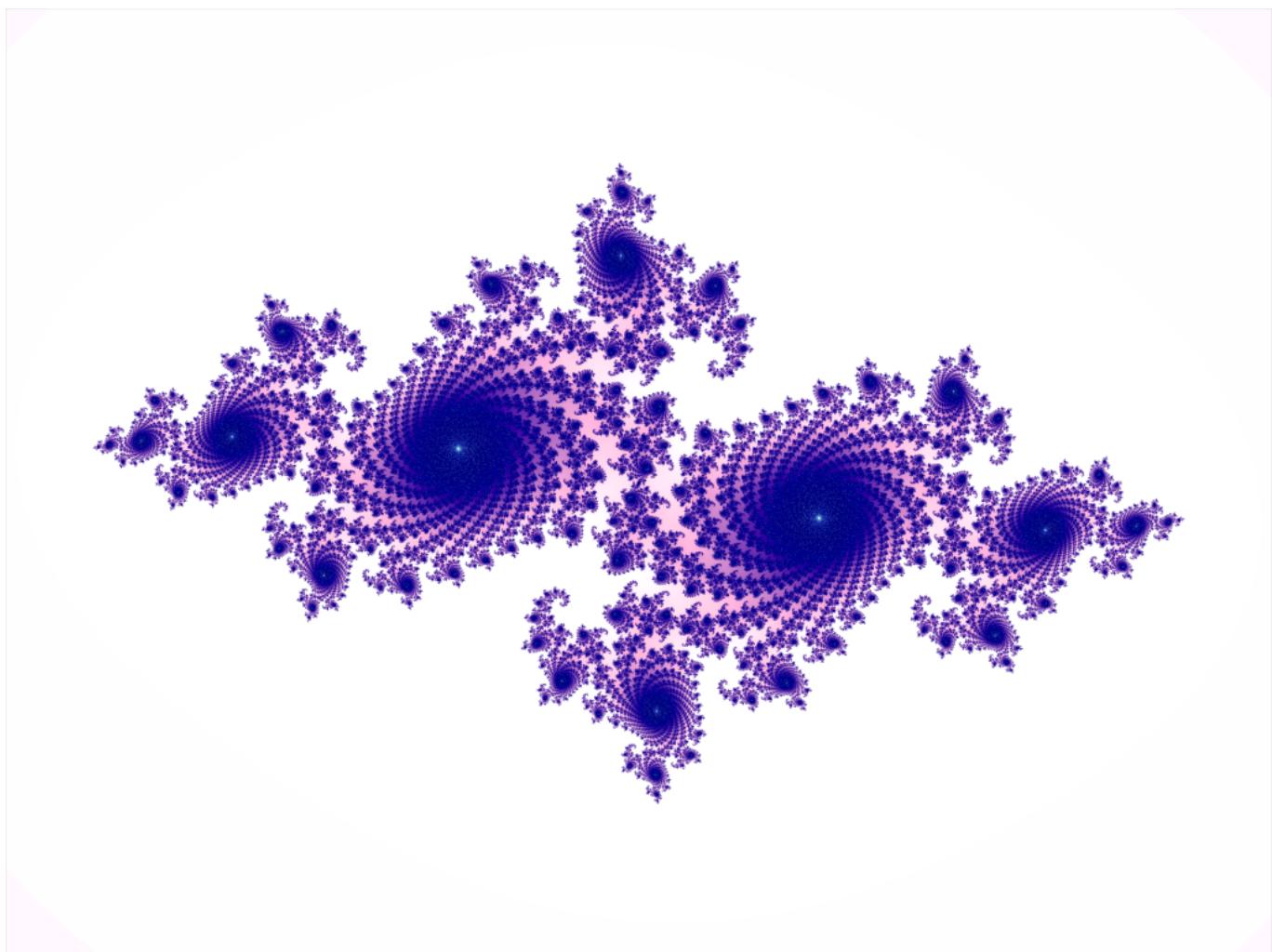
????? ?? ? ?? ??? ??? ? ?? . ? ??? ??? ??(Julia set)? ????? ??(Mandelbrot set)? ????. ??? ? ??

$z_{n+1} = z_{2n} + c$

????? ??? ??????. ?? c? ??? ??? ???, ?? ???

z_0

? ????? ? ??? ??? ??? . ??? ??? c? ?? ?? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ?? ??? ???.



???: ??? ??

?? ???? , ? ???? ?? ??? ??? ??? ????? ??? ?? ?? .

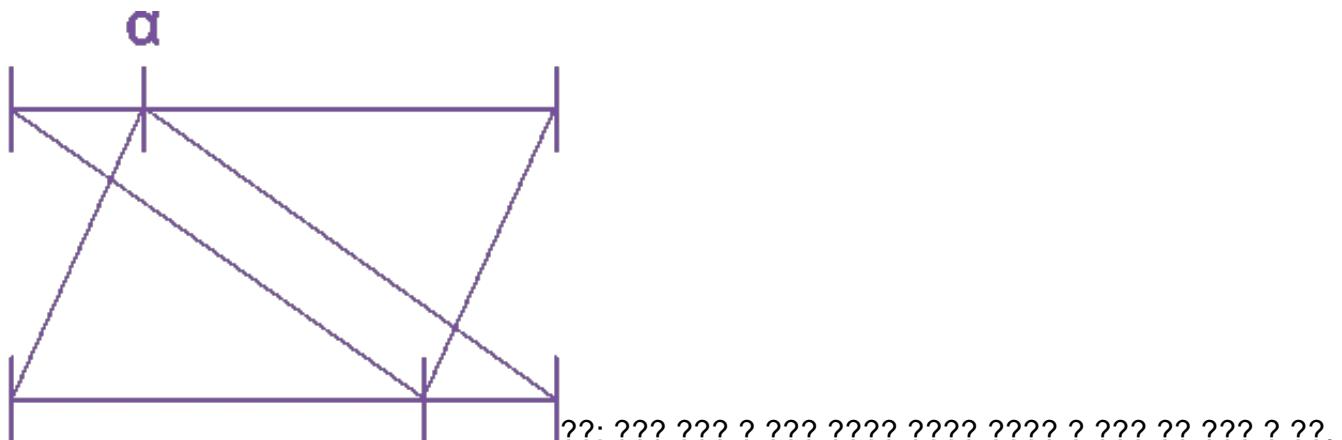
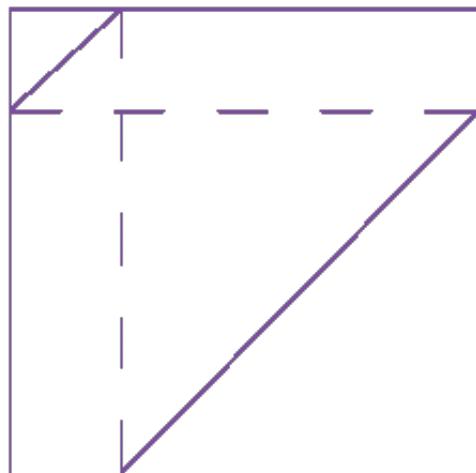
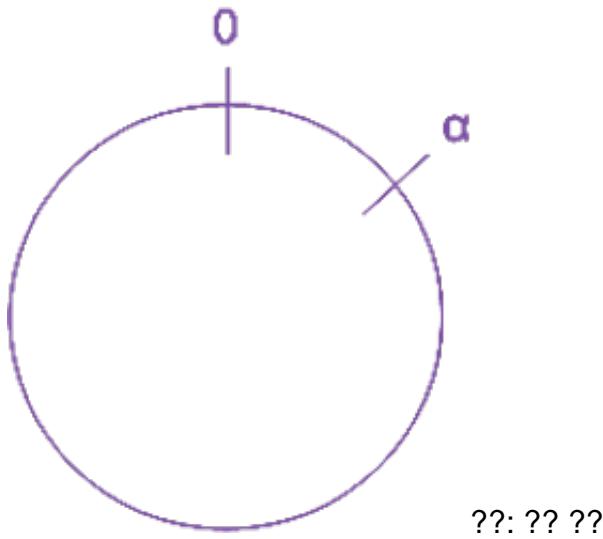
$$z_0=0 \{z\} \quad \{0\}=0$$

???

???

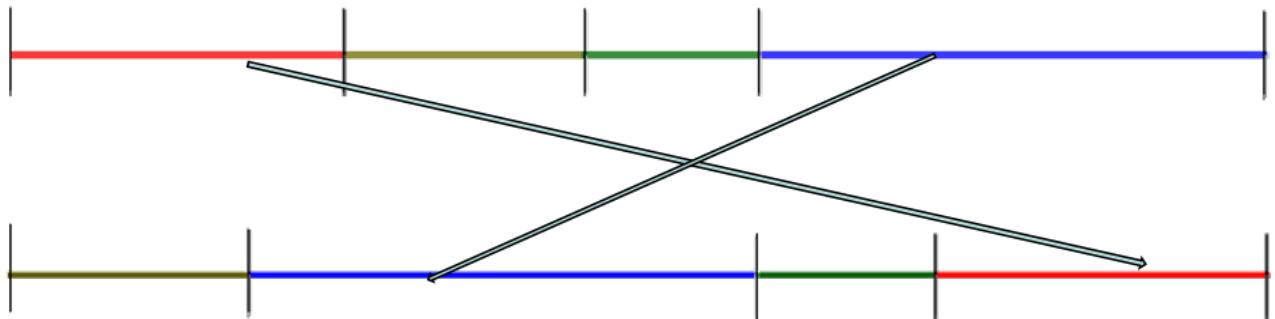
?\alpha

?\\alpha



?? ?? (interval exchange map)

??? ??? ? ??? ??? ??? ??? ??? ???, ??? 1? ??? ??? ?? ?? ??? ?? ?, ? ??? ?? ??? ???
????. ??? ??? '????? ??'? ??? ???.



?: 4? ??? ??? ?

??

?? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ?? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ??? ???
???, ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ??? ??? ?? ??? ??? ??? ?? ??? ??? ?? ??? ??? ??? ?? ??? ??? ??.

???? ? (logistic map)

???? ?? ?? ??? c? ???

$$f(x) = cx(1-x)$$

? ??? ????. ? ??? ????. ?? ??? ????. ?? ? ??? ?? ? ?. ?? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

?? ??? ??? ..

??

$$x_n = f(x_{n-1})$$

? ??? c? ???

x_0

?? ??

$x_n\{x\}_n$

x0{x}_{{0}}

? ?? ???? ???. ??? c = 2? ??? ?? 0??

x0{x}_-{0}

???

$x_n\{x\}_n$

?

$$12\frac{1}{2}$$

? ???? ?? ?? ?? ??.

???

?? (recurrent)

????? ?? ?????? ?? ?? ? ?????, ?????? ??????

(?,\H,?,?)(\Chi,\H,\mho,\Tau)

? ? ? ? ? , ? ? ?

(?,\H,?)(\Chi,\H,\mho)

?

?\\Chi

??

?\\sigma

-??(

?\\sigma

-algebra)??.

/mho/mho

? ?? ?? ??(measure preserving map), ? ??

? ? ?\Alpha \quad \Epsilon \quad \Im

? ??

$$\tau(\tau^{-1}(\tau)) = \tau(A)\mu(\{\tau^{-1}(A)\}) = \mu(A)$$

? ???? ????.

? ???? ????. ????? ??, ????? ??? ?? ??? ??.

??

? ? ?{\Alpha \quad \epsilon \quad \wp}

?

?(A) > 0

? ??? ?

$$\tau(\tau^{-1}(A)) = \tau(A)\mu(\{\tau^{-1}(A)\}) = \mu(A)$$

? ??? ?? ?? ?? n? ?? ??????

? ? ? '????' ? ??, ? ?? ????? ???. ?? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? . (???)

?(?) = 1\mu(\Chi) = 1

? ? ? ? ? ?, ?? ?? ????? x? x+1? ??? ??? ????? ??? ????? ?? ? ? ? ? .)

???? (ergodic)

??

?^{-1}(A) = A\{\tau\}^{-1}(A) = A

? ???? ??

? ? ?{\Alpha \quad \epsilon \quad \wp}

? ?? ???

?(A) = 0\mu(A)\quad=0

???

?(A) = 1\mu(A)\quad=\quad 1

??, ?

?Tau

? ??????? ??.

????? ??????? ??? ?? ????? ????. ?? ??

?Alpha

? ?? ??? ??? ???

?Alpha

????? ??????, ????

?Chi

? ?? ??

?Alpha

? ????? ?????? ????. ??? ?? ????? ?? ???? ?? ??? ?? ??? ?? ????. ?? ?? ???? ????. ??? ?? ????. ?? ??

?i(x){Tau}^i(x)

?

?((?((?((x)?)))\Tau(\Tau(\Tau(\cdots\Tau(x)\cdots))))

?? x?

?Tau

? i? ??? ??? ??? ????. ?? ?? ????.

limn->?1n?i=0n-1f?i(x)=?xfd?

?? ???? ??? ??? ?? ?, ??? ??? ??? ?? ???? ??? ? ?. ?????? ?? ?? ??? ?? ??? ?? ???, ?? ?? ?? ???(regularity)? ??? ???.

??1

?? ??? ??? ??? ??????. ?, ??? ???

?alpha

??

?:0,1?0,1

?

$$?x=x+?(mod~1)\Tau\left(x\right)=x+\alpha(mod\quad 1)$$

???

([0,1],?,?,?)([0,1],\Beta,\Tau,\lambda)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f((x+ia) \bmod 1)$$

??2

?? ??

???\\Alpha\\subset\\Chi

? ?? A? ????? ?? 1?? ??? 0? ?? ??

xA

? ?????. ??? ????? ??? ??? ?? ?? x? ???

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} A(i(x)) = x A d = (A)$$

? ?????, ??? ??? ???? ???? ?????? ??? A? ?????? ?? ??? ?????????? A? ??? ?????? ?? ? ??.

??3

????? ?????? ???

? , ?? ? \Alpha , \Beta \subset \Chi

? ?? ??? ?? ??? ??? ? ??.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=0}^{n-1} (A \setminus B) = A \setminus B$$

?? ?? ?? A? T? ?? ??? ? ? ??? ????? ??? ??? ??? ??? ?? ? ???, ????

?i(A){\Tau}^{\{i\}}(A)

? B?? ????

?(A)\mu(A)

????, ?? T? ??? ????.

?? ?? (weak mixing)

? , ???\Alpha,\Beta\subset\Chi

???

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\#(A) \cap B) - \#(A) \#(B) = 0$$

? ???? ? ? T? ??? ???? ????? . ????? ??? ??? ??? ?, A? T? ?? ??? ? B? ??? ??? ? ? ?

?(A)?(B)\mu(A)\mu(B)

?(A)?(B)\mu(A)\mu(B)

? ??? ?? ????.)

?? (mixing)

???

? ,???\Alpha,\Beta\subset\Chi

???

$$\lim_{i \rightarrow \infty} i(A)B = A(B)$$

? ???? ?? T? ???? ????.

??

?? ?? ???? ?? ???? ?? ?????.

???

{x,?(x),?2(x),...}\{x,\Tau(x),{\Tau}^2(x),...\}

?? ??

?? ????? ??? ?????? ??????. ??? ??? 2?? ??? ??? ??? ??????, ? ?? ?????? ??????? ??? ??? ??? ??
?? ??? ??????. ??? ??? ??? 3 ?? ?? ??? ??? ??? ??? 3?? ??? 2?? ??? ???(renormalize)??
??? ?? 3 ?? ??? ?? ?????? ?? 1967?? ????. ??? ??? ?? ?? ??? ?? ?????? ??? ?? ??? ???. ??
2007? ??? ?? ??? ?? ???, ??? ?? ??? 2011? ?? ?? ??? 2014? ??? ?? ??.

??[???, ???, 2007?] ??

n>2

? ??

????(typical) n? ?? ??? ?? ?? ??? ?????. (??? ??(mixing)? ???.)

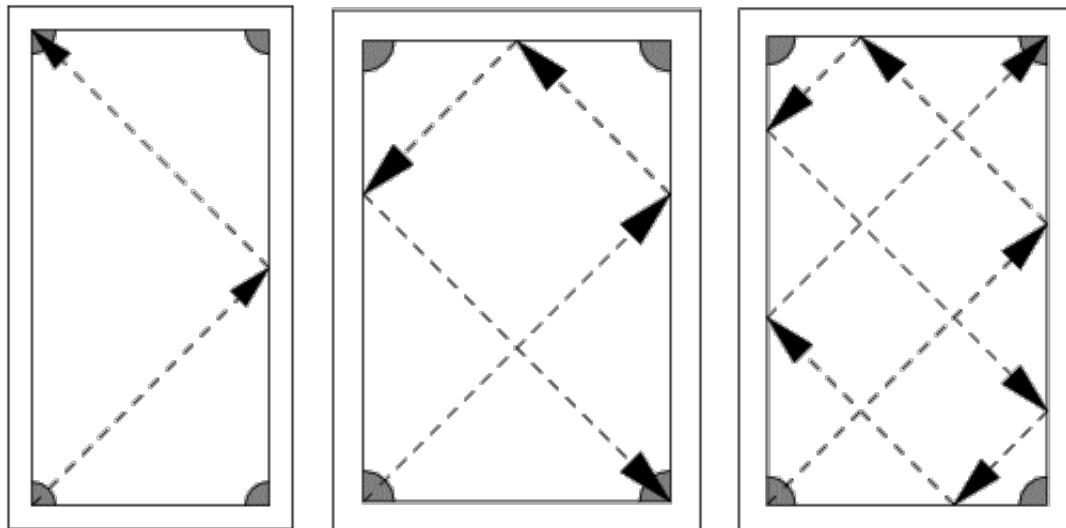
?? ??? ?????? ? ??? ??? ??? ??? ??? ????. ??? ??? ??? ??? ???'?? ???'? ???? ??? ?? ?? ??
?? ??? ??? ??? ??.

??? ??? ?? ??? ?? ??? ??? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ??
?? ??? ??? ?? ????. ?? ?? ??? ??? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ??
?? ?? ??? ?? ??? ??(Teichmüller space)?? ?? ?? ???(translation flow) ?? ?? ??? ?? ??? ??.

?? ????, ??????? ??? ??? ??? ??? ?? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ??? ?? ???.

??

??? ?? ???.



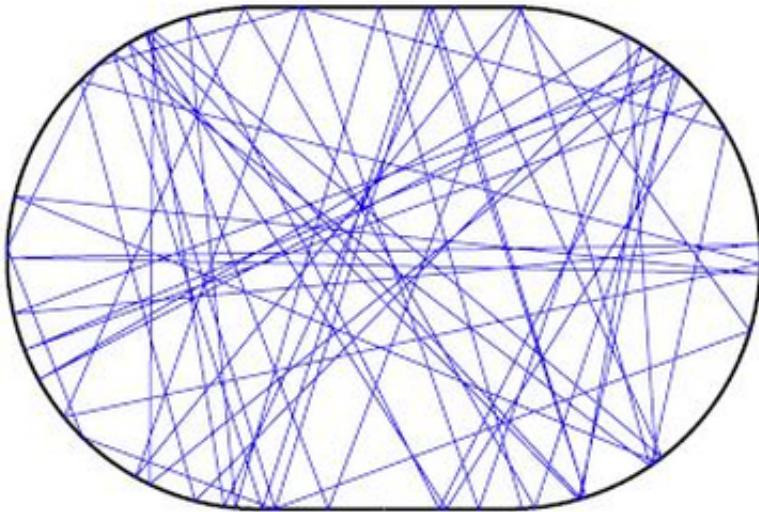
?: ??? ??? ??? ????

??

?? ??? ??? ?? ??? 45°????? ?? ??? ??? ??? ??? ?????? ?? ?? ???, ?? ?? ??? ??? ??? ?? ?? ??.

???? ? ?? ?????? ????. ?? ?????? ????. ?? ?????? ????. ?? ? ??.

???, ???. ?? ?????? ????. ?? ?????? ???. ?? ?????(stadium) ?????? ?????? ????. ?? ????? ??.



??: ??? ??? ?????? ??

??? ?????? ????. ?? ??????, ????. ?? ?? ?? ?????? ????. ?? ?????? ????. ?? ???. ??, ??? ??? ?????? ????.
???(deterministic, ???=0)??.

???? ?

c=4? ?? ????

$$fx = 4x(1-x)$$

?

$$x=12x=\frac{1}{2}$$

?? ??? 1? ????. ? ????? ?? ?? ????? ?????? ?????? ?????? ????. ?? ?? ????.

$$x0=0.4\{x\}_0=0.4$$

? ???

$$x0=0.41\{x\}_0=0.41$$

? ??? ??? ?? ??? ????? ????.

	$x=0.4$	$x=0.41$
$f(x)$	0.96	0.9676
$f^2(x)$	0.1536	0.125400
$f^3(x)$	0.520028	0.438702
$f^4(x)$	0.998395	0.984970
$f^5(x)$	0.006407	0.059215
$f^6(x)$	0.025466	0.222834
$f^7(x)$	0.099272	0.692717

	$x=0.4$	$x=0.41$
$f^8(x)$	0.357670	0.851439
$f^9(x)$	0.918969	0.505960
$f^{10}(x)$	0.297859	0.999857
$f^{11}(x)$	0.836557	0.000568
$f^{12}(x)$	0.546916	0.002271
$f^{13}(x)$	0.991195	0.009066
$f^{14}(x)$	0.034909	0.035936

??, c=2? ?? ????

$$f(x) = 2x(1-x)$$

? ?? ???? ?????? ?? ??????_ ?? ? ?? ??????? ??

$\text{fn} x f^{\wedge\{n\}} \text{left}(x) \text{right}$

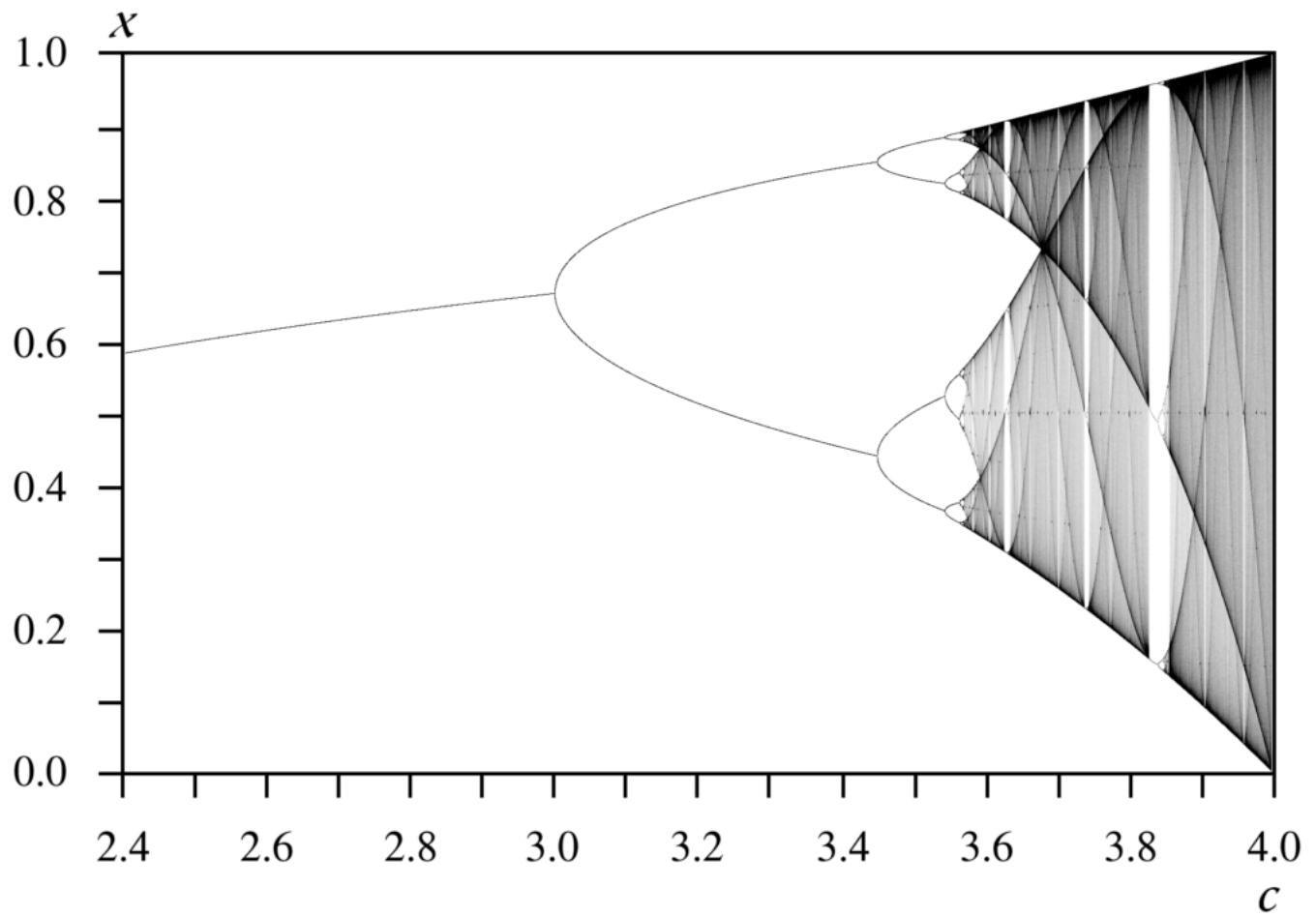
?

$$12\frac{1}{2}$$

? ???? ?????. ??? ???? ?? ?? ?????? ??? ??? ??? ??? ??(bifurcation)?? ?. ?? ??? ??? ?

$$f(x) = cx(1-x) \quad \{f\}_c(x) = cx(1-x)$$

? ?? ?????? ???. ? ?????? ?? ?? ??? ?? ???? ?????? ?? ?? ??(???)? ??? ???. ? c?? 4?
????? ?? ?? ?? ?? ?? ?? ?? ??.



?: ???? ?? ?? ?????

wqdwqdqwzcasdwdwq wd wwdioh wqdijwq dopwjqd opqwjqf fknqwfqn wfo pwqnfopw nopw dnopqwdn qwopdnqwopdn oqwp dnqwopd

???

(?,\B,?,?)(\Chi,\B,\mu,\Tau)

? ??????? ??, ??? ? ? ??? ??(partition)?? ????. ?????? ?? ?? ??

??\B\Rho\in\B

? ?? ?????? ??? ??.

$$\begin{aligned}
h_\mu(T, P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i(P) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\sum_{A \in \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(P)} -\mu_A \log \mu_A \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} H \left(P \middle| \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(P) \right).
\end{aligned}$$

???

?(x)=-x\log x \Eta(x)=-x\log{x}

??, ?? `????? ???'? ???? ??? ?? ???? ????. ????. ???

? ,Q,\B\Rh o,Q,\B

? ??

?(? \wedge Q) = H(?) + H(Q) \Eta (\B\Rh o \wedge Q) = H(\B\Rh o) + H(Q)

???, ? ??? ??? ????? ??? ?? ?????? ??? ???.

????? ??? ?? ?? ?????? ???, ??? ??? ????? ?? ??? ??? ??? ?? ??? ? ????. ?, ?? ?????? ???
 ?????? ??????. ?? ?? c=4? ?? ????? ?? ?? ? ?? ?????? ??(??)? ??? ? ??(??)? ??? ??? ?? ???. ?? ??? ????.
 ????. ??? ?? ?????? 0? ????. ????? ?????? ?? ??? ?????? 0??.

????? 0? ?????? ?? ??? ?? ? ???? ?? ??? ?????? ?? ??? ? ????. ?? ?????? ?? ??? ?????? ?? ?? ??? ?? ????.
 ?? ?????? ?? ??? ?? ??? ?????? ?? ???.

????? ??? ??? 2015? 4? 17? ??? ????? ?? ??? ??????.